

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XVII.

*I. Ueber die Volumenänderungen wasserhaltiger  
Salze beim Erwärmen und die dabei erfolgenden  
chemischen Umlagerungen;  
von Eilhard Wiedemann.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 1—4.)

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich eine Reihe von Metalllegirungen unter Benutzung ihrer physikalischer Eigenschaften darauf hin untersucht, ob die eigenthümlichen Volumenänderungen, welche dieselben bei Temperaturveränderungen erleiden, nicht etwa von molecularen Umlagerungen herrühren.

Die betreffenden Versuche wurden besonders an dem Rose'schen, Lipowitz'schen und Wood'schen Metallgemisch angestellt, und es ergab sich für dieselben, dass bei der Temperatur, bei welcher mit einer Temperaturerhöhung eine Contraction verbunden ist, in vielen Fällen erst nach Tagen ein Gleichgewichtszustand erreicht wird, für welchen das Volumen constant bleibt. Diese Thatsache bewies, dass in der That zwei oder mehrere Modificationen der betreffenden Legirung existiren, welche sich in einander umzuwandeln vermögen. Dadurch war einerseits das scheinbar unregelmässige Verhalten derselben erklärt, andererseits aber auch gezeigt, woher verschiedene Beobachter zu verschiedenen Resultaten für die Ausdehnung dieser Legirungen gekommen sind. Bestimmungen der Abkühlungsgeschwindigkeiten bestätigten diese Ergebnisse. — Die obigen Legirungen hat neuerdings Mazzotto<sup>2)</sup> noch einmal in gleicher Richtung eingehend studirt und denselben Gang der Erscheinungen wiedergefunden.

Schon bei meinen ersten Untersuchungen erschien mir

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 3. p. 327. 1878.

2) Mazzotto, Atti R. Acc. della Sc. Torino 17. December 1881.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVII.

die Methode der Beobachtung von Volumenänderungen zum Studium der Molecularumlagerungen als sehr geeignet.

Setzt man nämlich an ein Dilatometer, in welchem sich die zu untersuchende Substanz befindet, engere und engere Capillarröhren an, so lassen sich beliebig kleine Volumenänderungen erkennen und auch der zeitliche Verlauf derselben weit besser verfolgen als bei thermischen Messungen. Bestimmt man nämlich z. B. die specifischen Wärmen zwischen Null Grad und Temperaturen oberhalb und unterhalb der Temperatur, bei welcher die Umwandlung statt hat, so kann man wohl ersehen, ob eine moleculare Umlagerung eintritt, und ein wie grosser Wärmeeffect ihr entspricht. Durch derartige Messungen kann man aber einmal nicht ermitteln, wie schnell der Umwandlungsprocess abläuft und dann auch nicht, ob er von secundären Umständen begleitet ist.

Ich habe das Princip der dilatometrischen Methode zum Studium der Volumenänderungen einer Reihe von festen Salzen verwendet und habe dazu dem Apparat die folgende Gestalt gegeben. Dieselbe schliesst sich zum Theil der von Pettersson<sup>1)</sup> mitgetheilten an, doch unterscheidet sich die Art der Benutzung wesentlich von der von letzterem angegebenen.

*a* Fig. 1 ist ein cylindrisches, 16 mm weites Gefäss, an das sich bei *b* eine etwa 8 mm weite Röhre ansetzt, während die Röhren *c, d* sowie ihre Fortsetzungen bis zu den Hähnen *h f k* Capillarröhren sind. Bei *i* befindet sich der eine Theil eines Schlifses, der sich über den anderen mit der Luftpumpe verbundenen Theil desselben schiebt, *l* ist ein anderer Schliff, in welchen sich das zur Messung dienende Capillarrohr *m* einsetzt. *g* ist ein Trichter.

Zunächst führt man durch die Oeffnung *b* des Theiles *dceab* einen kleinen Wattenbausch ein und befestigt ihn auf den Boden von *a* mit einer Spur Klebwachs. Derselbe verhindert, dass Körnchen der einzufüllenden Substanz in das Capillarrohr *e* gelangen. Dann wägt man *dceab*, hierauf füllt man das Gefäss *a* mit dem zu untersuchenden, vorher gepul-

1) Pettersson, Nova Acta Reg. Soc. Upsala (3) 1879. 44pp. Beibl. 4. p. 67. 1880.



verten Körper, zieht die Röhre *b* ab und wägt das Gefäss mit der abgezogenen Spitze, um das Gewicht des eingeführten Körpers zu erhalten. Darauf schmilzt man bei *d* diesen Theil des Apparates mit dem übrigen zusammen und verbindet bei geschlossenen Hähnen *h* und *k* bei *i* mit der Luftpumpe und evacuirt möglichst weit. Bei wasserfreien Salzen und sich im Vacuum nicht zersetzenden Körpern kann man hierbei bis zu den mit der Quecksilberpumpe erreichbaren Grenzen gehen; bei den wasserhaltigen Salzen kann man aber wegen der Tension des Wasserdampfes nicht ganz so weit auspumpen, um so weniger, als man diese Substanzen nicht zu lange im Vacuum lassen darf, damit sich nicht ein zu grosser Bruchtheil derselben in wasserfreies Salz verwandelt. Nach dem Auspumpen schliesst man den Hahn *f*, giesst in *g* Quecksilber, öffnet *h* und lässt das Quecksilber einströmen, welches alle Fugen zwischen dem Salze, sowie das ganze Gefäss *dceab* erfüllt.

In einer Reihe von Fällen wurde dem Apparate die Fig. 2 dargestellte Form gegeben, so z. B. wenn man als Flüssigkeit statt des Quecksilbers Oel verwendete. Das Oel wurde stets vor dem Einfüllen in einem Wasserbade auf 100° erhitzt, und gleichzeitig evacuirt, um aus demselben die absorbirte Luft möglichst vollkommen zu entfernen.

Bei den Salzen wurden einige Controlversuche mit Oel angestellt, um zu constatiren, dass nicht etwa die, beim Erwärmen in vielen Fällen beobachteten Volumenverminderungen daher rührten, dass das Quecksilber bei gewöhnlicher Temperatur nicht alle Fugen des Krystallpulvers erfüllte, sondern erst bei höherer Temperatur in dieselben eindrange, indem es die Krystalle nicht benetzt, wie dies beim Oel der Fall ist. Da die Controlversuche mit Oel die mit Quecksilber erhaltenen Resultate bestätigten, so sind nur letztere mitgetheilt.

Nach der Füllung des Apparats mit Quecksilber oder Oel befestigte man denselben in einem grossen mit Wasser gefüllten, über einer Gasflamme stehenden Becherglas so, dass die Röhre *d* gerade über den Rand desselben fortging, der Raum *a* und *b* aber vollkommen von Wasser umgeben war. Hierauf setzte man die Capillarröhre *m*, an der die Volumenänderungen beobachtet werden sollten, mit-

telst des an sie angeschmolzenen Schiffstückes in das andere Stück desselben bei *l* ein. Unter die Capillarröhre brachte man eine auf eine Leiste aufgeklebte Millimeterscala. In dem Wasser des Becherglases bewegte sich ein durch einen kleinen Wassermotor getriebener Rührer auf und nieder. Ein in Fünftelgrade getheiltes Thermometer gestattete, die Temperaturen abzulesen, welche bei den Versuchen durch Regulirung der Flamme constant erhalten wurden.

Die Messungen selbst geschahen in der bei solchen Versuchen gebräuchlichen Art. Bei jeder Temperatur wurde längere Zeit gewartet, um zu constatiren, ob nicht langsame Volumenänderungen bei derselben eintreten.

Dieselbe Methode lässt sich mit ganz geringen Modificationen auch zum Studium der Ausdehnung von Flüssigkeiten verwenden. Dazu gibt man dem Apparat die Fig. 3 gezeichnete Form, wo das Rohr *b* eine recht enge Capillare ist. Man füllt zunächst bei geschlossenem Hahne *q* das ganze Dilatometer mit Quecksilber in der oben beschriebenen Weise, in den Trichter *t* giesst man die zu untersuchende Flüssigkeit, die vorher von Luft befreit ist, und saugt dann durch Pumpen bei *i* nach Oeffnung des Hahnes *f* einen Theil des Quecksilbers aus dem Dilatometer, an Stelle dessen die Flüssigkeit tritt. Dieses Verfahren ist praktischer, als die Flüssigkeit im Dilatometer auszukochen, wie es Pettersson thut, da sich hierbei bei Lösungen die Concentration ändert, und es schwieriger ist, die zur Ermittelung des Salzgehaltes nöthige Menge zu erhalten. Ueberhaupt ist die Methode von Pettersson nur für niedrig siedende Substanzen verwendbar.

Wählt man die Capillarröhre *b* hinlänglich eng, so kann sie auch beträchtlich aus dem Erwärmungsbade hervorragen, ohne dass doch wesentliche Correctionen erforderlich würden. Dann ist der Hahn *q* bei der Erwärmung nicht gefährdet. Die Gesamtmenge der eingefüllten Flüssigkeit bestimmt sich aus einer Wägung. Einige Versuche mit diesem Apparate ergaben recht befriedigende Resultate.

Bei den wasserhaltigen Salzen war der Gang der Erscheinungen, abgesehen von den gewöhnlichen Ausdehnungs-

phänomenen, der folgende. Meist trat zunächst ein Wasserverlust ein, der sich in einer Trübung und einem Fleckigwerden der ursprünglich ganz blank erscheinenden Wand bemerklich machte. Hieran schloss sich häufig eine Vereinigung des zwischen dem Salze vertheilten Wassers. Ein Theil des Salzes löste sich ferner in demselben, und die Lösung erfüllte den obersten Theil von *a* und *b*. Dabei zeigte sich in einer Reihe von Fällen eine Abscheidung von neuen Salzen. Dieselben wurden auf folgende Weise für sich dargestellt.

Ein dem Gefäss *baecd* ganz ähnliches, bei dem nur die Röhre *ecd* nicht capillar war, wurde in seinem Theile *a* mit dem betreffenden Salze gefüllt und an ein dem anderen Theil der Figur 1 ganz analoges Glasröhrensystem angeschmolzen, welches aber einen grösseren Querschnitt hatte. Man füllte dasselbe in der früher besprochenen Weise bis an das obere Ende von *c* mit Quecksilber und schnitt es dort ab. Das Ganze erhitze man darauf bis zur gewünschten Temperatur und erhielt es bei derselben, bis sich das betreffende Salz gebildet hatte. Jetzt brach man die Spitze von *b* ab; das Quecksilber trieb die Flüssigkeit, bestehend in einer Salzlösung, heraus, und konnte letztere durch Nachfüllen von Quecksilber in *b* noch vollkommener entfernt werden. Hierauf zerschlug man das Rohr *a* und analysirte die zurückbleibende feste Substanz.

Die Analysen der gebildeten und in der oben angegebenen Weise gewonnenen Salze wurden in folgender Weise ausgeführt. Man wog einen Theil des mit Quecksilber durchsetzten Salzes ab, löste ihn, goss die Lösung ab und befreite das übrig bleibende Quecksilber erst von der anhaftenden Salzlösung durch Abspülen mit Wasser, wusch dann das Quecksilber mit Alkohol und Aether, trocknete und wog es. So erhielt man das Gewicht des Salzes und der Lösung, die nach den gewöhnlichen Methoden weiter analysirt wurde. Der Gehalt der Sulfate an Schwefelsäure wurde dabei durch Füllen mit Chlorbarium ermittelt.

Diese Versuchsmethode eröffnet auch chemisch interessante Perspektiven, weil bei ihr stets ein Salz von constantem Wassergehalt erhitzt wird, und stets in Berührung

mit dem sich aus ihm abscheidenden Wasser bleibt. Sie hat auch grosse Vorzüge vor derjenigen, bei welcher man das Salz einfach in einem Reagirglas erhitzt. Bei ihr ist an der Trübung der Wand die beginnende Wasserabscheidung zu erkennen und an den sich bildenden Krystallen das Auftreten neuer Verbindungen, was alles bei der letzteren Methode nicht der Fall ist, da bei ihr die zwischen den einzelnen Salztheilchen vorhandene Luft eine Vereinigung derselben verhindert, ehe nicht die Gesamtmasse flüssig geworden ist.

Da die Versuche der Natur der Sache nach wesentlich nur qualitativ-quantitative Resultate ergeben konnten, so ist auf die Messung der Dimensionen der Gefässe, der Röhren, auf das Gewicht des angewandten Salzes etc. kein besonderes Gewicht gelegt worden. In einzelnen Fällen wurde auf dieselben sogar ganz verzichtet. Im allgemeinen gelangten etwa 10 g Substanz zur Verwendung. Das Gewicht des neben derselben im Dilatometer enthaltenen Quecksilbers betrug etwa 70 g. Benutzt wurden drei Capillarröhren 1, 2 und 3 mit den Radien 0,73, 0,46 und 0,40 mm. Der Verschiebung der Quecksilbersäule in den Capillarröhren um 1 mm entsprachen dann Volumenänderungen um 1,673; 0,6640 und 0,478 cmm.

In den Tabellen sind unter  $z$  die Zeiten, zu denen die Beobachtungen angestellt wurden, verzeichnet, unter  $\tau$  die Temperaturen, und unter  $v$  der Stand des Quecksilbers im Capillarrohr bei denselben. Die Zeiten  $z$  sind nur dann mitgetheilt, wenn bei derselben Temperatur  $\tau$  während grösserer Zeitintervalle der Quecksilberfaden keinen constanten Stand annahm. Bei der Besprechung der bei den einzelnen Salzen gewonnenen Resultate ist stets zunächst der allgemeine Gang der Erscheinungen angegeben, und dann dieser Gang durch einige numerische Beispiele belegt.

In den für einige Beobachtungen mitgetheilten Curven Fig. 4 und 5 bezeichnen die Abscissen die Temperaturen, die Ordinaten in beliebigem Maassstabe den Stand des Quecksilbers im Capillarrohr; sie sollen nur ein Bild vom Gang der Phänomene geben. Die Richtung der Pfeile gibt an, in welchem Sinne die Temperaturänderung erfolgt.

## Alaune.

1. Kaliumaluminiumalaun. — Bei dem Kaliumaluminiumalaun tritt zunächst bis etwa  $50^{\circ}$  C. eine regelmässige Ausdehnung ein, auf welche dann eine bei einigen Versuchen schneller, bei anderen langsamer verlaufende Contraction folgt, die sehr beträchtliche Werthe annehmen kann. Sie ist von einer Trübung der Wand, die einer Zersetzung des Salzes entspricht, begleitet. In den meisten Fällen verlief sie bei höheren Temperaturen schneller als bei niedrigeren, bei feingepulverten Substanzen schneller als bei grobkörnigen, und liess sich auch constatiren, wenn das Quecksilber durch Oel ersetzt wurde. Bei weiterem Erhitzen schmolz der Alaun bei ca.  $90^{\circ}$  unter starker Ausdehnung.

Beim Abkühlen bleibt der Alaun, indem er sich zusammenzieht, im überschmolzenen Zustande flüssig, dann erstarrt er plötzlich unter starker Contraction. Die sich ausscheidenden Krystalle sind theils spießförmig, theils Würfel. Letztere entsprechen wohl dem gewöhnlichen Alaun, erstere sind noch weiter zu untersuchen.

In einzelnen Fällen tritt gleich nach dem Erstarren, in anderen erst bei einer weiteren Abkühlung ein Zerspringen des Gefässes ein, offenbar bedingt durch eine Ausdehnung des erstarrten Körpers, dessen Volumen auch kleiner ist als das des ursprünglich zur Verwendung gelangten Alaunes. In einem einzigen Falle (Versuch 1) trat kein Springen ein, hier liess sich bei  $25^{\circ}$  bei längerem Verweilen bei dieser Temperatur direct eine Ausdehnung beobachten.

Die Erscheinungen der Contraction rühren daher, dass zunächst beim allmählichen ersten Erwärmen der Alaun sich im festen Zustande wie in den Lösungen dissociirt. Die Ausdehnung bei der Abkühlung nach dem Erstarren würde dann dadurch bedingt sein, dass das unter Volumenverringern stattgehabte Zerfallen des Alaunes rückgängig wird, wodurch eine Volumenvermehrung bedingt ist, in Folge deren die Gefässe zersprengt werden. Diese Rückbildung ist aber nie vollkommen, da das Anfangsvolumen nicht wieder erreicht wird.

## Versuch 1.

$t$	$v$	$t$	$v$	$t$	$v$
22,2	175	71,8	131	91,2	360
50,2	187	78,8	135	79,0	324
50,2	183	77,0	132	68,4	297
50,0	182	84,2	140	62,4	104
50,8	180	84,0	135	51,4	96
60,4	170	87,2	140	38,2	83
64,2	144	88,8	141	25,0	75
68,4	142	89,0	126	25,0 <sup>1)</sup>	88
66,2	133	99,0	387		

Bei dem folgenden Versuch wurde der Alaun nicht bis zum Schmelzen erhitzt und daher ergaben sich folgende Resultate:

Capillarrohr 3, Gewicht des Alauns 8,42 g.

$z$	$v$	$t$	$z$	$v$	$t$	$z$	$v$	$t$
—	20,4	175	2h 35 m	57,8	152	4h 26 m	75,3	169
—	40,8	214	2 32	58	150	4 34	81,2	185
—	48,4	215,0	2 58	62	160	5	81	181,5
10h 48 m	51,3	215	3 22	61	154,8	—	53,4	107
11 —	54,6	212	3 30	72	185	—	81,6	89
11 6	55,8	210	3 37	72	183	—	33,4	67
12 10	56,8	170	4 1	72,2	171	—	20,2	33
12 30	57,1	175,5						

Diese Messung zeigt bei den Temperaturen oberhalb 51,3° so recht, wie langsam das Zerfallen des Alauns eintritt und wie leicht sie sich daher auch der Beobachtung entziehen kann. Dasselbe ist erst nach mehreren Stunden vollendet.

Um ein Urtheil über die Grösse der Volumenänderung zu gewinnen, vergleichen wir die Volumina vor und nach dem Erhitzen bei 20°. Das Volumen hat sich um eine Grösse von 142 Theilstreichen oder  $142 \cdot 0,0478 = 67,87$  cmm oder 0,068 ccm verringert.

Das specifische Gewicht des Kaliumaluminiumalaunes ist aber etwa 1,75, sodass obige 8,42 g 4,81 ccm einnehmen, sie erfahren also eine Contraction um etwa 1,42%.

In Fig. 4 ist für die Versuchsreihe 1 der Gang der Erscheinung graphisch wiedergegeben.

1) 30 Minuten nach der ersten Beobachtung.

2. Eisenammoniumalaun. — Bei dem Eisenalaun tritt entweder gleich nach dem Einfüllen eine Contraction, die mit einer Dissociation verbunden ist, ein, oder erst beim allmählichen Erwärmen. Bei ca.  $34^{\circ}$  schmilzt das Salz unter starker Ausdehnung zu einer braunen Flüssigkeit, aus der sich nach einem weiteren Erhitzen und darauf folgender Abkühlung einzelne Krystalle ausscheiden, die aber nicht wieder vollkommen erstarrt.

Die braune Farbe des geschmolzenen Alauns zeigt, dass sich das Eisenoxyd in ihm im colloiden Zustande befindet.

Auch hier ist die mehr oder weniger grosse Zerkleinerung des Materials von grossem Einfluss auf den zeitlichen Verlauf der Phänomene.

Bei einem Versuche wurden 11,7 g Alaun gepulvert in den Apparat eingefüllt, und zeigte bei  $19^{\circ}$  das Quecksilber im Capillarrohr einen Stand 175. Nach etwa 16 Stunden war es bis 148 bei derselben Temperatur gesunken. Den weiteren Gang geben die folgenden Zahlen.

Capillarrohr 2.

$t$	$v$	$t$	$v$	$t$	$v$
$19^{\circ}$	148	$61,6^{\circ}$	460,5	$87,4^{\circ}$	537
25	152,1	71,8	488	74,9	503
30,4	154,5	80,6	514	58,4	460
34	156	91,4	546	40,2	413
39,6	391	99,4	576	20	365
51,4	433				

Bei  $30^{\circ}$  ist der Stand unmittelbar, nachdem diese Temperatur erreicht war, 156 und sinkt dann bis 154,5.

3. Ammoniumaluminiumalaun. — Ammoniumaluminiumalaun dehnt sich von  $20,6^{\circ}$  an bis  $73^{\circ}$  aus, ohne dass etwas Bemerkenswerthes einträte, bei  $73^{\circ}$  trübt er sich indess, jedoch ohne dass eine Contraction stattfände; bei ca.  $92^{\circ}$  schmilzt er. Beim Abkühlen erstarrt er bei  $62^{\circ}$  wieder und nimmt bei  $22^{\circ}$  wieder nahezu, wenn auch nicht ganz, dasselbe Volumen wie vor dem Erwärmen ein.



$t$	$v$	$t$	$v$	$t$	$v$
20,6	90	84,4	142	89,2	315
31,6	95,5	88,4	152	64,2	152
43,6	103	99,2	468	47,2	114
56,6	112	89,6	400	31	100
73,0	125	81,4	452,5	22	76

4. Kaliumchromalaun. — Kaliumchromalaun verhält sich ganz analog wie Ammoniumaluminiumalaun. Er trübt sich bei ca.  $75^{\circ}$  ohne Contraction, schmilzt bei  $92^{\circ}$ , beim Abkühlen scheiden sich einige Krystalle bei  $68^{\circ}$  aus, während der grössere Theil auch bei gewöhnlicher Temperatur flüssig bleibt und die grüne Farbe zeigt.

$t$	$v$	$t$	$v$	$t$	$v$
17,0 <sup>o</sup>	58	81,0 <sup>o</sup>	120	68,2 <sup>o</sup>	323
25,6	63	87,2	392	55,6	311
40,6	74	88,8	402	34,6	265
58,6	86	98,0	433	28,0	242
75,2	96	78,4	372	25,0	234

Beim Erwärmen tritt demnach bei den Alaunen schon weit unterhalb des Schmelzpunktes bei ca.  $60^{\circ}$  eine chemische Veränderung auf, die sich durch eine Trübung der Gefässwand kenntlich macht und beim Ammoniumeisenalaun und beim Kaliumaluminiumalaun mit einer Contraction verbunden ist.

Beim weiteren Erhitzen schmelzen alle Alaune bei ca.  $90^{\circ}$  und verharren bei der Abkühlung in übersmolzenem Zustand, aus dem sie bei ca.  $60^{\circ}$  erstarren.

Die Resultate dieser Versuche müssen bei der Beurtheilung der neuerdings von Spring mitgetheilten Ergebnisse über die Ausdehnung der Alaune berücksichtigt werden.

Spring erhitzte seine Alaune, ehe er ihre Ausdehnung mit einem Dilatometer bestimmte, in demselben längere Zeit auf  $70^{\circ}$  und fand nur dann regelmässige Resultate.

Aus den obigen Zahlen folgt aber, dass bei dieser Temperatur die Alaune schon zum Theil eine Umlagerung erfahren haben, sodass Spring also die Alaune nach der Umlagerung untersuchte. Der von ihm ohne ein vorheriges Erhitzen beobachtete unregelmässige Gang der Ausdehnung erklärt sich eben

aus den Umlagerungen selbst, die bald schneller bald langsamer erfolgen, ja in einzelnen Fällen auch ganz ausbleiben.

#### Einfache Sulfate.

1. Magnesiumsulfat. Der allgemeine Gang der Erscheinung ist beim Magnesiumsulfat folgender: Zunächst findet bis etwa  $50^{\circ}$  eine regelmässige allmähliche Ausdehnung statt, bei  $50^{\circ}$  selbst wächst das Volumen plötzlich in hohem Grade, es wird Wasser abgegeben, was sich schon daran zeigt, dass an der Gefässwand dunkle Stellen auftreten. Von  $50^{\circ}$  an aufwärts beobachtet man wiederum bis ca.  $93^{\circ}$  eine regelmässige Volumenzunahme. Schon etwas unterhalb dieser Temperatur steigen aber grössere Flüssigkeitsmengen in den oberen Theil des Gefässes, bei  $93^{\circ}$  selbst tritt zunächst eine starke Contraction ein, der Quecksilberfaden geht zurück. An dieselbe schliesst sich dann bei constanter Temperatur eine Ausdehnung an, indem der Quecksilberfaden wieder vorrückt. Doch ist letztere bei weitem kleiner als die Contraction. Zugleich scheiden sich an der Wandung kleine Krystalle ab, und die ganze Masse theilt sich allmählich in solche Krystalle und in eine Flüssigkeit.

Beim Erwärmen bis  $100^{\circ}$  folgt dann eine regelmässige Ausdehnung.

Beim Wiederabkühlen contrahirt sich die Masse im ganzen regelmässig, bei langem Stehen bei gewöhnlicher Temperatur findet eine kleine Volumenzunahme statt, beim Wiedererhitzen tritt eine regelmässige Ausdehnung ein. Den Gang der Erscheinung bei wiederholtem Erwärmen und Abkühlen gibt die Fig. 5 wieder.

Die folgenden Messungen wurden besonders zu dem Zweck unternommen, die Volumenveränderungen bei  $50^{\circ}$  und  $92^{\circ}$  zu studiren.

Menge des Salzes 10,248 g. Capillarrohr 2.

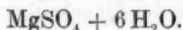
<i>s</i>	<i>t</i>	<i>v</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>v</i>
—	16,6	4	—	83,2	441
—	47,9	158	9h 25m	92	475
—	53,5	340	9 40	92	391
—	67,4	379			

Hierauf liess man die Masse abkühlen, wobei eine ganz allmähliche Contraction eintrat. Dann zeigte sie bei 19° einen Stand von 195, nach fünf Tagen einen solchen von 255, der ziemlich constant beibehalten wurde. Das Salz dehnte sich also wiederum aus.

Die Contraction entspricht 0,46.84 cmm, d. h. 38,64 cmm oder 0,038 ccm., die darauf folgende Ausdehnung beträgt 25.046 also 11,5 cmm oder 0,0115 ccm; das spec. Gewicht von  $\text{MgSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$  ist 1,68, das Volumen von 10,248 g gleich 6,1 ccm, die Contraction beträgt also 0,17 %.

Von den bei 93° sich bildenden Krystallen wurden zwei Analysen ausgeführt und fanden sich bei einer derselben in ihnen 34,9 %, bei einer anderen 35,86 %  $\text{SO}_3$ . Ein Salz mit  $7\text{H}_2\text{O}$  würde 32,52, ein solches mit  $6\text{H}_2\text{O}$  35,08, ein solches mit  $5\text{H}_2\text{O}$  38,09 %  $\text{SO}_3$  enthalten.

Das sich ausscheidende Salz besteht daher aus:



Nach den Versuchen von Marignac und anderen enthält das bei 50° unter Wasserverlust sich bildende Salz 6 Molecüle Wasser. Aus den obigen Analysen geht aber hervor, dass auch ein bei 93° krystallisirendes Salz existirt, das 6 Molecüle Wasser enthält. Die Volumenbestimmungen zeigen, dass diese beiden Salze eine wesentlich verschiedene Dichte besitzen. Es existiren daher zwei Modificationen des Salzes  $\text{MgSO}_4 + 6\text{H}_2\text{O}$ .

2. Zinksulfat. Beim Zinksulfat verlaufen die Phänomene ganz ähnlich wie bei dem Magnesiumsulfat. Von 18° an bis etwa 40° war die Ausdehnung eine stetige, regelmässige, bei 40° fand eine starke Volumenvergrösserung statt, sowie Trübung des Salzes unter Wasserabscheidung, der bei 69° eine regelmässige Ausdehnung folgte. Bei dieser Temperatur trat eine starke Contraction ein, an die sich indess nicht wie beim Magnesiumsulfat eine Ausdehnung anschloss. Auch hier zeigte sich eine Klärung der Substanz, indem sich wie bei dem Magnesiumsulfat die Flüssigkeit in den oberen Theil des Gefässes begab, und sich Krystalle abschieden. Beim weiteren Erwärmen bis 100° verwandelten sich dieselben unter starker

Ausdehnung in ein weisses Pulver. Beim Abkühlen ist der Gang ganz ähnlich wie beim Magnesiumsulfat. Ein Beispiel geben die folgenden Zahlen:

Capillarrohr 2. Gewicht 11,21 g.

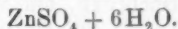
Versuch 1.				Versuch 2.	
$r$	$v$	$r$	$v$	$r$	$v$
15,4	342	62,4	666	69,2	172
31,4	394	69,3	730	69,6	150
38,4	417	69,4	680	80	220
43,2	550	80	811		

Die Contraction betrug 22 mm entsprechend 22.0,66 = 144,32 cmm. Da das spec. Gewicht von  $\text{ZnSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$  1,95 ist, so entsprechen die 11,21 g 5,75 ccm. Die Contraction beträgt daher 0,25 %.

Die bei 69° sich bildenden Krystalle wurden analysirt, und fanden sich bei einer Analyse in denselben 29,704 %, bei einer anderen 29,73 %  $\text{SO}_3$ .

Ein Salz mit 7  $\text{H}_2\text{O}$  würde 27,52 %, eines mit 6  $\text{H}_2\text{O}$  29,74 %  $\text{SO}_3$  enthalten.

Das sich ausscheidende Salz besteht daher aus:



Da aber frühere Untersuchungen gezeigt hatten, dass bei 40° unter Wasserverlust ein Salz mit 6  $\text{H}_2\text{O}$  entsteht, welches nach den Ausdehnungsversuchen ein wesentlich anderes Volumen als das bei 69° sich bildende hat, so haben wir es wiederum mit zwei Modificationen des obigen Salzes zu thun.

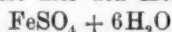
Ueber das weisse Pulver, das sich bei höheren Temperaturen bildet, sowie über einige eigenthümliche beim Abkühlen sich ausscheidende Krystalle soll später berichtet werden.

3. Eisensulfat. Das Eisensulfat dehnt sich bis etwa 65° regelmässig aus und schmilzt zum Theil bei dieser Temperatur; daran schliesst sich eine neue Ausdehnung. Schon bei niedrigerer Temperatur, besonders aber bei der höchsten erreichten von 98,5° zersetzt sich das Salz und scheidet ein niedriges Hydrat aus, was sich durch eine starke Ausdehnung bemerklich macht. Es wurde bei 98,5° nicht abgewartet, bis diese Umlagerung vollendet war. Bei der Ab-

kühlung tritt unter der Ausscheidung von Krystallen auch noch eine Rückbildung des entwässerten Salzes ein.

$r$	$v$	$r$	$v$
21,6	138	77	725
34	169	57	624
46	202,5	43	515
56,8	236	36,8	471
65,2	549	24,0	380
89,1	668	20,6	289
98,5	739		
98,5 <sup>1)</sup>	823		

Der bei 65° nicht flüssig werdende Theil wurde analysirt und lieferte 31,14%  $\text{SO}_3$ , ein Hydrat mit 7  $\text{H}_2\text{O}$  wurde 28,77, eines mit 6  $\text{H}_2\text{O}$  30,16, eines mit 5  $\text{H}_2\text{O}$  33,05  $\text{SO}_3$  enthalten. Wir haben also hier den Körper:



vor uns.

Das Zersetzungsproduct bei hohen Temperaturen enthielt weniger Wasser.

4. Nickelsulfat. Nickelsulfat dehnt sich von 20° an bis etwa 65° aus, verliert bei 65° Wasser und erfährt dabei eine grosse Volumenvermehrung, um sich dann regelmässig weiter bis 95° auszudehnen. Die Contraction ist dann beim Abkühlen eine regelmässige bis etwa 30°. Bei dieser Temperatur wird das Wasser wieder aufgenommen, und das schwefelsaure Nickeloxydul kehrt in seinen ursprünglichen Zustand zurück.

Capillarrohr 3. Gewicht der Substanz 12,183.

$r$	$v$	$r$	$v$
20,4	172	85	648
31,8	201	95	729
42,8	235,5	67	560
54,0	275	55,4	508
65,8	420	42,8	457
65,7 <sup>1)</sup>	543	31,0	410
76	594,5	18	152

6. Natriumsulfat.  $\text{Na}_2\text{SO}_4 + 10\text{H}_2\text{O}$ . Das Natriumsulfat dehnt sich beim Erwärmen zunächst aus und zieht sich

1) nach längerer Zeit.

dann zusammen, bis es schmilzt, um sich dann wieder auszu-  
dehnen. Ein Beispiel geben die folgenden Zahlen:

t	v	t	v	t	v	t	v
17,4	122	28	133	32,2	132	51	202
23,0	134	30,2	136,5	32	120	60,2	247
26,8	139	30	133,5	33,8	93	75,6	329
27	137	29,4	131,5	33,6	90	85	390
27,4	140	30,4	131	34,8	90	96,4	455
					(schmilzt)		

Eine andere Reihe ergab ganz analoge Resultate; hier wurden aber Beobachtungen unmittelbar vor und nach dem Schmelzen ausgeführt, und zeigte sich, dass in beiden Fällen das Salz etwa ein gleiches Volumen besitzt.

Die Volumenverringerung des Natriumsulfats beim Erwärmen erklärt sich daraus, dass das in ihm mit dem Molecularvolumen des Eises enthaltene Krystallwasser allmählich das kleinere Molecularvolumen des Wassers annimmt. Die beim Schmelzen selbst eintretende, durch den Uebergang aus dem Eis in flüssiges Wasser bedingte Volumenabnahme wird durch die Volumenzunahme des schmelzenden Salzes gerade compensirt.

#### Andere Salze.

Natriumcarbonat  $\text{Na}_2\text{CO}_3 + 10\text{H}_2\text{O}$ . Dasselbe verhält sich ganz analog dem Sulfat.

Natriumphosphat und -acetat. Diese beiden Salze verhielten sich ganz normal, sie dehnten sich beim Erwärmen zunächst regelmässig aus, um dann bei einer bestimmten Temperatur unter starker Volumenvergrößerung zu schmelzen und sich dann weiter regelmässig, aber etwas schneller als vor dem Schmelzen auszudehnen. Beim Abkühlen verbleiben sie leicht im überschmolzenen Zustand. Dies stimmt mit dem Ergebniss von Marpmann<sup>1)</sup>, nach dem bei Luftabschluss in evacuirtten Räumen geschmolzene Körper nur schwierig in den festen Zustand übergehen.

#### Resultate.

Die obigen Untersuchungen zeigen, dass eine Reihe von Salzen schon vor dem Schmelzen sich umlagert. Durch dieselben haben wir ferner für das Zinksulfat und Magnesiumsulfat zwei

1) G. Marpmann, Arch. f. Pharm. 219. p. 314. 1882. Beibl. 6. p. 569.

neue Modificationen kennen gelernt und ist die mit der Bildung derselben verbundene Volumenänderung festgestellt worden.

Die bei den obigen Salzen erhaltenen Resultate haben indess ausser für sich allein auch noch bei der Anstellung von anderen Untersuchungen ein Interesse.

1. Bei Bestimmungen der Spannkraft muss man sich durch solche Vorversuche stets erst überzeugen, ob das untersuchte Salz innerhalb des betrachteten Temperaturbereiches unverändert bleibt oder nicht. Ist letzteres nicht der Fall, so ergeben die Messungen höchst complicirte Resultate. Die Spannkraft entspricht z. B. beim Magnesiumsulfat unter  $50^{\circ}$  derjenigen von Krystallen mit  $7\text{H}_2\text{O}$ , oberhalb derselben aber einer Lösung des Sulfats in dem ausgeschiedenen Wasser. Bei weiterer Temperaturerhöhung bildet sich nun noch die zweite Modification des sechsfach gewässerten Salzes, und es ist möglich, dass dadurch neue Complicationen eintreten.

2. Bei Untersuchungen über die Lösungswärme etc. der durch Erhitzen theilweise entwässerten Salze muss man genau bestimmen, in welcher Form Wasser und Salzanhydrid miteinander verbunden sind. Denn selbst bei gleichem procentischen Wassergehalt kann der untersuchte Körper, wie beim Magnesiumsulfat aus mehreren, wesentlich voneinander verschiedenen Salzen bestehen.

Jedenfalls verdienen die obigen Verhältnisse sowohl aus physikalischen als auch chemischen Gründen einer näheren Untersuchung, und ich hoffe, hierüber baldigst weiteres mittheilen zu können.

#### Zusatz.

Einige vorläufige mit dem Dilatometer angestellte Versuche über die Ausdehnung des Zinns beim Schmelzen, denen sich weitere über andere Metalle anschliessen sollen, scheinen in Uebereinstimmung mit den Resultaten von Roberts und abweichend von denen von Winkelmann und Niess zu ergeben, dass das flüssige Zinn bei der Schmelztemperatur ein grösseres Volumen besitzt als das feste bei derselben Temperatur.

Leipzig, August 1882.



II. Ueber die Molecularrefraction der geschwefelten Kohlensäureäthter, nebst einigen Bemerkungen über Molecularrefractionen im Allgemeinen; von Eilhard Wiedemann.

Vor einer Reihe von Jahren<sup>1)</sup> habe ich die Brechungsexponenten des Kohlensäureäthers und seiner geschwefelten Substitutionsproducte für die Lithium-, Natrium- und Thalliumlinie bei 18,2° bestimmt. Die Dichten  $d$  waren für nahezu dieselbe Temperatur, 19°, von Salomon ermittelt worden. Die folgende Tabelle enthält die gefundenen Resultate.

		$d$	$n$		
			Li	Na	Tl
I	CO $\begin{smallmatrix} \text{OC}_2\text{H}_5 \\ \text{OC}_2\text{H}_5 \end{smallmatrix}$	0,975	1,3837	1,3858	1,3876
II	CO $\begin{smallmatrix} \text{OC}_2\text{H}_5 \\ \text{SC}_2\text{H}_5 \end{smallmatrix}$	1,0285	1,4479	1,4515	1,454
III	CO $\begin{smallmatrix} \text{SC}_2\text{H}_5 \\ \text{SC}_2\text{H}_5 \end{smallmatrix}$	1,085	1,5168	1,5237	1,5287
IV	CS $\begin{smallmatrix} \text{OC}_2\text{H}_5 \\ \text{OC}_2\text{H}_5 \end{smallmatrix}$	1,0325 ?	1,4563	1,4601	1,4632
V	CS $\begin{smallmatrix} \text{OC}_2\text{H}_5 \\ \text{SC}_2\text{H}_5 \end{smallmatrix}$	1,085	1,5304	1,5370	1,5431
VI	CS $\begin{smallmatrix} \text{SC}_2\text{H}_5 \\ \text{SC}_2\text{H}_5 \end{smallmatrix}$	1,152	1,6105	1,6210	—

Aus diesen Zahlen ergab sich ohne weiteres:

1. In allen Fällen steigt der Brechungsexponent, wenn an Stelle eines Atomes Sauerstoff ein Atom Schwefel tritt, und zwar um so mehr, je mehr Schwefel bereits in der Verbindung enthalten ist.

2. Dem entsprechend sind die Brechungsexponenten der Verbindungen, die CS als Radical enthalten, grösser, als die der analogen, CO als Radical enthaltenden Verbindungen.

3. Ebenso wächst der Brechungsexponent, wenn ausser dem Radical an Stelle des Sauerstoffes erst ein, und dann

1) E. Wiedemann, Journ. f. prakt. Chem. 6. p. 453. 1872.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVII.

noch ein zweites Atom Schwefel tritt, im letzten Falle mehr als im ersten.

4. Die isomeren Körper II und IV sowie III und V haben ganz verschiedene Brechungsexponenten, und zwar hat in beiden Fällen diejenige Verbindung den grösseren, welche den Schwefel im Radical enthält. Es zeigt dies, dass die Stellung des Schwefelatoms in einer ganz bestimmten Weise den Werth des Brechungsexponenten beeinflusst.

Da wir es hier mit Verbindungen mit einfach und zweifach an Kohlenstoff gebundenen Schwefel zu thun haben, so schien es mir nicht uninteressant, aus obigen Werthen die Atomrefractionen derselben zu berechnen.

Die folgende Tabelle enthält die aus den beobachteten Grössen ermittelten Constanten  $A$  und  $B$  in der Cauchy'schen Formel  $n = A + B/\lambda^2$ , wo  $n$  der Brechungsexponent,  $\lambda$  die Wellenlänge ist; ferner die Werthe  $(A-1)/d$  und  $(A^2-1)/(A^2+2) \cdot 1/d$ , wo  $d$  die Dichte ist, sowie die durch Multiplication mit dem Moleculargewicht  $M$  nach beiden Formeln berechneten Molecularrefractionen.

		$A$	$B \cdot 10^{10}$	$\frac{A-1}{d}$	$\left(\frac{A^2-1}{A^2+2}\right) \frac{1}{d}$	$M \frac{A-1}{d}$	$M \left(\frac{A^2-1}{A^2+2}\right) \frac{1}{d}$
I	CO $\text{OC}_2\text{H}_5$ $\text{OC}_2\text{H}_5$	1,3773	307	0,387	0,236	45,66	27,86
II	CO $\text{OC}_2\text{H}_5$ $\text{SC}_2\text{H}_5$	1,4367	512	0,425	0,256	56,95	34,11
III	CO $\text{SC}_2\text{H}_5$ $\text{SC}_2\text{H}_5$	1,5001	937	0,461	0,271	69,15	40,57
IV	CS $\text{OC}_2\text{H}_5$ $\text{OC}_2\text{H}_5$	1,4455	543	0,431	0,258	57,82	34,56
V	CS $\text{OC}_2\text{H}_5$ $\text{SC}_2\text{H}_5$	1,5083	1000	0,468	0,275	70,26	41,23
VI	CS $\text{SC}_2\text{H}_5$ $\text{SC}_2\text{H}_5$	1,5742	1596	0,498	0,286	82,73	47,56

Wir setzen nun zunächst die Atomrefractionen, wie sie sich aus den Werthen für  $(A-1)/d$  nach den früheren Untersuchungen ergeben für:

C'	H	O'	O''
4,86	1,29	2,71	3,29

wo die Indices ' und '' sich auf die einfache und doppelte Bindung an dasselbe Kohlenstoffatom beziehen.

Hieraus berechnet sich die Molecularrefraction von  $\text{CO OC}_2\text{H}_5$  zu 45,91, was mit dem gefundenen Werthe befriedigend übereinstimmt. Aus II und III berechnet sich durch Subtraction der bekannten Atomrefractionen diejenige von  $S'$  zu 13,67 und  $2S'$  zu 28,66, im Mittel ist also:

$$S' = 14,04.$$

Legt man diesen Werth zu Grunde, so liefert IV für  $S''$  15,20 V 16,31 und VI 17,45. Man erhält also sehr verschiedene Werthe, und zwar sind sie um so grösser, je grösser die Menge des vorhandenen Schwefels ist.

Betrachten wir dagegen die Grössen  $(A^2 - 1)/(A^2 + 2) \cdot 1/d$ , so ist, wenn wir mit Landolt setzen:

C'	H	O'	O''
2,43	1,02	1,56	2,29

für die Molecularrefraction von I 27,76, während der Versuch übereinstimmend 27,83 liefert. Für  $S'$  und  $2S'$  liefern II und III 7,90 und 15,93, im Mittel 7,94; mit Zugrundelegung dieses Werthes geben für  $S''$  IV 9,09, V 9,44 und 9,33.

Diese Werthe stimmen weit besser miteinander überein als die unter der Voraussetzung berechneten, dass  $(A - 1)/d$  die Molecularrefraction bestimme. Dies spricht dafür, dass die  $A^2$  enthaltende Formel stets zur Discussion zu benutzen ist.

Die Berechnungen nach beiden Formeln zeigen, dass, wie beim Sauerstoff und Kohlenstoff, so auch beim Schwefel eine grössere Atomrefraction dann eintritt, wenn die verschiedenen Affinitäten an dasselbe Kohlenstoffatom gebunden sind, als wenn sie zwischen verschiedenen Kohlenstoffatomen die Verbindungen herstellen.

Frühere Beobachter hatten für  $S'$  den Werth 16, und zwar für die Linie A, gefunden.

Sämmtliche Betrachtungen bei der Berechnung der Atomrefraction setzen voraus, dass die einzelnen Atome in das Molecül mit stets gleich beschaffenen Aetherhüllen eintreten, da nur dann die Molecularrefraction sich als Summe der einzelnen Atomrefractionen darstellen kann, wie sich aus der Theorie von Lorenz und Lorentz ergibt. Da die doppelten Bindungen aber die Atomrefractionen verändern, so folgt daraus, dass mit denselben wesentliche Veränderungen in den Aether-

hüllen der Atome vor sich gehen. Sie bestehen wahrscheinlich, da der Brechungsexponent wächst, in einer Aufnahme von freiem Aether in die um die Atome gelagerten Aetherhüllen oder aus einem äquivalenten Vorgang. Die Atome selbst werden dann auseinander gerückt und die Molecüle nehmen einen grösseren Raum ein, wie dies auch das grössere Molecularvolumen der sogenannten ungesättigten Verbindungen gegenüber dem der gesättigten bestätigt. Sind aber die Atome weiter auseinander gerückt, so müssen sie auch leichter chemischen Einwirkungen, der Aufnahme neuer Atome, wie z. B. bei der Bildung von Bichloräthylen aus Chlor und Aethylen etc., zugänglich sein, worauf auch Brühl aufmerksam gemacht hat. Dass nur zwei solcher verschiedener Bindungsformen, charakterisirt durch zwei ihnen eigenthümliche Atomrefractionen, existiren, würde sich darauf zurückführen lassen, dass der Aether in nur zwei stabilen Anordnungen um die Atome sich lagern kann.

Aus diesen Thatsachen lassen sich Anhaltspunkte für die Theorie der Affinitäten gewinnen. Jedenfalls wäre eine weitere Untersuchung von Schwefelverbindungen etc. in diesem Sinne von Interesse.

### III. Zur Dispersion farblos durchsichtiger Medien; von A. Wüllner.

1. Bei der Bearbeitung der Dispersion des Lichts für die neue Auflage meiner Experimentalphysik auf Grundlage der Theorie der Dispersion des Hrn. Helmholtz hat sich eine empirische Erklärung dafür ergeben, weshalb die scheinbar von derjenigen der neueren Dispersionstheorie so abweichende Cauchy'sche Dispersionsformel, welche nur fallende Potenzen der Wellenlängen enthält, die Dispersion farblos durchsichtiger Mittel durchaus hinreichend darstellt. Da Einzelne in neuerer Zeit die Cauchy'schen Formeln ganz verwerfen zu müssen glauben, so scheint mir diese Beziehung hinreichendes Interesse zu bieten, um auch hier mitgetheilt zu werden.

Hr. Helmholtz<sup>1)</sup> leitet aus der Bewegungsgleichung des Aethers:

$$(1) \quad \mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \beta^2 (x - \xi)$$

und derjenigen der mitschwingenden Atome:

$$(2) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = \beta^2 (\xi - x) - \alpha^2 x - \gamma^2 \frac{dx}{dt}$$

die Gleichungen ab:

$$(I) \quad \frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{n^2} = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} - \frac{\beta^4}{\alpha^2 n^2} \frac{mn^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(mn^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 n^2},$$

$$(II) \quad \frac{2k}{cn} = - \frac{\beta^4 \gamma^2}{\alpha^2 n} \frac{1}{(mn^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 n^2}.$$

Hierin ist  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit,  $k$  der Absorptionscoefficient des Lichtes in dem brechenden Medium und  $n = 2\pi/T$ , wenn  $T$  die Schwingungsdauer des eindringenden Lichtes ist. Die Bewegungsgleichung des Aethers im freien Raume erhalten wir, wenn wir in Gleichung (1)  $\beta = 0$  setzen, woraus folgt, dass:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{\mu}} = \zeta$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Raume ist.

Gleichung (I) und (II) können wir hiernach in folgender Weise umformen:

$$\frac{\mu}{c^2} - \frac{k^2 \zeta^2 T^2}{4\pi^2} - 1 = - \frac{\beta^2 \zeta^2 T^2}{\alpha^2 4\pi^2} - \frac{\beta^4 \zeta^2 T^2}{\alpha^2 4\pi^2 m} \left( \frac{4\pi^2}{T^2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{m} \right) + \frac{\gamma^4}{m^2} \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Nach Gleichung (2) können wir schreiben:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{m} = \frac{4\pi^2}{T_m^2},$$

wenn wir mit  $T_m$  die Schwingungsdauer der mitschwingenden Atome bezeichnen, im Falle dieselben sich ohne Reibung bewegten. Setzen wir weiter:

$$\zeta T = \lambda, \quad \zeta T_m = \lambda_m,$$

$$\frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2} = \alpha^2, \quad \frac{\gamma^4 \lambda_m^2}{4\pi^2 m} = \delta^2,$$

1) Helmholtz, Pogg. Ann. 154, p. 582. 1874.

so wird:

$$\frac{\zeta^2}{c^2} - \kappa^2 - 1 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2 4\pi^2} \lambda^2 - \frac{\beta^4 \lambda_m^2}{\alpha^2 (2\pi)^4 \frac{1}{2} m} \frac{\lambda^4 (\lambda_m^2 - \lambda^2)}{(\lambda_m^2 - \lambda^2)^2 + \delta^2 \lambda^2}$$

und

$$2 \frac{\zeta}{c} \kappa = -\frac{\beta^4 \lambda_m^2}{\alpha^2 (2\pi)^4 \frac{1}{2} m} \frac{\delta \lambda^5}{(\lambda_m^2 - \lambda^2)^2 + \delta^2 \lambda^2}.$$

Hierin ist  $\zeta/c = \nu$  der Brechungsexponent des Mediums, in welchem das Licht sich ausbreitet. Beachten wir, dass die Brechungsexponenten aller durchsichtigen Medien grösser als Eins sind, was nach den Gleichungen nur möglich ist, wenn  $\lambda_m < \lambda$ , und setzen schliesslich:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2 4\pi^2} = P, \quad \frac{\beta^4 \lambda_m^2}{\alpha^2 (2\pi)^4 \frac{1}{2} m} = Q,$$

so schreiben sich die Gleichungen (I) und (II):

$$(I_a) \quad \nu^2 - \kappa^2 - 1 = -P\lambda^2 + Q \frac{\lambda^4 (\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \delta^2 \lambda^2},$$

$$(II_a) \quad 2\nu\kappa = -Q \frac{\delta \lambda^5}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + \delta^2 \lambda^2}.$$

In diesen Ausdrücken sind  $P$ ,  $Q$ ,  $\lambda_m$ ,  $\delta$  Constante, welche nur von der Beschaffenheit des brechenden Mediums abhängig sind.

Die dargelegten Ausdrücke setzen voraus, dass das brechende Medium nur eine Art schwingender Atome besitzt. Sind mehrere Arten schwingender Atome in demselben vorhanden, so treten an die Stelle jedes Gliedes der rechten Seite beider Gleichungen so viel Glieder mit den betreffenden Constanten  $P$ ,  $Q$ ,  $\lambda_m$ ,  $\delta$ , als verschiedene Arten von Atomen vorhanden sind.

2. Für farblos durchsichtige Medien ist der Absorptionscoefficient  $\kappa = k(\lambda/2\pi)$  für alle sichtbaren Wellenlängen jedenfalls so klein, dass man  $\kappa^2$  und damit auch  $\delta^2$  gleich Null setzen darf; damit wird die Gleichung für die Brechungsexponenten solcher Medien, im Falle man in ihnen nur eine Art mitschwingender Atome annehmen darf:

$$\nu^2 - 1 = -P\lambda^2 + Q \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

eine Gleichung, welche drei von der Natur des brechenden Mediums abhängige Constanten enthält.

Zur Prüfung, inwieweit diese Gleichung die Dispersion darstellt, hat man demnach aus drei gemessenen Brechungsexponenten  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  für drei bekannte Wellenlängen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  die Constanten zu bestimmen.

Setzt man:

$$\frac{\nu_1^2 - 1}{\lambda_1^2} = r, \quad \frac{\nu_2^2 - 1}{\lambda_2^2} = s, \quad \frac{\nu_3^2 - 1}{\lambda_3^2} = t,$$

so erhält man leicht zur Bestimmung der Constanten folgende Gleichungen:

$$\lambda_m^2 = \frac{r\lambda_1^2(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) - s\lambda_2^2(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + t\lambda_3^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) - s(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + t(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)},$$

$$P = \frac{st\lambda_1^2(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) - rt\lambda_2^2(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + rs\lambda_3^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{r\lambda_1^2(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) - s\lambda_2^2(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) + t\lambda_3^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}.$$

Der Werth von  $Q$  bestimmt sich am bequemsten nach Berechnung von  $P$  und  $\lambda_m$  aus der ursprünglichen Gleichung.

Die Helmholtz'sche Gleichung in dieser Form stellt die Brechungsexponenten der farblos durchsichtigen Körper innerhalb der Genauigkeitsgrenzen, welche die berechneten Brechungsexponenten infolge der Unsicherheit in den Werthen der Wellenlängen und der unvermeidlichen Ungenauigkeiten in den gemessenen Brechungsexponenten haben, ganz vollständig dar. Ich habe sie unter anderen an Mascart's Messungen der Brechungsexponenten des Kalkspaths, des Flintglases von Rosette, Verdet's Messungen der Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffs, van der Willigen's Messungen derjenigen des Wassers geprüft.

Bei diesen Prüfungen und bei der Berechnung der Constanten noch für mehrere andere Substanzen stellte sich die interessante Beziehung heraus, dass die beiden Constanten  $P$  und  $Q$  stets einander sehr nahe gleich waren, wie folgende Zusammenstellung für acht Substanzen, deren Brechungsexponenten und Dispersion eine sehr verschiedene ist, zeigen mag. Die Einheit von  $\lambda$  sind die Zehntausendstelmillimeter.

1. Wasser bei 19,5° C.

$$\begin{array}{lll} \nu_D = 1,33048 & P = 0,865895 & \\ \nu_H = 1,34350 & Q = 0,865767 & Q - P = -128 \\ & \lambda_m^2 = 0,87979 & \end{array}$$



## 2. Alkohol bei 0° C.

$$\begin{aligned} \nu_C &= 1,368\ 48 & P &= 0,873\ 066 \\ \nu_G &= 1,378\ 16 & Q &= 0,873\ 068 & Q - P &= 2 \\ \lambda_m^2 &= 0,976\ 72. \end{aligned}$$

## 3. Glycerin bei 0° C.

$$\begin{aligned} \nu_C &= 1,463\ 65 & P &= 1,151\ 797 \\ \nu_G &= 1,475\ 73 & Q &= 1,151\ 771 & Q - P &= - 26 \\ \lambda_m^2 &= 0,970\ 38. \end{aligned}$$

## 4. Chlorzink concentrirt bei 0° C.

$$\begin{aligned} \nu_C &= 1,509\ 26 & P &= 0,898\ 332 \\ \nu_G &= 1,528\ 17 & Q &= 0,898\ 295 & Q - P &= - 37 \\ \lambda_m^2 &= 1,378\ 60. \end{aligned}$$

## 5. Schwefelkohlenstoff bei 24,8° C.

$$\begin{aligned} \nu_B &= 1,611\ 4 & P &= 0,423\ 802 \\ \nu_H &= 1,695\ 6 & Q &= 0,424\ 350 & Q - P &= 548 \\ \lambda_m^2 &= 3,434\ 92. \end{aligned}$$

## 6. Flintglas von Rosette.

$$\begin{aligned} \nu_B &= 1,612\ 68 & P &= 0,883\ 821 \\ \nu_H &= 1,652\ 68 & Q &= 0,883\ 911 & Q - P &= 91 \\ \lambda_m^2 &= 1,739\ 5. \end{aligned}$$

## 7. Kalkspath.

$$\begin{aligned} \nu_B &= 1,659\ 26 & P &= 1,329\ 018 \\ \nu_R &= 1,711\ 55 & Q &= 1,329\ 010 & Q - P &= - 8 \\ \lambda_m^2 &= 1,268\ 6. \end{aligned}$$

## 8. Flintglas von Merz.

$$\begin{aligned} \nu_C &= 1,745\ 544 & P &= 0,761\ 897 \\ \nu_G &= 1,791\ 600 & Q &= 0,762\ 374 & Q - P &= 477 \\ \lambda_m^2 &= 2,503\ 6. \end{aligned}$$

Für mehrere der angeführten Substanzen sind  $P$  und  $Q$  in der That so nahe gleich, dass man einfach  $P = Q$  setzen darf, wodurch die Helmholtz'sche Gleichung wird:

$$\nu^2 - 1 = Q\lambda^2 \left( \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2} - 1 \right) = Q \frac{\lambda_m^2}{1 - \left( \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^2},$$

eine Form, welche auch Hr. Lommel<sup>1)</sup> als Näherungsgleichung abgeleitet hat. Wie Hr. Lommel zeigt, wird die Reihe der Brechungsexponenten selbst für das Flintglas von Rosette bis auf 25 Einheiten der fünften Decimale dargestellt, ein Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung,

1) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 339. 1878.

der durch die Unsicherheit in den Werthen der Wellenlängen und der gemessenen Brechungsexponenten sehr wohl möglich ist. In einer späteren Mittheilung<sup>1)</sup> hat Hr. Lommel die zweiconstantige Formel an einer Anzahl Substanzen geprüft und die Brechungsexponenten des Schwefelkohlenstoffs bis auf neun Einheiten der vierten Decimale mit derselben darstellen können, trotzdem von den oben angeführten Substanzen der Schwefelkohlenstoff den grössten Unterschied zwischen  $P$  und  $Q$  zeigt.

3. Es lag die Vermuthung nahe, dass diese empirische Beziehung, die nahe Gleichheit der Werthe von  $P$  und  $Q$ , die farblos durchsichtigen Substanzen charakterisire, dass bei den gefärbten Substanzen, bei denen die Absorption also im sichtbaren Theile des Spectrums sich zeigt, die Formel drei oder selbst mehrere Constanten zur Darstellung der Brechungsexponenten verlange. Die normal dispersirenden gefärbten Substanzen sind noch wenig genauer untersucht; ich beabsichtige, eine Anzahl von solchen Lösungen durchmessen zu lassen. Einige Messungen von solchen einseitig absorbirenden Flüssigkeiten liegen aber in der Doctor dissertation des Hrn. Dr. Sieben vor. Derselbe hat eine erhebliche Anzahl Brechungsexponenten für eine concentrirte Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak, welche das rothe Ende des Spectrums absorbirt, und für eine Lösung von Alizarin in Alkohol gemessen, welche das violette Ende des Spectrums absorbirt. Ich habe für beide die Constanten der Helmholtz'schen Gleichung berechnet; bei beiden ergab sich aber wieder so nahe  $P = Q$ , dass auch für diese die zwei Constanten enthaltende Formel zur Darstellung der Brechungsexponenten ausreicht.

Für die Lösung von Alizarin in Alkohol ergaben sich aus den Brechungsexponenten und Wellenlängen von:

$H_\alpha$	der Thalliumlinie	$H_\beta$
$\nu_1 = 1,35980$	$\nu_2 = 1,36374$	$\nu_3 = 1,36623$
$\lambda_1 = 6,567$	$\lambda_2 = 5,350$	$\lambda_3 = 4,862$

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 628. 1880.

folgende Constanten, neben welche ich die oben bestimmten des Alkohols setze:

Alizarinlösung	Alkohol
$P = 0,817\ 550$	0,873 066
$Q = 0,817\ 534$	0,873 068
$\lambda_m^2 = 1,014\ 97$	0,976 72
$\lambda_m = 1,007\ 48$	0,988 32

Man findet also hier, entsprechend dem Vorrücken der Absorption gegen das sichtbare violette Ende des Spectrums, eine Vergrößerung des  $\lambda_m$ . Aber ebenso ergibt sich für die das rothe Ende des Spectrums absorbirende Lösung des schwefelsauren Kupferoxydammoniaks eine, und zwar erhebliche Vergrößerung von  $\lambda_m$ . Für diese Lösung ergaben sich aus:

$H_\alpha$	$H_\beta$	$H_\gamma$
$\nu_1 = 1,35276$	$\nu_2 = 1,35902$	$\nu_3 = 1,36282$
$\lambda_1 = 6,567$	$\lambda_2 = 4,862$	$\lambda_3 = 4,343$

folgende Constanten, neben welche die des Wassers gesetzt sind.

Lösung	Wasser
$P = 0,723\ 804$	0,865 895
$Q = 0,723\ 880$	0,865 767
$\lambda_m^2 = 1,112\ 65$	0,879 79
$\lambda_m = 1,054\ 84$	0,937 97

Um zu zeigen, wie genau mit diesen Constanten sich die beobachteten Brechungsexponenten darstellen lassen, stelle ich in folgendem Rechnung und Beobachtung und die zu den Rechnungen benutzten Wellenlängen zusammen.

	$\lambda$	$\nu$		$\Delta$
		beob.	ber.	
$H_\alpha$	6,567	1,35276	1,35276	0
Na	5,893	1,35460	1,35454	- 6
Ca	5,534	1,35575	1,35594	+ 19
Tl	5,350	1,35655	1,35654	- 1
$Ba_\beta$	4,899	1,35896	1,35880	- 16
$H_\beta$	4,862	1,35902	1,35902	0
$Sr_\beta$	4,607	1,36068	1,36073	+ 5
$H_\gamma$	4,343	1,36282	1,36282	0
$Rb_\beta$	4,202	1,36404	1,36416	+ 12
$K_\beta$	4,040	1,36561	1,36586	+ 25

Der grösste Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung sind 2,5 Einheiten der vierten Decimale. Man kann demnach auch die Brechungsexponenten dieser Lösungen durch die Lommel'sche Näherungsformel mit zwei Constanten, also auch durch eine Reihe mit nur fallenden Potenzen der Wellenlängen darstellen.

Münster (Westfalen), 6. Sept. 1882.

---

IV. *Einige Bemerkungen zu den Mittheilungen  
der Herren Hasselberg<sup>1)</sup> und Goldstein<sup>2)</sup>;  
von A. Wüllner.*

---

I. Hr. Hasselberg weist zunächst mit Rücksicht auf meine Notiz in diesen Annalen<sup>3)</sup>, in der ich das früher<sup>4)</sup> in Wasserstoffröhren erhaltene und für ein Spectrum des Wasserstoffs gehaltene Spectrum als ein von verdampftem Glase herrührendes Spectrum erklärt habe, auf eine vor kurzem von ihm veröffentlichte Arbeit hin, in welcher er schon zu demselben Resultate gelangt sei. Ich bemerke dazu, dass mir die Arbeit des Hrn. Hasselberg nicht bekannt ist, da mir die Bulletins de l'Acad. de St. Pétersb. bisher nicht zugänglich sind. Ich würde mich sonst auf Grund der in meiner Notiz mitgetheilten Beobachtungen darauf beschränkt haben, einfach mein Einverständniss mit Hrn. Hasselberg in diesem Punkte auszusprechen. Betreffend der von Hrn. Hasselberg erwähnten Discussion zwischen Ångström und mir muss ich indess hervorheben, dass Ångström behauptete, die Gase seien unrein in die Spectralröhren geführt; davon, dass das Spectrum von verdampfendem Glase herrühren könne, war damals nicht die Rede.

Hr. Hasselberg wendet sich dann gegen eine vermeint-

---

1) Hasselberg, Wied. Ann. 15. p. 45. 1882.

2) Goldstein, Wied. Ann. 15. p. 280. 1882.

3) Wüllner, Wied. Ann. 14. p. 355. 1881.

4) Wüllner, Pogg. Ann. 135. p. 497. 1868.

liche Behauptung von mir, dass dieses Spectrum nur in Wasserstoffröhren vorkommen könne. Ich habe das nirgendwo behauptet; die von mir ausgesprochene Vermuthung, dass nur in Wasserstoffröhren die Temperatur hoch genug werde, um das Glas zum Verdampfen zu bringen, hatte ihren Grund nur darin, dass ich bei Anwendung derselben Röhren und bei der gleichen Behandlungsweise derselben das fragliche Spectrum immer nur bei Wasserstofffüllung gefunden hatte, nie bei Füllung mit einem anderen Gase. Sobald dasselbe Spectrum auch bei Füllung mit anderen Gasen beobachtet ist, wird diese Vermuthung natürlich hinfällig.

Dagegen kann ich der Behauptung des Hrn. Hasselberg, dass das früher von mir dem Sauerstoff<sup>1)</sup> später der Kohle<sup>2)</sup> zugeschriebene Linienspectrum, wie schon früher Ångström vermuthet habe, das des Chlors sei, nicht beipflichten. Das Spectrum erhielt ich zuerst mit Sauerstofffüllung in denselben Röhren, welche mit Wasserstofffüllung das oben erwähnte Spectrum lieferten; es entstand, wenn eine Funkenentladung durch die Röhre gesandt wurde, sobald dieselbe die später als der Kohle angehörig erkannten Cannelirungen zeigten. Die Cannelirungen zerrissen, und an Stelle derselben trat das Linienspectrum auf. Das Spectrum zeigte sich in allen kohlehaltigen Gasen, und wo ich es beobachtet habe, war die Anwesenheit der Kohle durch das Bandenspectrum derselben nachzuweisen. Ich glaube daher, bisher noch zu dem Schlusse berechtigt zu sein, dass diese Linien irrthümlich dem Chlor zugeschrieben werden, dass sie in Wirklichkeit der Kohle angehören. Ich behalte mir indess vor, durch neue Versuche die Frage noch weiter aufzuklären.

II. Hr. Goldstein kommt in seiner Mittheilung über das Bandenspectrum der Luft auf meine Arbeit über die allmähliche Ueberführung des Bandenspectrums des Stickstoffs in ein Linienspectrum zurück und beschwert sich zunächst, dass ich eine Arbeit von ihm aus dem Jahre 1876 nicht erwähnt habe. Dem gegenüber kann ich nur bemerken,

1) Wüllner, Pogg. Ann. 135. p. 497. 1868.

2) Wüllner, Pogg. Ann. 141. p. 481. 1871.

dass ich in den Arbeiten des Hrn. Goldstein weder eine Anregung zu jener Untersuchung, noch eine Beziehung zu der dort behandelten Frage gefunden habe; auf die Variabilität der Spectra brauchte ich doch wohl nicht durch die kurze Bemerkung über das Spectrum des negativen Lichtes und die Ueberführung des Spectrums des positiven Lichtes in dasselbe aufmerksam gemacht zu werden, da ich seit meinen ersten Spectralarbeiten, und längere Zeit gegen manche Widersprüche, dafür eingetreten bin, ehe die Thatsache der Variabilität allgemein anerkannt wurde.

Am Schlusse seiner Mittheilung wendet sich Hr. Goldstein gegen meine Arbeit selbst, bemängelt die von mir angewandten engen Röhren und bemerkt:

„Der Erfolg seiner Wahl war dann eben der, dass er die Veränderungen des positiven Spectrums unter dem Einflusse variirender Gasdichte überhaupt nicht beobachtete, sondern, dass ehe die hier beschriebenen Aenderungen des Bandenspectrums bemerkbar werden konnten, die intensiven Entladungen einsetzten, welche das Bandenspectrum zerstörten und dafür das Linienspectrum hervortreten liessen.“

— — — „Jene Versuche beweisen in Betreff des von Hrn. Wüllner von neuem daraus erschlossenen Einflusses der Schichtdicke auf das Spectrum durchaus nichts, sie zeigen nur die lange bekannte Thatsache, dass ein Gas, welches ein Bandenspectrum liefern kann, bei erheblicher Vermehrung der auf einmal übergehenden Electricitätsmenge statt dessen ein Linienspectrum aufweist. Von der Existenz der intensiven Momentanentladungen bei Anwendung so enger Röhren wird derjenige, der diese Versuche von neuem ausführt, sich, sei es durch den Anblick der Entladungen in den weiten Theilen der Gefässe, sei es unter Anwendung des Drehspiegels, leicht überzeugen können.“

Aus dieser Aeusserung des Hrn. Dr. Goldstein muss man in der That zu der Vermuthung kommen, dass er meine Arbeit gar nicht gelesen hat. Denn zunächst habe ich in meiner Abhandlung § 12 auch die Veränderungen in einem Rohre, dessen capillarer Theil einen Durchmesser von etwa 2 mm hatte, beobachtet und gezeigt, dass sie qualitativ ganz

mit den in den engen Röhren beobachteten übereinstimmten, dass sie nur nicht bis zur Entwicklung der scharfen Maxima der Linien vorschritten. Dann aber besteht meine ganze Arbeit in dem Nachweis, dass der Uebergang aus der einen Form des Spectrums in die andere ein ganz stetiger und allmählicher ist, dass die Linien des von mir beschriebenen Linienspectrums eben die Reste des Bandenspectrums sind, dass von einer Zerstörung des Bandenspectrums und einem Hervortreten des Linienspectrums dafür gar nicht die Rede sein kann. Mit Ausnahme der auch von Hrn. Goldstein erwähnten beiden Linien im Gelb, Wellenlängen 568,4 und 567,6, die sich an Helligkeit wachsend auf dunklem Grunde allmählich entwickelten, bildeten sich an den Stellen der übrigen Linien allmählich Maxima im Bandenspectrum aus; diese Maxima traten nur deshalb schliesslich als Linien auf, weil bei wachsender Verdünnung die zwischen ihnen liegenden Theile des Bandenspectrums rascher an Helligkeit abnahmen.

Ich habe das auch mit einer jedes Missverständniss ausschliessenden Deutlichkeit ausgedrückt; ich weise z. B. auf § 11 meiner Abhandlung hin, wo ich gesagt habe: „Eben weil der Uebergang von dem vollausgebildeten Bandenspectrum zu dem Linienspectrum ein so allmählicher ist, erscheint es auch überflüssig, anzugeben, zwischen welchen Linien das Gesichtsfeld noch hell, zwischen welchen es ganz dunkel ist. Denn es hängt das wesentlich davon ab, bis zu welcher Verdünnung man vorgeschritten ist, und weiter auch von der Weite der angewandten Röhre. Die Linien bilden sich um so eher, das heisst bei um so grösserer Dichte, je enger die Röhre ist. Bei dem kleinsten Querschnitte war deshalb noch mehr neben den Linien zu sehen, als bei grösseren Querschnitten.“

Vergleichen wir nun die „hier beschriebenen Aenderungen des Bandenspectrums“, die ich angeblich nicht beobachten konnte, mit meiner Beschreibung, so entsprechen sich dieselben sehr genau; die Aenderung des Randes der von Hrn. Goldstein als fünfte bezeichneten Cannelirung entspricht ganz der von mir beschriebenen Aenderung des



Randes der grünen Cannelirung, Wellenlänge 507,1; und die Aenderung der von Hrn. Goldstein als violettes Hauptmaximum bezeichneten Cannelirung so genau der von mir beschriebenen Aenderung des Beginnes der von der Wellenlänge 465 bis 453 reichenden Cannelirung, dass lediglich aus diesen Beschreibungen geschlossen werden kann, dass es sich hier um dieselbe Stelle des Spectrums handelt. Ich setze die beiden Beschreibungen neben einander her:

## Wüllner.

Bei abnehmender Gasdichte zerfällt die breite, das Feld beginnende Linie in eine Doppellinie, respective es entwickelt sich, unter Verdunkelung der Linie, vor derselben bei  $65^{\circ} 52' 46''$ , also etwa eine Minute nach der weniger brechbaren Seite verschoben, eine helle Linie. Die breite, die Cannelirung beginnende Linie nimmt dann zunächst an Helligkeit ab, sodass sie nur wenig heller ist, als das Feld, dessen Beginn sie bildet; schliesslich verschwindet sie fast vollständig und lässt nur als Rest eine schwache, feine Linie bei  $65^{\circ} 52' 56''$ , wenn die Dichtigkeit des Gases hinreichend vermindert ist.

## Goldstein.

Wird nun aber weiter evacuirt, so erhebt sich aus dem zarten Nebel vor dem Rande der Cannelirung ein mehr und mehr an Helligkeit zunehmender schmaler Streif, dessen Lage genau dem Rande der Kathodencannelirung entspricht; während die Helligkeit dieses Streifens wächst, nimmt der frühere Rand der Cannelirung an Lichtstärke ab, und das Gefälle der Helligkeit gestaltet sich so, dass schliesslich der neue Streif als Beginn der Cannelirung, der frühere Rand aber als Anfang des Cannelirungsfeldes erscheint. —

Ich habe, weil ich engere Röhren benutzte, die Aenderungen des Spectrums nur erheblich weiter und detaillirter verfolgen können, als Hr. Dr. Goldstein; in meiner Abhandlung § 11 sind die sämmtlichen so allmählich auftretenden Maxima angeführt zwischen den Wellenlängen 568,4 und 451,6, und angegeben, wie weit sie den Maximis in dem vollausgebildeten Bandenspectrum entsprechen, wie weit nicht.

Ich weiss nicht, ob Hr. Dr. Goldstein mit seiner Schlussbemerkung sagen will, dass er meine Versuche von neuem wiederholt und zu einem dem meinigen gerade entgegengesetzten Resultate gelangt sei. Ich habe § 13 meiner Abhandlung ausdrücklich erwähnt, dass die ganze Erscheinung ohne Funkenentladung verlaufen sei; ich habe es nach meinen früheren Arbeiten nicht für nöthig gehalten, hervorzuheben, dass sich diese Aussage sowohl auf den Anblick der Entladung in den Theilen der Gefässe als auch unter Anwendung des Drehspiegels stützte. Ich habe die Versuche seitdem und noch kürzlich öfter wiederholt, und gerade wegen der interessanten allmählich eintretenden Verschiebung der Maxima anderen gezeigt. Jeder Versuch lieferte eine neue Bestätigung, dass die ganze Erscheinung ohne Eintritt der Funkenentladung verläuft. In dem von der Pumpe entfernten weiten Theile der Röhre ist noch die von mir im Jubelbande der Annalen beschriebene Schichtung vorhanden, wenn der enge Theil der Röhren nur wenig mehr als die das Linienspectrum darstellenden Maxima zeigt, und der rotirende Spiegel giebt stets das in die Breite gezogene Bild des positiven Büschellichtes, ohne irgend eine Funkenentladung, sowohl in dem weiten als engen Theile der Röhre.

Im § 13 meiner Abhandlung habe ich das von mir gemessene Funkspectrum mit den Messungen Thaléns zusammengestellt und gezeigt, dass von den von mir gemessenen 45 Linien, 19 Linien mit den durch allmähliche Verschiebung entstandenen Maximis übereinstimmen, während ich 52 solcher Maxima messend bestimmt habe. Es gehört in der That darnach eine grosse Phantasie dazu, das aus den Maximis des Bandenspectrums entstandene Linienspectrum mit dem schon lange bekannten Linienspectrum des Funkens zu identificiren.

Münster (Westfalen), 4. Sept. 1882.

---

V. *Ueber galvanische Elemente, welche angeblich nur aus Grundstoffen bestehen, und den electromotorischen Nutzeffect chemischer Processe; von Ferdinand Braun.*<sup>1)</sup>

Der folgende Aufsatz zerfällt in zwei Theile. Der erste, umfangreichere, bezieht sich auf die Anschauungen, welche Hr. F. Exner als eine neue chemische Theorie der Electricitätserregung ausgesprochen, und auf Versuche, welche Hr. Exner als Beweise für seine Auffassung veröffentlicht hat. Da die Arbeiten des Hrn. Exner die Aufmerksamkeit der Physiker in hohem Grade auf sich gezogen haben, so glaubte ich, auf dieselben etwas näher eingehen zu müssen. Ich bitte, damit die Ausführlichkeit dieses vielfach polemischen Theiles entschuldigen zu wollen. — Der zweite, kürzere Theil des Aufsatzes enthält allgemeinere Resultate.

Als „galvanische Elemente, welche nur aus Grundstoffen bestehen“, hat Hr. Exner<sup>2)</sup> Combinationen bezeichnet, welche aus zwei Metallen, z. B. Zink und Platin, die in Brom oder Jod eintauchen, zusammengesetzt sind. Diese geben am Electrometer ohne condensatorische Vorrichtung eine Potentialdifferenz und würden daher in einem geschlossenen Leiterkreise einen galvanischen Strom verursachen. Hr. Exner sieht die Ursache und das Aequivalent desselben in einem directen chemischen Angriff. Nach seiner Auffassung soll „überall dort, wo eine chemische Wechselwirkung zweier Substanzen unter Verlust an potentieller Energie stattfindet, auch Electricität entstehen; ob diese Substanzen nun Grundstoffe sind oder nicht, das ist gleichgültig, wenn sie nur überhaupt die Electricität zu leiten im Stande sind, und man für eine dauernde Ableitung der entwickelten Elec-

1) Diese Arbeit schließt sich an meine beiden Aufsätze „Ueber die Electricitätsentwicklung als Aequivalent chemischer Processe“ (Wied. Ann. 5. p. 182. 1878 und 16. p. 561. 1882) an. Sie bildet die zweite der dort angezeigten experimentellen Untersuchungen.

2) Exner, Wien. Ber. 84. II. Abtheil. Juliheft 1881. — Wied. Ann. 15. p. 412 bis 440. 1882. Ich citire nach diesem letzteren Abdruck.

tricitätsmengen sorgt, so bilden sie ein galvanisches Element<sup>1)</sup> Er schliesst aus seinen Versuchen: „Betrachtet man so die verschiedenen Combinationen, welche Electricität zu liefern im Stande sind, so findet man, dass es ganz gleichgültig ist, ob dieselben Leiter erster oder zweiter Classe, ob sie Grundstoffe oder Electrolyte enthalten, sondern dass es nur darauf ankommt, ob die zu einem Kreise combinirten Stoffe aufeinander chemisch wirken oder nicht. Es ist gegenwärtig kein Fall bekannt von chemischer Action ohne Electricitätsentwicklung und ebensowenig einer von Electricitätsentwicklung ohne chemische Action“<sup>2)</sup>

Nun ist von vornherein klar, dass die Folgerungen des Hrn. Exner mindestens nicht bewiesen sind, sondern auf einem Cirkelschluss beruhen. Denn in demselben Moment, wo chemische Action eintritt, hört die Combination auf, nur aus Grundstoffen zu bestehen; und wenn Hr. Exner verlangt, dass man seinen Schlüssen zustimmt, so hätte ihm obgelegen, den Beweis zu führen, dass die entstandenen Verbindungen keine electrolytischen Leiter sind. In der That weiss man: 1) Es gibt feste Körper (z. B. Schwefelsilber), welche electrolytisch leiten; diese geben beim Anlegen zweier verschiedener Metalle von gleicher Temperatur einen galvanischen Strom.<sup>3)</sup> 2) Es gibt andere feste Körper (z. B. Schwefeleisen, Schwefelblei etc.), welche zwar binär zusammengesetzt sind, aber trotzdem ohne Electrolyse leiten. Diese geben beim Anlegen verschiedener Metalle keinen Strom.<sup>4)</sup> Wenn eine solche Verbindung bei einer Temperatur, bei welcher sie metallisch leitet, in einem Leiterkreise durch directe chemische Action erst entstände, so würde man, entgegen Hrn. Exner, schliessen — und, wie ich im Folgenden aus analogen Beobachtungen nachweisen werde, mit Recht schliessen —, dass trotz chemischen Angriffs kein Strom entstehen könnte. 3) Man weiss, dass eine, man kann fast sagen, unbeschränkt grosse Anzahl von Combinationen existirt

1) l. c. p. 413. 2) l. c. p. 423.

3) Hittorff, Pogg. Ann. 84. p. 1—28. 1851.

4) Vgl. Braun, Wied. Ann. 4. p. 479. 1878.

(z. B. Daniell mit Zink- und Kupfervitriol), welche am Electrometer Potentialdifferenz ergeben, ohne dass im stromlosen Element chemische Action stattfindet. Die nothwendige Bedingung dafür, dass eine Combination von Stoffen einen Strom erzeugen kann, besteht darin, dass umgekehrt ein Strom im Element electrolytische Action ausübt. Nicht etwa auf Processe, die auch an den nicht zu einem Element combinirten Metallen stattfinden, kommt es an, sondern nur auf diejenigen, die mit dem Stromdurchgang wie Ursache und Wirkung verknüpft sind; so lehren uns wenigstens alle unsere seitherigen, zahlreichen und wohlbegründeten Erfahrungen. In der That, wenn die directe chemische Action (so nenne ich unmittelbare chemische Wechselwirkung, welche die Folge der sog. Affinität ist), wie Hr. Exner es will, die Ursache der von ihm beobachteten electromotorischen Kräfte wäre, so sieht man nach den Principien der mechanischen Wärmetheorie gar keinen Grund ein, warum die electromotorischen Kräfte proportional sein sollen den auf das electrochemische Aequivalent bezogenen Verbindungswärmen. Zu einem derartigen Schluss kann nur eine Deduction führen, welche das Faraday'sche Gesetz benutzt, und im vorliegenden Falle z. B. müsste der Beweis geführt sein, dass ein galvanischer Strom, welcher reines Brom durchfließt, an einer Metallelektrode für die durchgegangene electrochemische Electricitätsmenge Eins auch die Bildung von einem electrochemischen Aequivalent Substanz herbeiführte. Von einem solchen Gesetze wissen wir nichts; man darf sogar dreist behaupten, es existirt nicht.

Trotz dieser vielen längst bekannten, unbestrittenen Thatsachen, welche gegen Hrn. Exner's Auffassung sprechen, hält er es für unnöthig, die aus ihnen folgenden, nahegelegenen Einwände gegen seine Schlussfolgerungen zu widerlegen. Im Gegentheil: 1) Bei einer Anzahl Combinationen findet er keine constanten Werthe für die electromotorische Kraft und schiebt die Schuld, ohne jeglichen Beweis, darauf, dass der chemische Angriff durch einen Ueberzug der Metalle gehindert werde und damit die directe chemische Action, d. h. nach Hrn. Exner die Electricitätsentwicklung, auf-

hörs. Bei anderen dagegen, welche constante electromotorische Kräfte geben, hält er es für möglich, dass die sich bildende Bromverbindung vom Brom aufgelöst wird. Dann hätte man 2) doch billiger Weise fragen müssen, ob man mit den von Thomsen bestimmten Verbindungswärmen ohne weiteres rechnen darf, und ob nicht vielleicht auch noch eine Lösungswärme zu berücksichtigen sei. Diese Frage stellt Hr. Exner überhaupt nicht. 3) Dagegen arbeitet Hr. Exner mit Brom, über welches er sich folgendermassen äussert: „Das Brom war sogenanntes ‚chemisch reines‘, wie es zu quantitativen Analysen verwendet wird; nun ist aber wirklich reines Brom bekanntlich nur sehr schwierig darzustellen (nach Stas), und das sogenannte reine überhaupt nicht mehr vollkommen von beigemischtem Chlor zu befreien. Es enthielt deshalb das verwendete Brom jedenfalls noch Spuren freien Chlors, die sich aber, wie die Versuche zeigen werden, in keiner Weise bemerkbar machten“. Inwiefern die Versuche dies zeigen, habe ich in keiner Weise bemerken können. Denn das Einzige, was ich mir denken könnte, dass nämlich die Uebereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Zahlen auch umgekehrt den Beweis für die Reinheit des Broms liefern sollte, kann doch Hr. Exner nicht angenommen haben. Indessen finde ich nichts Näheres mitgetheilt.

Der Hauptschluss des Hrn. Exner, dass eine Combination electromotorisch wirksame sein könne auch ohne Electrolyten, ist nach dem oben Gesagten<sup>1)</sup> illusorisch, jedenfalls nicht bewiesen. Eine Wiederholung seiner Versuche von diesem Gesichtspunkte aus würde daher nicht der Mühe lohnen. Dagegen interessirten mich die Messungen des Hrn. Exner, und zwar aus einem anderen Grunde. Den Thatfachen, welche ich in einem früheren Aufsätze angeführt habe, konnte ich in keiner anderen Weise gerecht werden, als durch die Annahme, dass stets nur ein Bruchtheil der

1) Ich erhebe nicht im mindesten den Anspruch, in dem Obigen etwas gesagt zu haben, was nicht vielleicht sämtliche Leser von Hrn. Exner's Arbeit gleichfalls gegen dieselbe eingewendet haben. Nur Hrn. Exner gegenüber schien mir diese Zusammenstellung geboten.

Verbindungswärme in Stromenergie übergehe. Fasst man aber die Exner'schen Combinationen als gewöhnliche Elemente auf, z. B.  $\text{Ag}|\text{Br}|\text{C}$  als  $\text{Ag}|\text{AgBr}|\text{Br}|\text{C}$ , und betrachtet  $\text{AgBr}$  als Electrolyten, so kommt in diesen Ketten nur ein einziger Electrolyt und damit nur eine einzige Wärmetönung in Betracht. So betrachtet, würden die Exner'schen Zahlen beweisen, dass bei diesen einfachsten electrolytischen Processen alle Verbindungswärme in Stromenergie überginge. Aus den Folgerungen meines ersten Aufsatzes und den aus Hrn. Exner's Messungen zu ziehenden sah ich keinen Ausweg durch eine irgend befriedigende Erklärungsweise, und ich vermuthete daher, dass ich doch noch irgend eine mögliche Erklärung bei der Discussion meiner früheren Beobachtungsergebnisse übersehen hätte, auf welche ich bei einer Wiederholung der Versuche des Hrn. Exner vielleicht geführt werden möchte. Dazu kam, dass sichere Zahlen für die electromotorische Kraft solcher Elemente mit nur einem chemischen Processe mir auch gestatten würden aus geeigneten Combinationen den electromotorischen Nutzeffect anderer, in Flüssigkeitsketten vorkommenden chemischen Vorgänge zu berechnen, nicht nur in Grenzen einzuschliessen, womit ich mich früher begnügen musste.

Da Hr. Exner die eingangs erwähnten Fragen, ob schon dies nöthig wäre, um seinen Folgerungen den Charakter eines Cirkelschlusses zu nehmen, nicht geprüft hat, so habe ich es gethan. Da ferner freies Chlor voraussichtlich (in wässriger Lösung sicher) Brom und Jod verdrängt und daher bei solchen Messungen ein kleiner Gehalt an Chlor erhebliche Störungen hervorbringen könnte, so habe ich die Darstellung reinen Broms, überhaupt möglichst reiner Materialien für nöthig gehalten. Die Weise endlich, in welcher Hr. Exner gemessen hat, nämlich so, „dass das zu untersuchende Metall gleichzeitig mit einer Kohlenelectrode in das Brom eingetaucht und durch eine Schlüsselvorrichtung, letztere mit der Erde, ersteres mit dem Electrometer verbunden wurde“, habe ich aus Gründen, welche sich sehr bald ergaben, gleichfalls verlassen. Ich gehe zur Darstellung im einzelnen über.



## I. Theil.

## Die Elemente mit trockenem Brom, Jod und Chlor.

## § 1. Herstellung der Ketten.

Die Brom- und Jodmetalle sind bekanntlich grossentheils ungemein hygroskopisch. Will man daher, soweit als möglich, mit Grundstoffen arbeiten, so ist zunächst der Wasserdampf der atmosphärischen Luft auszuschliessen. Ferner ist es, wie die einfachste Beobachtung lehrt, wenigstens bei gewöhnlicher Zimmertemperatur, nicht möglich, Brom in ein Gefäss zu giessen, ohne dass sich der Rand desselben, in Folge der Verdunstungskälte des Broms, sofort mit Wassertropfchen beschlägt. Selbst als sich am Boden einer Glasröhre von ca. 150 mm Länge Brom befand und in dieses eine die Röhre fast ausfüllende Zinkstange getaucht war, so war nach kurzer Zeit am offenen Ende die Röhre und das Zink dicht mit Wassertropfen beschlagen. Das käufliche Brom (welches noch dazu häufig unter Wasser aufbewahrt wird) wird danach voraussichtlich stets Wasser in Lösung haben. Mit Rücksicht auf diese Umstände waren die Elemente, wie folgt, construirt (cfr. Fig. 1.)

Der Platindraht  $P_1$  trägt das Metall des einen (negativen) Poles; er ist durch die bei  $b$  verengte Glasröhre hin-

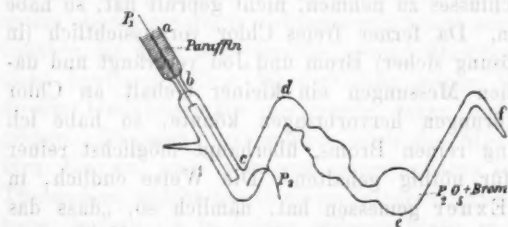


Fig. 1.

durchgeschmolzen. Der Trichter  $ab$  ist behufs Isolation mit Paraffin ausgegossen. In der Nähe von  $c$  ist der Platindraht  $P_2$ , der als zweiter Pol dient, durch die Wand geschmolzen. Bei der Biegung  $d$  ist die Röhre zweckmässig

etwas verengt, zwischen *d* und *e* kugelförmig erweitert. An der Stelle *e* befand sich wasserfreie Phosphorsäure; nachdem diese in die Röhre eingeführt war, wurde die Röhre bei *f* zu einer langen Capillaren ausgezogen, diese vertical nach unten gebogen und abgeschmolzen. So blieb die Röhre erst mindestens 24 Stunden, bisweilen unter Erwärmen, liegen. Bei einer Reihe von Versuchen wurde die Röhre mit trockener Kohlensäure gefüllt; ein Strom derselben wurde etwa zwei Stunden lang durch *f* eingeleitet und trat durch die Capillare *g* aus, *f* und *g* wurden dann zugeschmolzen. Um Brom einzufüllen, wurde die Capillare *f* geöffnet, das offene Ende in Brom eingetaucht, durch Erwärmen der Röhre Luft ausgetrieben, dafür Flüssigkeit aufgesogen und die Capillare dann abgeschmolzen; nachdem das Brom längere Zeit mit der Phosphorsäure in Berührung gewesen war, wurde ein Theil desselben nach der Stelle *c* überdestillirt. Ketten mit Jod wurden ganz ähnlich gemacht, das Jod aber im festen Zustande über die Phosphorsäure geschichtet und dann in den anderen Schenkel sublimirt.

Der Contact zwischen dem Platindraht, welcher als Zuleiter diente und dem den einen (negativen) Pol bildenden Metall wurde durch Einschmelzen des Platindrahtes in das Metall herbeigeführt. Bei schmelzbaren edlen Metallen hat dies gar keine Schwierigkeit; bei den anderen (Zink, Blei, Aluminium) gelingt es in zweckmässig geformten Glasröhren, durch welche ein Strom trockener Kohlensäure fliesst. — War das eine Electrodenmetall Quecksilber, so füllte dasselbe den Schenkel *bc* ganz, den Schenkel *cd* etwa halb aus; der Platindraht *P*<sub>2</sub> befand sich dann an der Stelle *d*.

## § 2. Die Materialien.

1. Brom war nach der Stas'schen Methode hergestellt aus bromsaurem Kali und Bromkalium. Die Mutterlauge des unkrystallisirten bromsauren Kalis erwies sich frei von Jod; ebenso das Bromkalium. Das Brom wurde zur schliesslichen Entwässerung und Wegnahme etwaiger Bromwasserstoffsäure mit frisch ausgeglühtem, chlorfreiem Kalk behandelt und dann in das Aufbewahrungsgefäss überdestillirt;

dasselbe war ein weites Glasrohr mit angeschmolzenem, als Hals dienendem, engerem Rohre; es wurde nach dem Oeffnen immer wieder vor der Glasbläseflamme zugeschmolzen, mit der Vorsicht, dass niemals Flammengase ins Innere des Gefässes gelangten. Das Brom kam von seinem Entstehungsmoment an nicht mehr mit organischen Körpern in Berührung; alle nothwendigen Verbindungen waren durch Glas hergestellt. — Meine ersten Versuche wurden mit Brom gemacht, welches Hr. Dr. Strecker noch von seinen Untersuchungen über die specifische Wärme<sup>1)</sup> besass, und welches er damals nach der Stas'schen Methode hergestellt hatte. Es war aus anderen Materialien hergestellt (sein bromsaures Kali erwies sich erst nach dreimaligem Umkrystallisiren jodfrei), gab aber genau die gleichen Werthe, wie mein Brom.

2. Jod. Für einen Theil der Versuche diente käufliches, zweifach sublimirtes. Die definitiven Messungen wurden mit Jod angestellt, welches Hr. Dr. Strecker nach Stas'scher Methode gereinigt hatte.<sup>2)</sup> Beide Präparate gaben übrigens gleiche Resultate.

3. Die in die Gefässe eingeführte Phosphorsäure war längere Zeit in einem Strome trockener Luft behufs Oxydation etwaiger phosphoriger Säure (welche Bildung von Phosphoroxymydrat würde bedingt haben) erhitzt worden.

4. Zink war käufliches, chemisch reines (aus arsenfreiem destillirtes).

5. Blei. Reines essigsaures Blei wurde in einer offenen Porzellanschale so lange geröstet, bis es vollständig in Oxyd übergegangen war. Dieses wurde auf grossen Stücken Holzkohle vor der Glasbläserlampe reducirt. In das Innere der Kohle waren lange Röhren gebohrt, in welchen das reducirte Blei sich ansammelte.

6. Silber. Dasselbe war auf galvanischem Wege aus Silbernitratlösung an Platin niedergeschlagen. Als Electrode, die sich auflöste, diente aus Chlorsilber hergestelltes und mehrmals auf Kohle mit kohlensaurem Natron umgeschmol-

1) K. Strecker, Wied. Ann. 13. p. 20—43. 1861.

2) L. c. p. 33.

zenes Silber. Das galvanisch abgeschiedene Silber wurde zerrieben, ausgewaschen, auf Kohle unter Zusatz von etwas kohlensaurem Natron zusammengeschmolzen, mit Salzsäure abgekocht und ausgewalzt. Aus dem so erhaltenen Blech wurden die Electroden geschnitten und nochmals in Salzsäure gekocht. — Zur Prüfung auf die Reinheit wurde 1 g von dem Blech in Salpetersäure gelöst, zur Trockne abgedampft, aufgelöst, mit Salzsäure ausgefällt, das Filtrat eingedampft und mit Schwefelammonium geprüft. Es erwies sich frei von jeglichem Metall, welches mit Platin hätte legirt sein können. Dagegen enthielt das Silber an einzelnen Stellen mechanisch eingeschlossen Spuren von Substanz, die sich wie Thonerde oder phosphorsaurer Kalk verhielten, jedenfalls für meine Zwecke nicht in Betracht kamen. Um aber auch diese zu entfernen, wurden die Electroden immer an ihrem unteren Ende, mit dem sie in das Brom eintauchen sollten, in der Glasbläserflamme umgeschmolzen. Dabei gingen die etwa im Silber enthaltenen mechanischen Einschlüsse an die Oberfläche und lösten sich dann in der kochenden Salzsäure.

7. Quecksilber. Käufliches Quecksilber wurde längere Zeit mit verdünnter Salpetersäure geschüttelt, ausgewaschen, getrocknet und im Vacuum destillirt.

8. Bromblei wurde aus essigsauerm Bleioxvd mit reinem Bromkalium (in geringem Ueberschuss) ausgefällt. Der Niederschlag wurde so lange erst mit kochendem, dann mit kaltem Wasser ausgewaschen, bis etwa ein Drittel der Substanz, grösstentheils durch allmähliche Lösung, verloren gegangen war. Das Bleibromid zeigte sich frei von organischen Substanzen.

9. Jod- und Bromsilber waren aus reinem salpetersauerm Silber durch reines Jod-, resp. Bromkalium ausgefällt und durch Decantiren vollständig ausgewaschen; Chlor-silber wurde mit reiner Salzsäure gefällt.

10. Quecksilberbromür und -jodür waren aus reinem, überschüssigem Quecksilber und reinem Brom, resp. Jod durch Digeriren mit Wasser hergestellt. Quecksilberchlorür war käufliches reines.

### § 3. Die Beobachtungen an den Ketten mit Brom, Jod und Chlor.

Die electromotorischen Kräfte wurden an einem Thomson'schen, auf subjective Ablesung eingerichteten Electrometer gemessen, und zwar stets auf zweierlei Weise: einmal, indem die beiden Pole der Kette je mit einem Quadrantenpaare verbunden wurden und die constante Ablenkung mit der eines Daniells verglichen wurde; ein anderes mal, indem man die Ablenkungen bestimmte, welche resp. Daniell  $\pm$  Kette (zur Abkürzung soll dies stets  $D \pm K$  geschrieben werden) ergaben. Eine Controle durch diese zweite Methode erschien mir unerlässlich. Die Ketten leiteten nämlich theilweise so schlecht, dass es bisweilen 20 Secunden und darüber dauerte, ehe das Electrometer seine volle Ladung angenommen hatte. Die Messungen nach beiden Methoden stimmen in den meisten Fällen befriedigend überein; nur wo sich sehr schlechte Leitung eingestellt hatte, zeigten sich erhebliche Differenzen. Diese gaben sich gleichzeitig noch in einem anderen Umstande kund; berechnete man nämlich aus den Ablenkungen von  $K \pm D$  den Werth von  $D$  in Scalentheilen, so ergab sich ein kleinerer Werth als derjenige, den man erhielt, wenn das Daniell allein, also nur durch gute Leiter, mit den Quadranten des Electrometers verbunden war. Der Widerstand des Electrometers wird in solchen Fällen vergleichbar mit demjenigen der Kette. Solche, übrigens nur wenige, Beobachtungen mussten verworfen werden. — Zur Beurtheilung der Genauigkeit führe ich an, dass 1 D. ca.  $\pm 46^\circ$  Ablenkung gab; zehntel Scalentheile konnten noch mit Sicherheit geschätzt werden. Die electromotorischen Kräfte sind sämmtlich auf  $D=100$  bezogen.

#### I. Combination: Pb | Br | Pt.

Kette Nr. I. — Stas'sches Brom von Hrn. Dr. Strecker.

	Electromotorische Kraft	
	aus	
	$K$ allein	$K \pm D$
Gleich nach Darstellung . . . . .	87,1	88,7
4 Stunden später . . . . .	103,9	105,2
5    "    " . . . . .	103,0	—

	Electromotorische Kraft aus	
	<i>K</i> allein	<i>K</i> ± <i>D</i>
5 Stunden später . . . . .	105,4	106,9
6 " " . . . . .	112,3	110,6
24 " " . . . . .	115,2	116,6
30 " " . . . . .	—	116,9
2 Tage " . . . . .	119,7	—
Mehr Brom herüber destillirt . .	121,1	—
Noch mehr Brom herüber destillirt	119,9	—
3 Tage später . . . . .	121,4	—
8 " " . . . . .	120,7	121,3
	121,1	—
11 " " . . . . .	121,0	121,5
70 " " . . . . .	120,1	119,9

Die electromotorische Kraft der Kette stieg also von dem anfänglichen Werthe 87 im Laufe von ungefähr zwei Tagen bis auf etwa 120 und blieb dann constant auf diesem Werthe.

Ich vermuthete, dass sich vielleicht mit der Zeit aus dem zunächst entstandenen Bleibromid, sobald die Schicht eine gewisse Dicke erreicht hat und so das Blei nicht mehr dem Einflusse überschüssigen Broms ausgesetzt ist, ein Bleibromür möchte gebildet haben. Eine derartige, dem Blei direct aufliegende Schicht müsste die electromotorische Kraft der Kette verändern. Da einem solchen Bromür, dessen Existenz nach Analogie des von Blei jetzt mit Sicherheit bekannten Oxyduls wohl möglich wäre, eine grössere Wärmetönung zukommen würde als dem Bromid, so könnte sich hieraus das Ansteigen des Werthes erklären. Ich wollte ausserdem mit Bestimmtheit den grössten möglichen Werth der Kette kennen lernen.

Ich habe deshalb die Biegung *c*, wo sonst das Brom in den Elementen sich befand, mit Bleibromid ausgefüllt und es daselbst, von einer Kohlensäureatmosphäre umgeben, geschmolzen. Es gelingt, namentlich wenn die Röhre an dieser Stelle verengt ist, bisweilen, das Bleibromid daselbst einzuschmelzen, ohne dass die Röhre beim Erkalten springt. Dagegen entstehen im erstarrten Salze immer kleine capillare Risse. Bringt man nun auf die eine Seite des Bleibromids

Brom, so dringt dasselbe in die feinen Spalten und ruft einen (die Beobachtungen etwas störenden) Diaphragmenstrom hervor, den man nachweist, wenn man auf beide Seiten des Bleibromids je einen Platindraht als Electrode aufsetzt. Seine electromotorische Kraft betrug in meinem Falle anfangs 13,0 und sank im Laufe mehrerer Stunden auf 9,4 ( $D = 100$ ). Es ergab sich:

Blei | Bleibromid | Brom | Platin.

Kette + Diaphragmenstrom		Diaphragmenstrom	Kette
	126,8	10,5	116,3
	126,5	—	116,0
Nach $\frac{1}{2}$ Stunde	125,4	10	115,4
„ 5 Stunden	122,8	} 9,4	} 116
„ „ „	125,9		
„ „ „	126,1		

Die electromotorische Kraft fängt also sofort mit dem Werthe 116 an; die Schwankungen in dem direct beobachteten Werthe von Kette + Diaphragmenstrom rühren, wie die Messungen zeigen, von der allmählichen Abnahme des Diaphragmenstromes her. Die Versuche beweisen:

1) dass keine Bildung von Bleibromür nachweisbar ist;  
 2) dass es gar nicht auf die Stärke der directen chemischen Action ankommt, sondern lediglich auf das Vorhandensein von Bleibromid. Die electromotorische Kraft kann mit abnehmender chemischer Action sogar steigen, wie dies die erste Kette zeigte. Diese zeitliche Zunahme rührte wahrscheinlich daher, dass im Anfang noch nicht die für die volle electromotorische Kraft nöthige Dicke der Bleibromidschicht vorhanden war, und wäre demnach den bei Polarisationserscheinungen bekannten Erfahrungen vollkommen analog.

Um mich zu überzeugen, dass Brom wirklich Diaphragmenströme gibt, habe ich statt des Bleibromids mit seinen capillaren Rissen, durch welche das Brom nur ungemein langsam dringt, einen Pfropfen von ausgeglühtem Asbest in eine U-förmige Röhre gebracht, Brom hinzugegan und rechts und links vom Asbestpfropfen je einen Platindraht als Elec-



trode in das Brom eintauchen lassen. Niveaudifferenzen von wenigen Millimetern genügen, um Diaphragmenströme von 0,1 Daniell zu erhalten. Sie wechseln mit der Richtung, in welcher das Brom fließt, ihr Zeichen. Wenn wir die Quincke-Helmholtz'sche Erklärung der Diaphragmenströme annehmen, so beweisen die Versuche, dass Brom, selbst durch Berührung mit Körpern, gegen welche es chemisch ganz indifferent ist (wie Bleibromid), electrisch wird. Auch wenn das Brom sich in den Glasröhren (ohne Diaphragma) bewegt, entstehen electrische Ladungen, auf welche man bei den Messungen achten muss. Ich werde noch öfters auf diese Diaphragmenströme zurückkommen müssen; sie können so störend werden, dass sie alle Messungen unmöglich machen.

Es wurde noch ein zweites Element  $\text{Pb}|\text{Brom}|\text{Pt}$  untersucht. Dasselbe war mit Kohlensäure gefüllt, das Brom nach Stas'scher Methode von mir dargestellt. Es ergab sich:

Kette Nr. II.

	<i>K</i>	<i>K</i> ± <i>D</i>
Leitung nur durch Dampf, Blei aber blau angelaufen . . . . .	97,0	—
Brom überdestillirt . . . . .	118,3	118,0
Nach 18 Stunden . . . . .	119,6	120,1
	—	119,9
Nach 1½ Tagen . . . . .	119,3	—
Nach 2 Monaten . . . . .	119,6	117,9

Auch die Kette  $\text{Pb}|\text{PbBr}_2 + \text{aq}|\text{PbBr}_2$  geschmolzen  $|\text{Br}|\text{Pt}$  habe ich untersucht und für dieselbe den, aber nicht sehr sicheren, Werth 117,6 gefunden.

Für die Combination  $\text{Pb}|\text{Br}|\text{C}$  berechnet sich aus den Wärmetönungen die electromotorische Kraft zu 128,9; Hr. Exner gibt 129 als beobachteten Werth an.

Es blieb noch die von Hrn. Exner nicht berührte Frage übrig, ob Bleibromid sich in Brom löst. Die Eigenschaften des Broms erschweren die Beantwortung sehr erheb-

lich; ich bin in folgender Weise verfahren (vgl. Fig. 2). In *A* befanden sich einige blanke Bleistreifen, in *B* wasserfreie Phosphorsäure und Brom; der ganze Apparat war vorher getrocknet und mit trockener Kohlensäure gefüllt worden. Nach *A* wurde aus *B* Brom (etwa  $\frac{3}{4}$  ccm) überdestillirt und mehrere Wochen lang mit dem Blei in Berührung gelassen. Es bildet sich auf dem Metall eine Schicht von Bromid, welche ziemlich fest daran haftet. Das Brom wurde dann wieder nach *B* zurückdestillirt. Selbst geringe Mengen von gelöstem Salze würde man dann durch Absetzen eines Randes, namentlich aus den zuletzt verdampfenden Partien der Flüssigkeit, erkennen können. Ein solcher Rand, der von kleinen von der Bromidschicht abgefallenen Körnchen leicht zu unterscheiden ist, war nicht zu bemerken, obschon der Versuch einige mal wiederholt wurde.

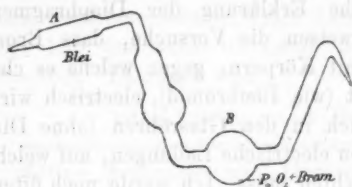


Fig. 2.

## II. Die Combinationen von Zink mit Brom und Jod.

Zn | Br | Pt. Kette Nr. I.

Stas'sches Brom von Hrn. Dr. Strecker. — Kette mit Kohlensäure gefüllt.

	<i>K</i>	<i>K</i> ± <i>D</i>
Gleich nach der Herstellung	117,6	—
2 Stunden „ „ „	115,8	—
5 Tage „ „ „	70,4	75,8
22 „ „ „ „	72,4	—
2½ Monate „ „ „	25,2	23,9

Die electromotorische Kraft ist also im Laufe der Zeit sehr stark gefallen. Wahrscheinlich enthielt das Gefäß doch noch Spuren von Wasser, die erst allmählich dem gebildeten Zinkbromid durch die Phosphorsäure entzogen wur-

den. Das Zink zeigte selbst nach  $2\frac{1}{2}$  Monaten noch vollkommenen Metallglanz. Nach den Angaben der chemischen Lehrbücher soll es bei gewöhnlicher Temperatur von trockenem Brom gar nicht angegriffen werden.

Eine zweite Kette mit Stas'schem Brom (zweite Darstellung) gab:

	<i>K</i>	<i>K</i> ± <i>D</i>
Gleich nach Herstellung .	51,4	51,7
Nach $2\frac{1}{2}$ Monaten . . .	12,6	12,2

Das Zink war gleichfalls noch vollständig glänzend.

Der theoretische Werth dieser Kette ist 152; Hr. Exner findet für  $\text{Zn}|\text{Br}|\text{C}$  152.

Es interessirte mich, zu erfahren, wie man zu Werthen von der Höhe der durch Hrn. Exner beobachteten gelangen könne, und ich habe daher auch nach seinem Verfahren (nämlich in freier Luft mit käuflichem Brom, das ich aber über wasserfreier Phosphorsäure destillirt hatte) Bestimmungen gemacht. Ich habe dann thatsächlich Werthe bekommen, welche bis zu 145 hinaufgingen. Die Zahlen nahmen aber bald zu, bald ab, das Zink beschlug sich nach kurzer Zeit mit Wasser, wurde es bewegt, so stieg die electromotorische Kraft. Ich habe dann den Versuch wiederholt in einer U-förmigen Röhre; das Zink befand sich im einen Schenkel, und der Zwischenraum zwischen dem Zink und der Glasröhre war oben mit Paraffin ausgefüllt; der andere Schenkel war an einer Stelle zu einer Capillare ausgezogen, durch welche der Platindraht, der den anderen Pol bildete, hindurchging. Nachdem Brom in die Röhre gegossen war, fand sich die electromotorische Kraft zu 140. Das Electrometer war in fortwährenden Schwankungen, welche mit der Entwicklung von Gasblasen am Zink in Zusammenhang zu stehen schienen.

Ich habe endlich in einem Element von der Form der oben beschriebenen, bei dem also alle Substanzen in Glas eingeschmolzen waren, käufliches Brom statt des Stas'schen

benutzt und als Trockensubstanz gebrannten Kalk genommen. Die electromotorische Kraft fand sich anfangs gleich 143, war aber nach zwei Monaten gleichfalls etwa auf die Hälfte gesunken, obschon das Zink noch ganz glänzend war.

Wie erklären sich diese Erscheinungen? Schon die bis jetzt mitgetheilten Beobachtungen (zu denen später noch andere kommen) genügen, um die von Hrn. Exner ausgesprochene Erklärungsweise „weil der chemische Angriff nachlässt“, auszuschliessen. Die Ursache ist einfach folgende: Zinkbromid ist im trockenen Zustande kein Electrolyt, daher gibt eine Combination mit wirklich trockenem Zinkbromid keinen Strom. Diesen Schluss, dass wasserfreies Zinkbromid nicht electrolytisch leitet, hätte ich gern experimentell bestätigt, und ich hatte auch dahin zielende Versuche begonnen. Die Herstellung von wasserfreiem Zinkbromid ist natürlich nur in vollständig getrockneten und allseitig abgeschmolzenen Gefässen möglich; die Temperatur, bei welcher Zink und Brom sich merklich verbinden, liegt aber so hoch, dass an der hieraus erwachsenden Schwierigkeit meine Bemühungen scheiterten. Ich will aber zum Beweise der vollständigen Unhaltbarkeit von Hrn. Exner's Theorie einen anderen Versuch angeben. Er bezieht sich auf die  $\text{Zn} | \text{J} | \text{Pt}$ -Kette.

Jod wurde in einem U-Rohre einige Zeit lang lebhaft gekocht, dann eine vorher über den Siedepunkt des Jods erwärmte Zinkstange in das Jod getaucht, in das Jod des anderen Schenkels ein Platindraht eingeführt und nun, während das Ganze sich noch abkühlte, sofort begonnen, die electromotorische Kraft der Kette zu messen. Dieselbe zeigte sich so nahezu gleich Null, dass ich metallischen Contact von Zink und Platin innerhalb des Jods vermuthete. Indess liess die Kette keinen für einen sehr empfindlichen Multiplicator merklichen Strom durch. Das Zink wird aber vom Jod so energisch angegriffen, dass — namentlich wenn das Jod geschmolzen ist — in wenigen Secunden tiefe Löcher in eine Zinkstange gefressen sind. Also der lebhafteste chemische Angriff und keine dagegen in Betracht kommende Electricitätsentwicklung! Ueberliess man nun die mit der

Luft, communicirende Kette sich selbst, so ging allmählich die electromotorische Kraft in die Höhe, und zwar, weil das bekanntlich sehr hygroskopische Zinkjodid Wasser aus der Luft anzog. Wurde mittelst eines Glasröhrchens etwas feuchte Luft zu dem Zink geblasen, so stieg die electromotorische Kraft der Kette, das Wasser condensirte sich wahrscheinlich zunächst an dem (kälteren) Zink; hörte man mit dem Einblasen auf, so vertheilte sich das Wasser allmählich gleichmässiger, und die electromotorische Kraft nahm wieder ab. Ich lasse zur Illustration eine Tabelle folgen:

	Electromoto- r Kraft
Gleich nach Herstellung, etwa 4h 45' abends . . . . .	1,9
" " " " " " " " " " " " " " " "	2,5
" " " " " " " " " " " " " " " "	4,6
" " " " " " " " " " " " " " " "	5,8
Etwas feuchte Luft hinzugeblasen . . . . .	20,3
Bald darauf wieder . . . . .	5,5
" " " " " " " " " " " " " " " "	6,5
Feuchte Luft eingeblasen . . . . .	9,7
Noch mehr Luft eingeblasen . . . . .	13,5
Geht wieder zurück auf . . . . .	11,8
" " " " " " " " " " " " " " " "	9,3
Feuchte Luft eingeblasen 5h 50' . . . . .	12,9
Steigt nun von selber weiter 5h 55' . . . . .	19,2
" " " " " " " " " " " " " " " "	51,0
" " " " " " " " " " " " " " " "	53,2
Anderen Morgen 9h . . . . .	81,2
" " " " " " " " " " " " " " " "	86,2
" " " " " " " " " " " " " " " "	91,1
Etwas destillirtes Wasser hinzu . . . . .	114

Es ist nur bei sehr grosser Vorsicht möglich, Werthe für die electromotorische Kraft zu erhalten, welche der Null nahe liegen; leicht aber erhält man Werthe, die etwa 30 oder 50 betragen; beim Werthe 90 ist das Zinkjodid bereits vollständig zerflossen. Hr. Exner hat 96 gefunden, der „theoretische Werth“ ist 98. Wird Hr. Exner auch hier noch schliessen: „Eine weitere Stütze erhält dieser Satz“ (seine Theorie) „durch den Umstand, dass keines der untersuchten Elemente auch nur eine Spur von Polarisation (wie

dies geprüft wurde, davon steht kein Wort in der Arbeit zeigte, wie es doch der Fall sein müsste, wenn ihre Wirkung dem Vorhandensein eines als Verunreinigung dem Brom oder Jod beigemischten Electrolyten zugeschrieben werden sollte. Ausserdem aber müssten in letzterem Falle ja die Werthe der electromotorischen Kräfte ganz andere sein<sup>1)</sup>

Ketten aus Zink und Jod, bei welchen die Substanzen mit Phosphorsäure in Glas eingeschmolzen waren, gaben gleich nach der Herstellung Werthe, welche ungefähr gleich 30 waren und im Laufe von mehreren Monaten auf sechs abfielen. Das einfachste Verfahren ist ordentliches Auskochen des Jods und directes Eintauchen des vorher erhitzten Zinks.

### III. Die Elemente $\text{Ag}|\text{Br}|\text{Pt}$ und $\text{Ag}|\text{AgBr}|\text{Br}|\text{Pt}$ .

#### Kette Nr. 2. Electrolytisches Silber.

	$K$	$K \pm D$
1 Stunde nach Herüberdestilliren des Broms . . . . .	79,6	79,5
Nach 6 Wochen . . . . .	—	79,3
	85,6	85,2

#### Kette Nr. 3. Electrolytisches Silber.

	$K$	$K \pm D$
$\frac{1}{2}$ Stunde nach Herüberdestilliren des Broms . . . . .	78,8	78,2
Nach 3 Tagen . . . . .	82,7	82,4
„ 6 Wochen . . . . .	86,4	—
	84,5	—
	83,7	—

#### Kette Nr. 1. Käufliches reines Silber.

	$K$	$K \pm D$
Kurz nach Herüberdestilliren des Broms . . . . .	84,9	85,4
Nach 6 Stunden . . . . .	85,0	—
„ 24 Stunden . . . . .	85,8	85,4
„ 8 Tagen . . . . .	84,3	—

1) l. c. p. 423.

Die electromotorische Kraft der Kette wächst also, ebenso wie die der  $\text{Pb}|\text{Br}|\text{Pt}$ -Kette, allmählich bis zu einem constanten Werth. Um denselben mit Sicherheit zu kennen, habe ich in ähnlicher Weise, wie früher bei der Bleikette beschrieben wurde, Silber mit Bromsilber umschmolzen, dieses auf eine Schicht festgestampft Bromsilber aufgesetzt, das Ganze im zugeschmolzenen Element ausgetrocknet, dann erst Brom eingefüllt und dasselbe nach einiger Zeit von der Phosphorsäure zum Bromsilber herüberdestillirt. Für diese Kette  $\text{Ag}|\text{AgBr}|\text{Br}|\text{Pt}$  fand sich die Zahl 85,6, welche mit den sonst beobachteten Maximalwerthen befriedigend stimmt.

Da Bromsilber in Wasser unlöslich ist, so wird Wassergehalt des Broms nichts an der electromotorischen Kraft ändern. Um dies zu controliren, und ausserdem aus später anzuführenden Gründen, habe ich noch untersucht:

Silber | Bromwasser | Platin.

$K$	$K \pm D$
84,3	83,6
83,9	83,3
83,3	—

Auch noch bei sehr geringem Gehalt der Lösung an Brom fand sich der gleiche Werth.

Mit Ausschluss der unterhalb 80 liegenden Zahlen (Anfangswerthe) ergibt sich im Mittel aus 17 Bestimmungen:

$$\text{Ag}|\text{Brom}|\text{Pt} = 84,8.$$

Der „berechnete“ Werth ist 91, wie ihn auch Hr. Exner und zwar sofort nach dem Eintauchen findet.

IV. Die Elemente  $\text{Ag}|\text{J}|\text{Pt}$  und  $\text{Ag}|\text{AgJ}|\text{J}|\text{Pt}$ .

Kette Nr. I. In geschmolzenes, zweifach sublimirtes Jod wurde käufliches reines Silber und Kohle (Retortenkohle) eingetaucht und das Ganze der Abkühlung überlassen. Es fand sich:

$K$	$K \pm D$
61,1	60,7
—	60,3



Kette Nr. II. Käufliches reines Ag|AgJ geschmolzen |J|C.

<i>K</i>	<i>K ± D</i>
61,1	60,8

Kette Nr. III. Electrolytisches Silber, Stas'sches Jod. Substanzen eingeschmolzen; Trockensubstanz Phosphorsäure.

	<i>K</i>	<i>K ± D</i>
Nach Herübersublimiren des Jods	60,2	60,6
„ 3 Tagen . . . . .	59,1	59,3

Kette Nr. IV. Ebenso wie Nr. III. Das Jod hatte etwa zwei Monate lang mit der Phosphorsäure zusammen gelegen, ehe es sublimirt wurde.

<i>K</i>	<i>K ± D</i>
62,6	62,2

Das Mittel der Zahlen (aus 11 Bestimmungen) ist 60,7; Hr. Exner findet 56, berechnet ist 55. Es ist mir nicht gelungen, einen Werth zu erhalten, welcher wesentlich unterhalb des mitgetheilten Mittelwerthes gelegen hätte. Bei dem Process (Ag, J) müsste also — unrichtig bestimmte Wärmetönung scheint ausgeschlossen zu sein — mehr Stromenergie entstehen, als der Wärmetönung proportional ist. Ich kann dafür keine befriedigende Erklärung geben, muss aber betonen, dass die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung weit über die hier möglichen Fehler geht.

Es fand sich ferner:

für Ag sehr wenig Jod in Alkohol Pt . .	56,6; 57,3
„ Ag Jod in Wasser Pt . . . . .	56,5; 56,4
„ Ag wenig Jod in Schwefelkohlenstoff Pt	56,5; 58,0.

Durch die Gegenwart eines Lösungsmittels scheint danach die electromotorische Kraft etwas zu fallen.

Ich habe wiederholt den folgenden Versuch gemacht: Ein Streifen reines Silber wurde in Jodsilber, welches in ein Glasröhrchen eingeschmolzen war, mit seinem unteren Ende eingetaucht, so jedoch, dass er nach allen Seiten hin mindestens 5 mm vom Glas abstand; ich liess dann erkalten

und löste das Glas vom Jodsilber ab. Der aus dem Jodsilber herausragende Theil des Silberstreifens wurde mit einer Glasröhre umgeben und das untere Ende derselben mit Colophoniumkitt luftdicht auf das Jodsilber aufgesetzt. An das obere Ende des Silberstreifens war ein Platindraht angeschmolzen; dieser wurde in die Glasröhre luftdicht eingeschmolzen. So war das Silber unten dick mit Jodsilber umgeben, oben aber vollständig von der äusseren Luft abgeschlossen. Es wurde dann Jod in einem Glasgefässe geschmolzen, einige Zeit gekocht, ein Platindraht in das Jod eingetaucht, und dann liess man das Jod erkalten. Auf das erkaltete Jod wurde nun der Jodsilberklumpen aufgepresst; man bekam somit ein Element  $\text{Ag}|\text{AgJ}|\text{J}|\text{Pt}$ . Wenn nun das Jodsilber auch kleine capillare Risse hat, so kann man doch auf eine Versuchsdauer von jedenfalls einigen Minuten wenn nicht Stunden garantiren, dass kein Joddampf das Silber erreicht; hier ist also eine directe chemische Action vollständig ausgeschlossen. Trotzdem gab eine solche Kette stets und sofort denselben Werth wie die Combination  $\text{Ag}|\text{J}|\text{Pt}$ ; z. B. war die oben angeführte Kette Nr. II in der angegebenen Weise hergestellt. Dieser eigentlich überflüssige Versuch genügt, die Theorie des Hrn. Exner zu widerlegen.

#### V. Die Elemente von Quecksilber mit Brom und Jod.

$\text{Hg}|\text{J}|\text{Pt}$ . Stas'sches Jod.

	<i>K</i>	<i>K</i> ± <i>D</i>
Nach Herübersublimiren des Jods {	47,4	49,2
	48,6	—
Nach 26 Stunden . . . . .	47,8	48,4
„ 48 „ . . . . .	48,0	49,0

Mittel 48,2.

Hr. Exner findet 55 und berechnet 68; seiner Berechnung ist die falsche Annahme zu Grunde gelegt, dass sich Quecksilberjodid bilde. Es bildet sich an der Grenzfläche mit Quecksilber — und nur auf diese kommt es an — selbstredend, was ich aber auch noch zum Ueberfluss beweisen werde, Quecksilberjodür, und Hr. Exner hätte demnach 96,9

berechnen müssen. Hr. Exner spricht die Vermuthung aus, dass die Differenz zwischen der Beobachtung und der von ihm berechneten Zahl sich daraus erkläre, dass er mit der Verbindungswärme für das feste Jod gerechnet habe, während bei den vorliegenden Versuchen das Jod, bevor es das Metall angreift, jedenfalls verflüssigt werde. Hr. Exner hat dabei übersehen, dass dann die Verbindungswärme und daher die Differenz, welche er ausgleichen will, noch grösser würde.

Hg|Br|Pt.

Nr. I.		Nr. II.	
<i>K</i>	<i>K</i> ± <i>D</i>	<i>K</i>	<i>K</i> ± <i>D</i>
61	64,2	56,8	57,5
—	62,7	—	57,8
		54,3	54,8

Das Quecksilber wird vom Brom sehr energisch angegriffen, und es bildet sich rasch eine stetig fortwachsende sehr feste Salzschrift, welche bald den Platindraht erreicht. Sobald dies eingetreten ist, sinkt die electromotorische Kraft. In Kette Nr. II war deshalb zwischen Quecksilber und Platindraht ein Asbestpfropfen eingeschoben. Die beim Aufsaugen in dem gebildeten Salz entstehenden Diaphragmenströme, sowie die schlechte Leitungsfähigkeit desselben werden, sobald die Salzschriften eine gewisse Dicke erreicht haben, sehr störend. Die Werthe von Nr. I halte ich für die zuverlässigeren. Es ergibt sich aus ihnen im Mittel der Werth 63, welcher sich auch auf anderem Wege sehr nahe bestätigt findet.

#### VI. Die Combinationen Al|Br|Pt und Pt|Br|C.

Für Al|Br|Pt gibt Hr. Exner gleichfalls Werthe, welche sowohl unter einander als mit seiner Theorie vorzüglich übereinstimmen. In wasserhaltiges Brom kann man Aluminium einführen, ohne dass ein zu stürmischer Angriff erfolgt; es bilden sich Gasblasen und eine weissliche, rasch zerfliessende Salzschrift. Dagegen ist es mir nicht möglich gewesen, an Ketten aus Aluminium und wasserfreiem Brom Messungen anzustellen. Das Brom verbindet sich so-

fort unter Entwicklung röthlich erscheinenden Lichtes explosionsartig mit dem Aluminium; dasselbe schwillt zu einer dunkeln schwammigen Masse auf, es entstehen Ströme, über deren Ursprung (ob Ströme, wie in einer Hydrokette, oder Diaphragmenströme) ich mir kein sicheres Urtheil bilden konnte, und welche so schwankend sind, dass an Messungen nicht zu denken ist. Dass jedenfalls sehr energische Diaphragmenströme mitspielen, scheint mir kaum einem Zweifel zu unterliegen, da es mir vorgekommen ist, dass das Electrometer über 250<sup>sc</sup> Ausschlag gab, was einer electromotorischen Kraft von etwa 5 D. entsprechen würde. Mit Magnesium, welches keine besseren Resultate versprach, habe ich keine Versuche angestellt.

Hr. Exner gibt an, dass auch Kohle|Brom|Platin eine Kette bilden, in welcher Platin negativer Pol ist; ihre electromotorische Kraft soll 0,04 D. sein, woraus Hr. Exner die Bildungswärme von Platinbromür berechnet. Da ich in meinen Elementen immer Platin anstatt der Kohle benutzt habe, so wäre nach diesen Beobachtungen des Hrn. Exner noch eine Correction an meinen Messungen anzubringen gewesen, damit ich aus ihnen die electromotorische Kraft von Combinationen, in denen nur ein chemischer Process verläuft (wie bei den Ketten, in denen Kohle positiver Pol ist), ableiten konnte. Ich habe diese Correction mit möglichster Sicherheit bestimmen wollen und zu diesem Zweck Elemente von folgender Form benutzt (Fig. 3).

Die Platindrähte  $a_1$  und  $a_2$  sind fest um die Kohlelektrode gewickelt;  $c$  ist der als andere Electrode dienende Platindraht. In die Kette wurde etwas Phosphorsäureanhydrid gebracht, das offene Ende zu einer Capillaren ausgezogen und dann, luftleer gepumpt, etwa 18 Stunden lang in einem Sandbade auf weit über 360° er-

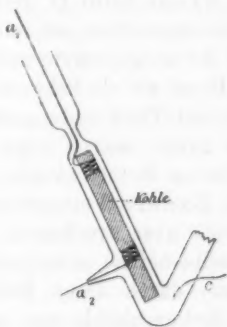


Fig. 3.

wärmt; die allmählich noch sich entwickelnden kleinen Luftmengen wurden mittelst der Quecksilberluftpumpe immer wieder weggeschafft, übrigens wurde nicht abgewartet, bis die Kohle gar kein Gas mehr abgab. Nachdem die Kette mit trockener Luft von Atmosphärendruck gefüllt war, wurde der Widerstand der Kohle zwischen den beiden Platindrähten  $a_1$  und  $a_2$  bestimmt, dann erst Brom in die Kette aufgesogen und nun wie früher verfahren.

Nach dem Ueberdestilliren des Broms wurde sofort die electromotorische Kraft untersucht, und nachdem die Kohle mit Brom befeuchtet war, wiederum der Widerstand derselben zwischen den Drähten  $a_1$  und  $a_2$  bestimmt. Er fand sich genau gleich dem der trockenen Kohle, zum Beweis, dass zwischen dem Draht  $a_1$  und der Kohle sich keine Bromschicht angesammelt hatte. Die Combination musste also eine electromotorische Kraft zeigen, welche den Contacten  $C|Br|Pt$  entsprach, und es war nicht zu befürchten, dass man etwa  $Pt|Br|C|Br|Pt$ , welches stets gleich Null sein müsste, beobachtete. Trotzdem ergab sich die electromotorische Kraft innerhalb der möglichen Ablesungsfehler gleich Null, d. h. jedenfalls kleiner als 0,002 bis 0,001 D., während Hr. Exner 0,040 D. gefunden hat. Versuche, in derselben Weise angeordnet, mit reinem, sibirischem Graphit misslingen, weil der ausgepumpte und getrocknete Graphit in Berührung mit Brom wie ein Schwamm aufschwohl und zerfiel. Härterer, d. h. mit Thon untermengter Bleistiftgraphit (Nr. 3) zerfiel zwar nicht, zerriss aber an der Stelle  $a_2$ . Ich bin daher wieder zu Retortenkohle zurückgekehrt und habe, um mich Hrn. Exner's Versuchsform mehr anzuschliessen, mit käuflichem, aber trockenem Brom einige Versuche gemacht. Dasselbe befand in sich einer aufrecht stehenden, oben offenen Röhre, durch deren Boden ein Platindraht hindurchging. Die Retortenkohle war nicht besonders ausgeglüht. Beim ersten Eintauchen derselben zeigte sich eine geringe Potentialdifferenz, und zwar so, als ob die Kohle negativer Pol eines Elementes wäre (Diaphragmenstrom?), während sie nach Hrn. Exner positiver Pol sein sollte. In der That wurde sie zum positiven Pol, als man die Kohle heraus-

genommen, das an ihr haftende Brom hatte verdampfen lassen und sie nun wieder eintauchte. Wenn man dies einigemal wiederholte, so wuchs die Potentialdifferenz bis zu einem Grenzwerte, der nur wenig unterhalb derjenigen electromotorischen Kraft gelegen ist, die man erhält, wenn die Kohle vor ihrem Eintauchen mit etwas destillirtem Wasser befeuchtet wird. Die ganze Erscheinung erklärt sich daraus, dass die Kohle beim Verdampfen des Broms, wie man direct fühlen kann, sich stark abkühlt und dabei mit Wasserdampf beschlägt. Daher bekommt man auch an verschiedenen Tagen verschiedene Werthe; z. B. erhielt ich in einer Beobachtungsreihe zu Anfang März den Maximalwerth 0,08 D.; mit denselben Materialien dagegen am 21. April, einem ausnahmsweise warmen und trockenen Tage (Temperatur im Schatten 22° C.) nur 0,04 bis 0,06 D., welche letzteren Werthe sehr nahe mit denen des Hrn. Exner übereinstimmen.

Ich gebe zur Illustration eine Beobachtungsreihe:

		Electr. Kraft (D = 100)
Kohle frisch eingetaucht . . . . .	— 0,6 . .	Pt pos. Pol
„ herausgenommen, wieder eingetaucht . . . . .	— 0,2 . .	„ „ „
„ nochmals herausgen., „ . . . . .	+ 2,4 . .	„ neg. „
„ „ „ „ „ . . . . .	+ 3,0 . .	fällt in 15' auf 2,2
„ „ „ „ „ . . . . .	+ 8,0	
„ „ „ „ „ . . . . .	+ 8,0	
„ mit dest. Wasser befeuchtet . . . . .	+ 11,6	

Ich setze nach diesen Ergebnissen die electromotorische Kraft  $Pt|Br|C$  unbedenklich gleich Null und halte mich für berechtigt, die Werthe einer Kette Metall|Brom|Platin als identisch mit denen von Metall|Brom|Kohle anzusehen, d. h. die von mir für die früher angeführten Combinationen erhaltenen Werthe zu betrachten als das Maass der electromotorischen Kraft von Ketten, in welchen nur ein einziger electrochemischer Process vor sich geht.

## VII. Die Combination $Ag|Cl|C$ .

Ich habe endlich auch versucht, flüssiges Chlor an Stelle des Broms zu verwenden. An eine lange und weite Röhre

war eine engere, in der sich die Electroden (Ag und Pt) übereinander befanden, angeschmolzen. Die lange Röhre wurde nach der von Mohr gegebenen Vorschrift mit einem Gemenge von Kochsalz, Braunstein und saurem schwefelsauren Kali gefüllt; über dieser Mischung war ein Asbestpfropfen, darauf eine circa 40 cm lange Schicht Chlorcalcium und endlich wieder ein Asbestpfropfen angebracht. Die Mischung wurde in einem tiefen Wasserbad auf 80° C. erwärmt, die Stelle, wo das Chlor sich condensiren sollte, mit einer Kältemischung umgeben. Diese Methode ist sehr zu empfehlen. Es sammelte sich eine ziemlich grosse Quantität flüssiges und, soweit man sehen konnte, wasserfreies Chlor an (dasselbe greift, nebenbei bemerkt, Platin bei gewöhnlicher Temperatur stark an). Es war aber nicht möglich, Messungen anzustellen. In dem grossen, theilweise mit porösen Substanzen gefüllten Raum finden fortwährende Strömungen statt, und diese transportiren grosse Mengen von Electricität. Das flüssige Chlor ist aber ein so schlechter Leiter, dass die auf demselben sich verdichtende Electricität sich nicht sofort auf dem ganzen System Ag|Cl|Pt mit constantem Potential verbreitet; daher traten fortwährend beträchtliche Schwankungen im Stand des Electrometers ein; noch Stunden lang nach Entfernung der Mischung aus dem Wasserbade wuchs die Menge des flüssigen Chlors; nach einigen Tagen destillirte dasselbe wieder zurück.

Da Silber in Bromwasser gegen Platin dieselbe electromotorische Kraft (oder wenigstens sehr nahe) ergibt, wie in trockenem Brom; da ferner Silber in einer Lösung von Jod in Wasser, Alkohol und Schwefelkohlenstoff einen Werth zeigt, der nur wenig von dem in trockenem Jod erhaltenen abweicht, so darf man nach Analogie wohl annehmen, dass auch Silber in Chlorwasser gegen Kohle (Platin wird wahrscheinlich davon angegriffen) denselben oder nahezu denselben Werth gibt wie in flüssigem Chlor. Ich habe diesen Werth bestimmt und gefunden:

Ag|Chlorwasser|Graphit = 97,1

Ag|AgCl|Chlorwasser|Graphit = 96,4.



## § 4. Polarisation der geschmolzenen Silberhaloide.

Eine Controle der electromotorischen Kräfte von Silber gegen Kohle in Brom, Jod und Chlor erhält man durch Bestimmungen der Polarisation der Silberhaloide zwischen nicht angreifbaren Electroden. Sollen aber die nach beiden Methoden gewonnenen Zahlen vergleichbar sein, so müssen die Polarisationsbestimmungen gleichfalls bei gewöhnlicher Temperatur ausgeführt werden, da die Verbindungswärme  $q$  Function der Temperatur ist, nämlich:

$$q_t = q_{t_0} + \int_{t_0}^t (c_{12} - c_1 - c_2) dt,$$

worin  $c_1$  die spec. Wärme des einen Bestandtheils

$c_2$  " " " " zweiten "

$c_{12}$  " " " der Verbindung der Körper 1 und 2 bezeichnet.

Die spec. Wärmen sind auf chemisch äquivalente Mengen bezogen (also sog. Atom- resp. Molecularwärmen); in den Grössen  $c_n$  sind alle auf dem Intervall  $t_0$  bis  $t$  vorkommenden Wärmequantitäten, die wegen etwaiger Aenderung des Aggregatzustandes des Körpers  $n$  aufgenommen werden, mit einbegriffen zu denken.

Da  $(c_{12} - c_1 - c_2)$  für alle drei Körper positiv ist, so sollte die Verbindungswärme und damit die Polarisation, wenn auch nicht sehr bedeutend, zunehmen mit steigender Temperatur (z. B. bei AgCl um 0,035 D. bis zum Schmelzpunkt), speciell beim Uebergang aus dem festen in den flüssigen Zustand sollte sie wegen der latenten Schmelzwärme plötzlich wachsen (um 0,056 D., wenn man sie nur gleich  $\frac{1}{4}$  von derjenigen des Wassers, die von vielen Salzen nahezu erreicht wird, setzt).

Hr. Exner hat in einer früheren Untersuchung auch die Polarisation in geschmolzenem Chlor-, Brom- und Jodsilber bestimmt. Er sagt darüber: Die Substanzen „wurden in einem Porzellanschälchen geschmolzen und in diesem Zustande zwischen reinen Graphitelectroden der Electrolyse

unterworfen.“<sup>1)</sup> Zur Berechnung benutzt Hr. Exner die Verbindungswärmen bei gewöhnlicher Temperatur und findet zwischen den so berechneten und den beobachteten Zahlen eine befriedigende Uebereinstimmung. Bei welcher Temperatur die Polarisirung bestimmt wurde, darüber sagt Hr. Exner nichts; dagegen theilt er an einem anderen Orte mit, dass ein ganz langsames Umlegen des Commutators genüge, um noch den ganzen Betrag der Polarisirung zu finden<sup>2)</sup>; obschon ich nirgends deutlich ausgesprochen finde, ob Hr. Exner constante Ablenkungen oder erste Ausschläge seines Electrometers beobachtet hat, so glaube ich doch, das erstere annehmen zu müssen, da Hr. Exner sagt: „Dabei kann man selbstverständlich den Apparat (den Commutator), wirklich als Wippe mit schnellem Wechsel benutzen, wenn es etwa durch zu rasches Abnehmen der Polarisirung selbst im ungeschlossenen Kreise nöthig werden sollte.“

1. Chlorsilber. — Wenn ich das Salz im geschmolzenem Zustande erhielt, während die Polarisirung bestimmt wurde, so fiel während der Zeit, welche das Electrometer zur Beruhigung seiner Schwingungen gebrauchte, die Polarisirung sehr stark; die Zahlen wurden sehr inconstant, ihre Wahl willkürlich. Erste Ausschläge konnte ich nicht benutzen, da durch das Umlegen meiner Wippe (eine Pohl'sche Wippe aus eisernen, mit Quecksilber gefüllten und in Paraffin eingesetzten Näpfen) momentane Ladungen des Electrometers entstanden; diese blieben auf demselben, wenn die Quadranten nicht leitend verbunden wurden; daher konnte ich auch nicht das Electrometer durch eine momentane Verbindung mit der polarisirten Zelle laden, dann den Electrometerkreis wieder öffnen und nun die Einstellung der Electrometernadel abwarten. Es wurde daher in folgender Weise verfahren: Durch das Chlorsilber, welches in einem kleinen Porzellantiegel geschmolzen war, ging der Strom von zwei bis drei Bunsen'schen Elementen; es wurde dann die Flamme unter dem Tiegel weggezogen, sodass sich das Salz abkühlte, der

1) F. Exner, Wied. Ann. 6. p. 357. 1879.

2) F. Exner, Wied. Ann. 5. p. 392. 1878.

Strom aber solange geschlossen gehalten, bis das Salz erstarrt war. Erst dann wurde er unterbrochen und die polarisirte Zelle mit dem Electrometer verbunden. Als Kathode diente ein Silberblech, um sicher wenigstens an dieser Electrode die günstigsten Bedingungen zu haben. Da ferner Chlorsilber beim Schmelzen leicht etwas metallisches Silber in Form einer dünnen Haut an der Oberfläche ausscheidet, so wurde ein Strom trockenes Chlorgas über das geschmolzene Salz geleitet und anfangs während der Polarisationsbestimmungen unterbrochen, später auch während derselben darüber geleitet. Ich denke, günstigere Bedingungen, um das Maximum der Polarisation zu erhalten, sind nicht herzustellen. In der That erhält man unter solchen Umständen Werthe für die Polarisation, welche längere Zeit hindurch nicht abfallen, vielmehr während der Abkühlung des Salzes noch steigen, und so deutlich, trotz des zeitlichen Abklingens, die Zunahme der Polarisation mit abnehmender Temperatur zeigen. Im geschmolzenen, nicht electrolysirten Salz zeigten beide Electroden keine merkliche Potentialdifferenz.

Ich gebe zunächst einige Zahlen, welche zeigen, welche niedrigen und schwankenden Werthe man erhält, wenn der polarisirende Strom noch kurz vor dem Erstarren unterbrochen wird, oder wenn man gar im geschmolzenen Salz die Bestimmungen zu machen versucht.

Beide Electroden aus Graphit; bei Stromöffnung Flamme weggenommen 76,5  
 " " " " ; Strom bis zum Erstarren hindurch. . . 81,3  
 Eine Electrode Ag; andere Graphit; Strom kurz vor Erstarren geöffnet 60,8

#### Neue Portion Chlorsilber.

Kathode: Ag; Anode: sibirisch. Graphit; Strom bis z. Erstarren hindurch 86,3  
 " " " " ; Salz nicht erstarren gelassen . 31,5  
 " " " " ; Strom bis z. Erstarren hindurch 88,1

Auf diesem Wege sind also keine brauchbaren Zahlen zu erhalten. Unterbricht man aber den polarisirenden Strom erst, wenn das Salz vollständig erstarrt ist, und lässt es sich dann auf Zimmertemperatur abkühlen, so erhält man constante Werthe, wie die folgenden Zahlen zeigen.

{ Chlor über das geschmolzene Salz geleitet.  
Polarisirende Kette: 3 Bunsen.  
Kathode: Ag; Anode: sibirischer Graphit.

Strom bis zum Erstarren hindurch; gleich nach Erstarren . . . .	83,4
Nach vollständigem Erkalten	97,4
Strom bis zum Erstarren hindurch; gleich nach Erstarren . . . .	88,7
Nach vollständigem Erkalten	99,3
Strom bis zum Erstarren hindurch; gleich nach Erstarren . . . .	89,0
Nach vollständigem Erkalten	98,7
Strom erst etwas nach dem Erstarren geöffnet . . . . .	93,8
Nach vollständigem Erkalten	99,0

Die höchsten Zahlen für die Polarisation, nachdem das Salz vollständig erkaltet war, geben also 99 und stimmen mit den für die Kette Ag|AgCl|Chlorwasser Kohle gefundenen Werthen (96 bis 97) sehr nahe überein. Hr. Exner hat 117 gefunden, 121 berechnet.

2. Bromsilber. — Es wurde der Strom hindurchgelassen, bis das Salz vollständig erstarrt war; ich gebe den Werth, welchen das Electrometer anzeigte, sobald seine Schwingungen beruhigt waren, dahinter den Maximalwerth nach vollständiger (oder fast vollständiger) Abkühlung. Die Kathode bestand aus Silber, die Anode aus Graphit.

Erste Einstellung	Maximum	Erste Einstellung	Maximum
72,3	77,9	—	77,0
74,5	—	73,2	—
73,4	—		

Hr. Exner hat 90 beobachtet, 93 berechnet.

3. Jodsilber. — Der Strom wurde anfangs nach dem vollständigen Erstarren des Salzes unterbrochen, die Polarisation aber bestimmt, während das Salz noch warm war. Sie fand sich: 44,6; 44,6; 41,5.

Das Salz leitet auch im festen Zustande so gut, dass längere Zeit nach dem Erstarren ein ganz unempfindliches Galvanoskop (5 S.-E. Widerstand, unastatische Nadel) noch deutliche Ablenkungen (kurz nach dem Erstarren noch 15°) anzeigte. Es wurde daher immer wieder nach der Ablesung des Electrometers der polarisirende Strom geschlossen, wäh-

rend das Salz sich weiter abkühlte, und dann die Polarisation wieder von neuem bestimmt. Es fanden sich folgende Zahlen:

Polarisation berechnet aus		Polarisation berechnet aus	
erster Einstellung, bald nach Erstarren	Maximalablenkung nach Erkalten	erster Einstellung, bald nach Erstarren	Maximalablenkung nach Erkalten
41,5	58,9	40,4	62,9
48,4 <sup>1)</sup>	—	39,8	—
46,3	58,1 (nach 7 Min.)	38,7	—
41,0	(64,7)	41,9	—

Die Zahlen zeigen die sehr starke Aenderung der Polarisation mit der Temperatur; sie sind noch aus einem anderen Grunde von Interesse. Ich habe die Vermuthung ausgesprochen, dass man die Wärmetönungen von Metall mit gasförmigem Jod in die Rechnung einführen müsse; man würde sonst zu dem sonderbaren Resultate kommen, dass (Ag, J) mehr electricische Energie liefert als seiner Wärmetönung äquivalent ist. Bei höheren Temperaturen ist nun offenbar die Verbindungswärme mit gasförmigem Jod einzuführen; wäre bei niederer Temperatur die Verbindungswärme mit festem Jod zu nehmen, so müsste während des Abkühlens bei 200, resp. 127° (200° ist der Siedepunkt, 127° der Schmelzpunkt des Jods) die Polarisation plötzlich abnehmen. Dies ist nicht der Fall; die Polarisation steigt fortwährend, scheint sogar bei derjenigen Temperatur, wo die Umwandlung des Jodsilbers in die krystallinische Modification (145°C.) erfolgt, stark zu wachsen und geht auch dann noch, d. h. durch die Temperatur des schmelzenden Jods, zu stetig wachsenden Werthen fort. Ich gebe ein Beispiel. In der ersten Horizontalreihe steht die Ablenkung, welche der polarisirende Strom am Multiplicator hervorbrachte; sie gibt ein ungefähres Maass für die Polarisation; in der zweiten Horizontalreihe findet sich die constante Ablenkung, welche das Electrometer für die Grösse der Polarisation angab; in der dritten die Polarisation ( $D = 100$ ). Die Ablenkung 0° des Multiplicators tritt ein ungefähr bei derjenigen Temperatur, bei welcher

1) Etwas später als die Zahl der ersten Reihe bestimmt.

das Jodsilber in die krystallinische Modification übergeht<sup>1)</sup> (140 bis 150° C.).

	Gleich nach Erstarren	Polarisirender Strom von Neuem geschlossen				
		$J = 15^\circ$	$J = 4^\circ$	$J = 0^\circ$	2 Min.	18 Min. später
Electr.	19,5 <sup>sc</sup>	22,8 <sup>sc</sup>	24,3 <sup>sc</sup>	25,0 <sup>sc</sup>	28,4 <sup>sc</sup>	30,6 <sup>sc</sup>
Pol.	41,0	48,0	51,0	52,6	59,8	64,4

Hr. Exner hat 54 beobachtet, 56 berechnet; der von mir beobachtete Werth liegt ausnahmsweise einmal höher als der des Hrn. Exner; freilich liegt mein Beobachtungswerth auch über dem theoretischen.

#### § 5. Vergleichung meiner Resultate mit denen des Hrn. Exner.

Soweit meine Versuche sich auf diejenigen des Hrn. Exner beziehen, ergibt sich Folgendes:

1. Qualitativ. Die Schlussfolgerungen des Hrn. Exner sind von ihm nicht allein nicht bewiesen, sondern auch geradezu falsch. Wenn Hr. Exner sagt: „Es ist gegenwärtig kein Fall bekannt von chemischer Action ohne Electricitätsentwicklung und ebensowenig einer von Electricitätsentwicklung ohne chemische Action“, so ist dies unrichtig; im Gegentheil, es sind und zwar fast unzählige Fälle bekannt von Electricitätsentwicklung ohne chemische Action (wohlbemerkt, ohne chemische Action im Sinne des Hrn. Exner) und umgekehrt Fälle von sehr starker chemischer Action ohne Electricitätsentwicklung. Wenn er ferner sagt, wolle man das Spannungsgesetz aufrecht erhalten, so müsse man annehmen, dass diesem Gesetz die verschiedenartigsten, nach der seitherigen Auffassung gar nicht mehr zu charakterisirenden Körper folgten, so muss man wirklich auf den Verdacht kommen, es sei Hrn. Exner niemals klar geworden, dass es lediglich darauf ankommt, ob die betreffenden Körper mit oder ohne Electrolyse leiten. Was speciell seine

<sup>1)</sup> Ich weiss dies aus Untersuchungen von Hrn. W. Kohlrausch. vgl. den folgenden Aufsatz in diesem Heft.

Versuche betrifft, so habe ich im Vorstehenden nachgewiesen, dass der Potentialsprung, welcher durch gewisse binäre Verbindungen ( $\text{ZnJ}_2$ ,  $\text{ZnBr}_2$ , die in vollständig wasserfreiem Zustande nicht electrolytisch leiten) in einem geschlossenen Leiterkreise hervorgerufen wird, umsomehr der Null sich nähert, je vollkommener diese Stoffe vom Wasser befreit sind.

2. Quantitativ. a) Zwischen den Beobachtungsergebnissen des Hrn. Exner, die Polarisation geschmolzener Silberhaloide betreffend, und seinen Bestimmungen über die electromotorische Kraft von Silberhalogenketten könnte der unbefangene Urtheilende leicht einen Widerspruch erblicken wollen. Nimmt man aber auch an, Hr. Exner habe, ohne etwas davon zu erwähnen, in beiden Fällen bei gewöhnlicher Temperatur gemessen, sodass ein derartiger Widerspruch zwischen seinen eigenen Beobachtungsergebnissen nicht besteht, so bleibt doch noch ein solcher zwischen seinen Resultaten und den meinigen. Für die Polarisation von  $\text{AgCl}$  und  $\text{AgBr}$  hat Hr. Exner Werthe gefunden, welche mit seinen berechneten gut übereinstimmen und viel grösser sind, als die von mir erhaltenen; nun habe ich aber unter denjenigen Bedingungen gearbeitet, welche die überhaupt erreichbaren höchsten Werthe liefern müssen. In der That geht bei  $\text{AgJ}$  mein Werth auch erheblich über den von Hrn. Exner gefundenen. Diese Widersprüche zwischen unseren Beobachtungsergebnissen werden hoffentlich durch detaillirtere Mittheilungen des Hrn. Exner bald aufgeklärt werden. Es ist dies um so leichter, als es sich z. B. bei Chlorsilber um einen Körper handelt, dessen absolut reine Darstellung so wenig Schwierigkeiten bietet, dass Verschiedenheit des Materials vollständig ausgeschlossen werden kann.

b) In anderen Fällen (z. B. Ketten von  $\text{Ag|J}$ ;  $\text{Ag|Br}$ ;  $\text{Pb|Br}$ ) sind die Angaben des Hrn. Exner fehlerhaft; wie ich vermute, weil seine Materialien nicht rein waren.

c) In noch anderen Fällen (Ketten aus  $\text{Zn|Br}$ ;  $\text{Zn|J}$ ) hat Hr. Exner vollständig falsche Werthe erhalten, weil er den Wasserdampf der Luft nicht ausgeschlossen hat. Ein eigenthümliches Zusammentreffen von Verunreinigungen hat.



Hrn. Exner Werthe geliefert, welche mit seiner Theorie theilweise absolut, theilweise fast vollkommen übereinstimmen. Etwas mehr oder etwas weniger Verunreinigung würde die Werthe nach der einen oder anderen Seite von seinen theoretisch berechneten entfernt haben.

d) In anderen Fällen (Pt|Br|Kohle) habe ich seine Beobachtungen gleichfalls nicht bestätigen können, wenn die Materialien nur einigermassen sorgfältig behandelt wurden, nämlich wenn die Kohle lufttrocken war. Dagegen geben dieselben Materialien Spannungsdifferenzen von dem Sinn und der Grösse der von Hr. Exner beobachteten, wenn man sie absichtlich störenden Einflüssen (Niederschlag von atmosphärischem Wasser durch die Verdunstungskälte des Broms) aussetzt, denen sie Hr. Exner nach der Art, in der er experimentirt hat, unabsichtlich wahrscheinlich ausgesetzt hat.

e) Nur in einigen Fällen (nämlich da, wo Hr. Exner selbst Differenzen von seiner Theorie angibt) habe ich, wenigstens qualitativ, seine Beobachtungen bestätigt gefunden; und auch hier sind die Abweichungen der Beobachtungen von Hr. Exner's Theorie viel grösser, als er glaubt; die chemischen Processe, welche thatsächlich stattfinden, sind andere und mit fast der doppelten Wärmetönung verlaufende, als die von Hr. Exner vorausgesetzten. Obschon diesfüglich niemand bezweifeln kann, werde ich im zweiten Theile dieser Arbeit es zu allem Ueberfluss auch noch experimentell nachweisen.

---

Hrn. Exner hat sich wiederholt die Frage aufgedrängt, und er hat sie auch wiederholt abdrucken lassen: „Wie lange wird es wohl dauern, bis die Anhänger der Contacttheorie zugeben werden, dass die übrigen Leiter eben nur deshalb dem sogenannten Spannungsgesetze zu gehorchen scheinen, weil bei ihnen aus Mangel an chemischer Action überhaupt keine Spannungsdifferenzen auftreten?“

Hier dürfte Folgendes zu berücksichtigen sein: Für galvanische Ketten sind wir auf Grund der mechanischen Wärme-

theorie a priori berechtigt, nach einer numerischen Beziehung zwischen den Wärmetönungen und der electromotorischen Kraft der Kette zu fragen. Die electromotorische Kraft der Kette kann aus einem einzigen, sie kann auch — und dies ist die gewöhnliche Auffassung — aus mehreren Summanden bestehen, das Potentialgefälle der offenen Kette also nur an einer Stelle oder an mehreren liegen. Ob ersteres oder letzteres der Fall ist, darüber lehren die Beziehungen zwischen Wärmetönung und electromotorischer Kraft — sie mögen sein, wie sie wollen — nichts; ebenso ist es eine durchaus müßige Frage, ob der chemische Process die Ursache oder die Folge des Stromes sei. Die alte Streitfrage, ob Contactelectricität existire, bezieht sich also lediglich auf Leiter I. Classe. Ob durch Berührung solcher Potentialdifferenzen entstehen, darüber lässt sich, da sie eben dem Spannungsgesetze folgen, d. h. da man durch ihren Contact nicht dauernd Arbeit gewinnen kann, auch qualitativ a priori gar nichts sagen. Eine Zink- und eine Kupferplatte, welche durch ihren Contact geladen sind und nun, etwa ihrer Anziehung folgend, Arbeit leisten, befinden sich in demselben Falle, wie ein Stück Eisen und ein permanenter Magnet. Diese können auch einmal, resp. nach  $n$ -maliger Entfernung durch Zufuhr äusserer Arbeit auch  $n$ -mal diese Arbeit leisten und könnten daher als Ueberträger von Arbeit für dynamoelectrische Arbeitsmaschinen ebenso wesentlich sein, wie vielleicht der Contact  $Zn|Cu$  für eine Kette. Wenn man nun mit Hrn. Exner annehmen will, dass die Electricität, welche beim Contact von Metallen beobachtet wird, nur entstehe auf Kosten von Oxydationswärme, so ist dies, soweit sich a priori etwas sagen lässt, ungefähr ebenso, als wenn man sich vorstellen wollte, der permanente Magnet leiste seine Arbeit, etwa indem er sich oxydire, auf Kosten dieser Oxydationswärme. In einer solchen Annahme könnte man füglich keinen Nonsens sehen. Es würde sich nur um den Nachweis handeln, und dieser würde ebenso vollständig und ausschliesslich auf den Boden des Experimentes fallen, wie der Beweis für die von Hrn. Exner behaupteten Sätze. Wenn daher die von Hrn. Exner als „Contacttheoretiker“ be-

nannten Physiker seinen Ansichten nicht beistimmen, so darf Hr. Exner ihrer Ueberlegung keinen Vorwurf machen; ich glaube vielmehr, man muss annehmen, dass ihnen seine experimentellen Beweise nicht bindend erscheinen. Mir steht, Mangels eigener Erfahrung auf diesem Gebiete, kein Urtheil zu. Sofern aber die Frage des Hrn. Exner entsprang aus seinen Versuchen, welche im vorstehenden Aufsatz besprochen sind, so darf ich mich einer nochmaligen zusammenfassenden Antwort wohl enthalten.

## II. Theil.

### Ueber den electromotorischen Nutzeffect chemischer Processe.

#### § 6. Ketten mit Salzlösungen.

Die im Vorstehenden mitgetheilten Beobachtungsdaten geben: 1) direct den electromotorischen Nutzeffect einzelner chemischer Processe (wie  $\text{AgBr}$ ,  $\text{Hg}_2\text{Br}_2$  etc.) d. h. denjenigen Bruchtheil der Verbindungswärmen, welcher in Stromenergie verwandelt wird; 2) geben sie die Grundlage, um durch Erweiterung der Beobachtungen auch den Nutzeffect von chemischen Processen, bei welchen noch ein Lösungsmittel in Betracht kommt, zu ermitteln. Es sei z. B. gemessen die electromotorische Kraft der Kette  $\text{Ag}|\text{AgBr}|\text{ZnBr}_2\text{ aq}|\text{Zn}$  und gleich 80 gefunden; dann wären folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} x(\text{Zn}, \text{Br}_2, \text{aq}) - y(\text{Ag}_2, \text{Br}_2) &= 80 \\ y(\text{Ag}_2, \text{Br}_2) &= 84 \end{aligned}$$

$$\text{Daher } x(\text{Zn}, \text{Br}_2, \text{aq}) = 164$$

$$\text{Nun ist } (\text{Zn}, \text{Br}_2, \text{aq}) = 182; \text{ daher } x = 0,92.$$

Ich habe daher noch die electromotorische Kraft einer Anzahl von Elementen bestimmt, in welchen der eine Electrolyt resp.  $\text{AgJ}$ ,  $\text{AgBr}$ ,  $\text{AgCl}$ ,  $\text{Hg}_2\text{J}_2$ ,  $\text{Hg}_2\text{Br}_2$  war. Alle diese Verbindungen sind in Wasser unlöslich. Die Silberhaloide umgaben als ein feines, in ein Glasröhrchen festgestampft Pulver die Silberelectrode, oder aber sie waren in einer ohlensäureatmosphäre an dieselbe angeschmolzen. Die

Quecksilberhaloide lagen meist als eine mehrere Millimeter dicke Schicht auf dem Quecksilber, das als eine Electrode diente, und waren von der darüber stehenden Salzlösung durchdrungen. In den folgenden Tabellen ist wiederum stets der negative Pol der Combination vorangestellt; Daniell ist = 100 gesetzt.

I. Ketten mit Silberchlorid<sup>1)</sup> und Quecksilberchlorür.

	Electromot. Kraft	
	Electrom.	Multipl.
Zn   ZnCl <sub>2</sub> †   HCl   AgCl   Ag . . . . .	96,3	97,9
Zn   ZnCl <sub>2</sub> †   HCl   AgCl   Ag . . . . .	99,0	99,2
	98,1	—
Zn   ZnCl <sub>2</sub> †   AgCl   Ag <sup>2)</sup> . . . . .	95,9 bis 92,2	—
Cd   CdCl <sub>2</sub> †   HCl   AgCl   Ag . . . . .	62,4	60,6
Fe   FeCl <sub>2</sub>   HCl   AgCl   Ag . . . . .	53,8	56,5
Cu   CuCl <sub>2</sub> †   HCl   AgCl   Ag . . . . .	2,2	1,9
Ag   AgCl   HCl   AuCl <sub>3</sub>   Au <sup>3)</sup> . . . . .	73,1	74,9!
	—	72,5
Ag   AgCl   HCl   PtCl <sub>4</sub>   Pt <sup>4)</sup> . . . . .	55,6	53,6
Zn   ZnSO <sub>4</sub>   H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>   HCl   AgCl   Ag . . . . .	93,2	—
Cd   CdSO <sub>4</sub>   H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>   HCl   AgCl   Ag . . . . .	61,8	—
Zn   ZnCl <sub>2</sub> †   Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>   Hg . . . . .	96,0	95,3
Cd   CdCl <sub>2</sub> †   Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>   Hg . . . . .	69,0	69,7

II. Ketten mit Silberbromid<sup>5)</sup> und Quecksilberbromür.

	Electromot. Kraft	
	Electrom.	Multipl.
Zn   ZnBr <sub>2</sub> †   AgBr   Ag . . . . .	79,9	82,3
Cd   CdBr <sub>2</sub> †   AgBr   Ag . . . . .	53,3	50,6
nach 24 Stunden	53,1	—

1) Das Chlorsilber war mit Wasser befeuchtet in ein Röhrchen gestopft, welches die Silberelectrode enthielt.

2) Das Chlorsilber ist mit ZnCl<sub>2</sub>-Lösung durchdrungen; 92,2 ist der Werth nach 24 Stunden.

3) 3,9 g metallisches Gold in 100 g Lösung.

4) Die Lösung hat 7% metallisches Platin.

5) Silberbromid umgibt als festgestampft Pulver die Electrode.

(Fortsetzung von Tab. II.)

	Electromot. Kraft	
	Electrom.	Multipl.
Pb   PbBr <sub>2</sub> ges. Lsg.   AgBr   Ag . . . . .	38,5 bis 40,4	43,2 bis 43,8
Cd   CdBr <sub>2</sub> †   Hg <sub>2</sub> Br <sub>2</sub>   Hg . . . . .	68,1 bis 69,4	73,7
	62,2 <sup>1)</sup>	—
	61,5	—
Ag   AgBr   Hg <sub>2</sub> Br <sub>2</sub>   Hg . . . . .	7,4 bis 9,3 <sup>2)</sup>	—

III. Andere Ketten mit Silberbromid.<sup>3)</sup>

	El. Kr. bestimmt mit Electrometer	
	K	K ± D
Zn   ZnSO <sub>4</sub> †   AgBr   Ag . . . . .	92,9	93,2
Zn   ZnSO <sub>4</sub> †   AgBr   Ag . . . . .	87,6	90,8
Zn   ZnBr <sub>2</sub>   AgBr   Ag <sup>4)</sup> . . . . .	84,7	86,5
Cd   CdSO <sub>4</sub> †   AgBr   Ag . . . . .	55,4	56,7
	54,3	55,6
Pb   PbBr <sub>2</sub> (½ gesättigt)   AgBr   Ag . . . . .	35,2	33,9
	33,7	—
Ag   AgBr   CuSO <sub>4</sub> †   Cu . . . . .	6,7 <sup>5)</sup>	7,1
	4,7	—
Ag   AgBr   PtCl <sub>4</sub>   Pt <sup>6)</sup> . . . . .	60,6	60,0
	61,4	—
Ag   AgBr   AuCl <sub>3</sub>   Au <sup>7)</sup> . . . . .	72,8	68,1
	68,4	68,3

1) Das Quecksilberbromür sass als eine sehr feste Masse auf dem Quecksilber. Es hatte sich auf trockenem Wege auf demselben gebildet.

2) Alle Substanzen sind trocken, AgBr war geschmolzenes, kaltes. Ag ist, trotz kleinerer Wärmetönung, negativer Pol. Aus Ag | Br | Pt und Hg | Br | Pt berechnet sich 12. Die Kette hat sehr schlechte Leitung.

3) Die Silberelectrode war in Bromsilber, das in einem nach unten verengten Röhrchen geschmolzen war, eingesetzt. Die Stromleitung erfolgte also durch eine Schicht kaltes, trockenes Bromsilber, daher konnten mit dem Multiplikator keine Messungen angestellt werden.

4) Die Zinkbromidlösung war aus Zn, Stas'schem Brom und Wasser hergestellt; sie enthielt Zinkoxybromid.

5) Ag negativer Pol.

6) 7% Metall in Lösung.

7) 3,9% Metall in Lösung.

IV. Ketten mit Silberjodid<sup>1)</sup> und Quecksilberjodür.

	Electromot. Kraft	
	Electrom.	Multipl.
Zn   ZnJ <sub>2</sub> $\frac{1}{2}$   AgJ   Ag . . . . .	58,0	58,8
Cd   CdJ <sub>2</sub> $\frac{1}{2}$   AgJ   Ag . . . . .	36,5	33,9
	35,0	—
Cd   CdJ <sub>2</sub> $\frac{1}{2}$   Hg <sub>2</sub> J <sub>2</sub>   Hg . . . . .	44,5	44,2
	—	44,5

V. Andere Ketten mit Silberjodid.<sup>2)</sup>

	El. Kr. bestimmt mit Electrometer	
	K	K $\pm$ D
Zn   ZnSO <sub>4</sub> $\frac{1}{2}$   AgJ   Ag . . . . .	88	74
	—	79
Cd   CdSO <sub>4</sub> $\frac{1}{2}$   AgJ   Ag <sup>3)</sup> . . . . .	50,5	44,3
Pb   PbAc <sub>2</sub> $\frac{1}{2}$   AgJ   Ag . . . . .	25,1	25,5
	26,6	—
Ag   AgJ   CuSO <sub>4</sub> $\frac{1}{2}$   Cu . . . . .	14,6 <sup>4)</sup>	14,0
	10,7	—
Ag   AgJ   PtCl <sub>4</sub>   Pt <sup>5)</sup> . . . . .	50,5	56,8
nach 15 Stunden	50,3	—
	49,9	44,5

Ich will hier noch den Beweis führen, dass man bei den im ersten Theil angeführten wasserfreien Elementen Hg|Br|Pt und Hg|J|Pt wirklich mit den Verbindungswärmen (Hg<sub>2</sub>, Br<sub>2</sub>) und (Hg<sub>2</sub>, J<sub>2</sub>) und nicht, wie Hr. Exner gethan hat, mit (Hg, Br<sub>2</sub>) resp. (Hg, J<sub>2</sub>) rechnen muss. In den Flüssigkeitsketten kamen die direct dargestellten Bromüre und Jodüre zur Verwendung; man kann aus den Zahlen für die Flüssigkeitsketten rückwärts die Arbeitsfähigkeiten von (Hg<sub>2</sub>, Br<sub>2</sub>) und (Hg<sub>2</sub>, J<sub>2</sub>) berechnen und mit den aus den trockenen Ketten

1) Das Jodsilber war in ein Röhrchen gestampft.

2) Die Silberelectrode in geschmolzenem und erkaltetem Jodsilber. Die Leitung ist daher schlecht, und ein Multiplikator war nicht zu gebrauchen.

3) Schlechte Leitung.

4) Ag negativer Pol.

5) 7% Platin in Lösung.

gefundenen Zahlen verglichen. Dann ergeben sich z. B. aus den Tabellen die Zahlengleichungen:

$$x \cdot \text{CdBr}_2 - y \cdot \text{Hg}_2\text{Br}_2 = 70$$

$$x \cdot \text{CdBr}_2 - z \cdot \text{Ag}_2\text{Br}_2 = 53,2$$

$$z \cdot \text{Ag}_2\text{Br}_2 = 84$$

Daraus berechnet sich  $y \cdot \text{Hg}_2\text{Br}_2 = 60,2$  für die nasse Kette; beobachtet ist für die trockene 58 bis 63; den Werth 63 halte ich für den wahrscheinlicheren (vgl. p. 614.) Bedenkt man, dass hier drei voneinander vollständig unabhängige Beobachtungsreihen benutzt sind, von denen sich zwei auf nasse Ketten, eine auf eine trockene beziehen, und dass der aus drei solcher Beobachtungsreihen berechnete Werth mit einem vierten wiederum durch unabhängige Messungen gewonnenen Werthe verglichen ist, so muss die Uebereinstimmung als eine sehr befriedigende bezeichnet werden, zumal, wie schon früher hervorgehoben, die Bestimmungen an der sehr schlecht leitenden Kette  $\text{Hg}|\text{Hg}_2\text{Br}_2|\text{Br}|\text{Pt}$  grosse Schwierigkeiten haben.

#### § 7. Grösse des electromotorischen Nutzeffects.

Ich gebe in den folgenden Tabellen für die einzelnen chemischen Processe an: 1) Die Wärmetönungen. Sie beziehen sich auf soviel Gramme Substanz als 2 g Wasserstoff electrochemisch äquivalent sind und sind ausgedrückt in halben Kilogrammcalthorien ( $\frac{1}{2}$  Cal.). 2) Die von dem betr. chemischen Process in electriche Energie, d. h. in mechanische Arbeit verwandelbare Wärmemenge, welche ich früher als Arbeitsfähigkeit des Processes bezeichnet habe; sie ist ihrer Bedeutung nach identisch mit der von Helmholtz<sup>1)</sup> als „freie Energie“ benannten Grösse. 3) Den electromotorischen Nutzeffect, d. h. die Arbeitsfähigkeit dividirt durch die Wärmetönung.

1) Helmholtz, Die Thermodynamik chemischer Vorgänge. Berl. Ber. Februar 1882.



## VI. Arbeitsfähigkeit und Nutzeffect der Chlormetalle.

	Wärme- tönung $q$	Arbeits- fähigkeit $a = x \cdot q$	Nutzeffect $x$
(Zn, Cl <sub>2</sub> , aq) . . . . .	225,6	195	0,86
(Cd, Cl <sub>2</sub> , aq) . . . . .	186,5	159,4	0,83
(Ag <sub>2</sub> , Cl <sub>2</sub> ) . . . . .	117,5	97	0,83
(Cu, Cl <sub>2</sub> , aq) <sup>1)</sup> . . . . .	125,4	99,2	0,79
(Fe, Cl <sub>2</sub> , aq) . . . . .	199,9	150,8	0,75
$\frac{1}{2}$ (Au, Cl <sub>2</sub> , HCl aq) . . . . .	42,4	24	0,57
(Hg <sub>2</sub> , Cl <sub>2</sub> ) . . . . .	165,2	94	0,57
$\frac{1}{2}$ (Pt, Cl <sub>4</sub> , HCl aq) . . . . .	84,6	41,4	0,49

## VII. Arbeitsfähigkeit und Nutzeffect der Brommetalle.

	Wärme- tönung		Arbeits- fähigkeit	Nutzeffect	
	Br fl.	Br gasf. <sup>2)</sup>		Br fl.	Br gasf.
(Zn, Br <sub>2</sub> , aq) . . . . .	181,9	197,9	167	0,92	0,84
(Cd, Br <sub>2</sub> , aq) . . . . .	148,8	164,8	138	0,91	0,84
(Ag <sub>2</sub> , Br <sub>2</sub> ) . . . . .	90,8	106,8	85	0,94	0,79
(Pb, Br <sub>2</sub> ) . . . . .	128,9	144,9	118	0,91	0,79
(Cu, Br <sub>2</sub> , aq) . . . . .	81,6	97,6	63	0,77	0,64
(Hg <sub>2</sub> , Br <sub>2</sub> ) . . . . .	136,6	152,6	63	0,46	0,41

## VIII. Arbeitsfähigkeit und Nutzeffect der Jodmetalle.

	Wärme- tönung		Arbeits- fähigkeit	Nutzeffect	
	J fest	J gasf. <sup>2)</sup>		J fest	J gasf.
(Zn, J <sub>2</sub> , aq) . . . . .	121,1	142,7	118	0,97	0,83
(Cd, J <sub>2</sub> , aq) . . . . .	87,9	109,5	92,5	1,05	0,84
			95	1,08	0,86
(Ag <sub>2</sub> , J <sub>2</sub> ) . . . . .	55,2	76,8	60	1,09	0,78
(Hg <sub>2</sub> , J <sub>2</sub> ) . . . . .	96,9	118,5	48	0,50	0,41

Ich bemerke noch Folgendes zu den Zahlen:

1) Die Zahl für die Arbeitsfähigkeit bezieht sich wahrscheinlich auf Kupferchlorür, mit welchem sich das Kupfer rasch überzieht. Die Wärmetönung wäre dann zu 131,6, der Nutzeffect = 0,75 zu setzen. Man wolle dies auch p. 639 und 640 beachten.

2) Die Differenz der Verbindungswärmen mit flüssigem und gasförmigem Brom resp. festem und gasförmigem Jod ist entlehnt Berthelot, Essai de mécanique chimique. 1. p. 379. Paris, Dunod. 1879.

1) Unter den Combinationen mit Jod kommen zwei Werthe vor, wo der Nutzeffect grösser als Eins ist, darunter einer, nämlich der auf  $\text{AgJ}$  bezügliche, wo man wohl nur einen einzigen chemischen Process annehmen kann. Dieses sonderbare Resultat fällt weg, der Nutzeffect wird kleiner als Eins, wenn man die Hypothese macht, dass man die Verbindungswärme mit gasförmigem Jod einzuführen habe. Beobachtungen über den Gang der Polarisation als Function der Temperatur, welche ich im ersten Theile der Arbeit gegeben habe, unterstützen diese Hypothese. Auch die in den vorstehenden Tabellen enthaltenen Zahlen scheinen zu ihren Gunsten zu sprechen. Rechnet man nämlich mit den Wärmetönungen für gasförmiges Jod und — consequenter Weise — auch gasförmiges Brom, so folgen sich die Chlor-Brom- und Jodmetalle, nach den Nutzeffecten geordnet, alle in derselben Reihenfolge, nämlich:  $\text{Zn}$ ,  $\text{Cd}$ ,  $\text{Ag}$ ,  $\text{Pb}$ ,  $\text{Cu}$ ,  $(\text{Au})$ ,  $\text{Hg}$ ,  $(\text{Pt})$ . Dies ist nicht mehr der Fall, wenn man mit den Zahlen für festes Jod, resp. flüssiges Brom rechnet.

2) Aus den Tabellen für die Arbeitsfähigkeiten berechnet sich durch einfache Subtraction die electromotorische Kraft von Combinationen, welche dasselbe Halogen enthalten.

3) Ich habe in meiner ersten auf den Gegenstand bezüglichen experimentellen Abhandlung<sup>1)</sup> einige Sätze ausgesprochen, deren Beweis ich für diese zweite aufgeschoben hatte. Diese Beweise will ich jetzt nachholen:

a) Ich sagte<sup>2)</sup>: „Es finden sich auch Ketten, für welche beobachteter und berechneter Werth leidlich übereinstimmen; z. B.  $\text{ZnCl}_2 | \text{PtCl}_4$ ,  $\text{ZnCl}_2 | \text{AuCl}_3$ .“ Ich habe nun in der vorliegenden Abhandlung nachgewiesen, dass von  $\text{AuCl}_3$  und  $\text{PtCl}_4$  der Nutzeffect nur etwa  $\frac{1}{2}$  ist, d. h. dass von den resp. Wärmetönungen 42 und 83 nur resp. 24 und 41 in Stromenergie verwandelt werden. Ich darf danach wohl annehmen, dass mein damaliger Zusatz: „Von diesen — den Ketten  $\text{ZnCl}_2 | \text{AuCl}_3$  und  $\text{ZnCl}_2 | \text{PtCl}_4$  — werde ich an einer anderen Stelle nachweisen, dass sie der sprechendste Beweis

1) Braun, Wied. Ann. **16**. p. 562—593. 1882.

2) L. c. p. 589.

gegen die Thomson'sche Theorie sind“ nunmehr gerechtfertigt ist.

b) Betreffs derjenigen Elemente, bei denen  $e > q_1 - q_2$  ist, sagte ich<sup>1)</sup>, „dass ich in einem zweiten Aufsätze noch eine Reihe vollständig einwurfsfreier Combinationen zu den schon unter den angeführten enthaltenen hinzufügen würde.“ Fast sämtliche Combinationen mit Quecksilberhaloiden gehören dahin; diese leiten für sehr schwache Ströme ohne Polarisation. Ich führe einige Zahlen an.

	beob.	berechn. nach W. Thomson	Differenz
Zn   ZnCl <sub>2</sub>   Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>   Hg . . . . .	101	60,4	+41,4
Zn   ZnBr <sub>2</sub>   Hg <sub>2</sub> Br <sub>2</sub>   Hg . . . . .	104	45,3	+58,7
Zn   ZnJ <sub>2</sub>   Hg <sub>2</sub> J <sub>2</sub>   Hg . . . . .	70	24,2	+45,8
Cd   CdCl <sub>2</sub>   Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>   Hg . . . . .	65,4	21,3	+44,1
Cd   CdBr <sub>2</sub>   Hg <sub>2</sub> Br <sub>2</sub>   Hg . . . . .	75	12,2	+62,8
Cd   CdJ <sub>2</sub>   Hg <sub>2</sub> J <sub>2</sub>   Hg . . . . .	44,5	- 9,0 <sup>*)</sup>	+53,5
Cu   CuBr <sub>2</sub>   Hg <sub>2</sub> Br <sub>2</sub>   Hg . . . . .	0	-55 <sup>*)</sup>	+55

Es hat keinen Zweck mehr, sich in weiteren Beweisen gegen die Thomson'sche Theorie zu ergehen. Ob die electromotorische Kraft einer Kette gleich, kleiner oder grösser als die nach Thomson's Theorie berechnete ist, hängt eben einfach ab von dem Werthe  $x_1 q_1 - x_2 q_2$ ; im allgemeinen wird die Kraft um so eher den Werth  $q_1 - q_2$  überschreiten, je kleiner  $x_2$ , und je grösser  $q_1$  ist. Nachdem ich zuerst auf die Möglichkeit solcher Ketten durch theoretische Betrachtungen geführt war, habe ich später die Existenz solcher Combinationen, bei denen  $e > q_1 - q_2$  ist, nachgewiesen, ohne dass ich den Einfluss beider Grössen  $q_1$  und  $q_2$  streng trennen konnte. Dies ist aber jetzt geschehen, und die Bedingungen für das Zustandekommen solcher Ketten sind hypothesenfrei klargestellt.

1) l. c. p. 591.

\*) Hg sollte negativer Pol sein, ist aber positiver, resp. keins von beiden.

§ 8. Der electromotorische Nutzeffect in seinen Beziehungen zur Dissociationstemperatur und zur Affinität.

Ich habe seither die Arbeitsfähigkeit eines chemischen Processes stets geschrieben als  $x \cdot q$  und, wenn  $q$  die Wärmetönung bezeichnete,  $x$  den electromotorischen Nutzeffect genannt. Ich habe ferner auch gesagt, dass  $x$  ein für jeden chemischen Process constanter echter Bruch sei, dessen Grösse von der Dissociationstemperatur abhängt. Es ist aber zu beachten, dass  $x$  nicht nur von der Dissociationstemperatur abhängt; um in dieser Beziehung keine Irrthümer herbeizuführen, scheint es mir am zweckmässigsten, einige Sätze aus meiner ersten den Gegenstand betreffenden (theoretischen) Abhandlung<sup>1)</sup> anzuführen. Dasselbst hatte ich (p. 204) die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes von der Temperatur  $t_0$  geschrieben:

$$D = (\text{Zn, O, SO}_3 \text{ aq}) f(t) - (\text{Cu, O, SO}_3 \text{ aq}) \varphi(t),$$

„wo  $f(t)$  und  $\varphi(t)$  unterhalb der Werthe liegen:

$$f(t) \text{ unterhalb } 1 - \frac{t_0}{T_1}, \quad \varphi(t) \text{ unterhalb } 1 - \frac{t_0}{T_2},$$

wenn  $T_1$  und  $T_2$  die höchsten bei dem chemischen Vorgang vorkommenden Temperaturen sind.“ (Eigentlich ist zu setzen  $q - \Sigma(t, \delta q) / T$ , wo  $\delta q$  die bei der höchsten Temperatur  $T$  eines elementaren Carnot'schen Processes aufgenommene und theilweise als Wärme von der niedrigeren Temperatur  $t$  abgegebene Wärmemenge bezeichnet; dabei ist  $q = \Sigma \delta q$ .)

Ich habe ferner p. 210 gesagt:

„Man wird aus diesen Gleichungen zu schliessen geneigt sein, dass die electromotorische Kraft der Combination  $\text{Cu} | \text{Zn} | \text{MeSO}_4 | \text{Cu}$  unabhängig sei von der Natur des Metalles Me. Doch ist dieser Schluss nicht zulässig. Denn wenn auch die Verbindungswärme  $(\text{Me, SO}_4)$  vollständig aus der Gleichung herausfällt, so kann 1) die stets eingehende

1) Braun, Wied. Ann. 5. p. 182. 1878. Der eingeklammerte Satz lautet an der citirten Stelle etwas anders.

und leider noch ganz unbekannte Temperaturfunction von der Natur des Electrolyten abhängen; 2) wird sicher die Wärmemenge ( $\text{Zn}, \text{SO}_4$ ) eine andere, wenn Zn sich vereinigt mit der Gruppe  $\text{SO}_4$ , je nachdem die letztere an andere Metalle gebunden ist, oder — um es hypothetisch auszudrücken — je nachdem die Gruppe  $\text{SO}_4$  einen grösseren oder kleineren anfänglichen Abstand von dem Zink hat (wobei die entgegengesetzt wirkende Affinität des Metalls Me gegen  $\text{SO}_4$  gleich Null gesetzt sein soll, da sie vollständig aus den Betrachtungen herausgeht).“

Im Anschluss an diese Sätze möchte ich, von meinen jetzt mitgetheilten Beobachtungen ausgehend, einige Bemerkungen machen:

1) Der electromotorische Nutzeffect ist keine reine Temperaturfunction, vielmehr geht auch noch die Art und Weise ein, wie die ganze Verbindungswärme sich auf den von mir vorausgesetzten (im allgemeinen umkehrbaren) Kreisprocess vertheilt. Nur ihre obere Grenze lässt sich als eine reine Temperaturfunction darstellen. Daher lässt sich auch nur im allgemeinen sagen, dass der Nutzeffect um so kleiner ausfällt, je niedriger die Dissociationstemperatur gelegen ist, und eine quantitative Prüfung ist zur Zeit nicht möglich. Qualitativ bestätigt sich aber diese Beziehung zur Dissociationstemperatur auf das Vollkommenste. In der That: alle diejenigen Verbindungen, deren Dissociationstemperatur wir erreichen können, haben sehr kleinen Nutzeffect; nämlich:

$\text{AuCl}_3$	$\text{PtCl}_4$	$\text{Hg}_2\text{Cl}_2$	$\text{Hg}_2\text{Br}_2$	$\text{Hg}_2\text{J}_2$
0,57	0,49	0,57	0,41	0,41

Besonders die drei letzteren Verbindungen, welche gut charakterisirte Körper sind, scheinen mir beachtenswerth. Wäre der Gang ihrer Dissociation als Function der Temperatur bekannt, so könnte man vielleicht selbst die Curve des electrolytischen Kreisprocesses angenähert ermitteln.

2) Aus der Umkehrbarkeit des Processes habe ich früher<sup>1)</sup> geschlossen, dass „die Temperatur  $T$  in der That zur unteren Grenze die Zersetzungs (Dissociations-) Tempe-

1) l. c. p. 202.

ratur des Electrolyten hat.“ Daraus lässt sich weiter folgern: Ist die Verbindungswärme nicht gross genug, um die entstehende Verbindung bis zur Dissociationstemperatur zu erhitzen, so leitet der betr. Körper metallisch. Dies müsste z. B. bei Schwefeleisen, Schwefelblei etc. der Fall sein, und es wäre damit auch das sonst so räthselhafte Verhalten derartiger binärer Verbindungen erklärt. Wenn solche Stoffe mit gesteigerter Temperatur aus metallischen Leitern in electrolytische übergingen, so würden sie von der Uebergangstemperatur an dem Faraday'schen Gesetz folgen können, aber trotzdem mit der Polarisation Null, weil dem Nutzeffect Null, ihre electrolytische Leitung anfangen und sich also ähnlich wie die Kette  $\text{CuBr}_2 | \text{Hg}_2\text{Br}_2$  verhalten, welche die electromotorische Kraft Null, dagegen die Wärmetönung 55 hat. Voraussichtlich würde ihre Polarisation aber mit steigender Temperatur zunehmen, um bei der Dissociationstemperatur wieder auf Null zurückzukommen. Man kann das Vorstehende auch so aussprechen: Alle electrolytisch leitenden Verbindungen werden sich bei der Entstehung aus ihren Ionen nicht sofort vollständig herstellen; die Vereinigung der Bestandtheile erfolgt vielmehr immer nur portionenweise, weil bei dem Verbindungsvorgange die Dissociationstemperatur erreicht wird. Electrolyte müssen dieses Verhalten zeigen, andere Verbindungen können es zeigen. So lässt sich a priori ein Versuchsergebniss ableiten, welches Bunsen<sup>1)</sup> schon vor langer Zeit bei Knallgas entdeckt hat.

3) Es ist zu erwarten, dass die Nutzeffecte nicht nur von dem chemischen Process abhängen, sondern kleine Variationen zeigen, je nach der Natur des Lösungsmittels, selbst wenn dieses chemisch indifferent ist. In der That glaube ich, dass einzelne meiner Zahlen darauf hindeuten. Indessen können nur besondere Beobachtungen hierüber entscheiden. Jedenfalls wird man in erster und ziemlich grosser Annäherung den Nutzeffect als einen nur durch den chemischen Process bedingten constanten Bruch ansehen dürfen. Auch die in Satz 2) meines Citates ausgesprochene Methode, um

Bunsen, Pogg. Ann. 131. p. 161. 1867.

weiteren Aufschluss über thermochemische Vorgänge zu erhalten, dürfte, nachdem die Grundlage der ganzen Betrachtung sich in so guter Uebereinstimmung mit der Erfahrung gezeigt hat, weitere Verfolgung lohnen. Sie lag ausserhalb des Zieles meiner Versuche.

Wenn man die verschiedenen Metalle bei der Berührung derselben mit Electrolyten, speciell mit den binären Verbindungen der betreffenden Metalle selbst, in eine Spannungsreihe zu ordnen versucht, so ergeben die vorstehend mitgetheilten Thatsachen das Folgende:

1) Eine solche Anordnung ist nur für den Fall möglich, dass beide Pole in Electrolyte tauchen, deren Säure dieselbe ist, also z. B. beide in Nitrate, oder beide in Chloride etc.

2) Es ist a priori nicht zu erwarten, dass die Reihen für die verschiedenen Säuren identisch werden, also z. B. die Reihenfolge für die Nitrate übereinstimmt mit derjenigen für die Chloride. In Wirklichkeit tritt aber doch sehr nahezu diese einfachere Beziehung ein.

3) Ordnet man die Metalle so, dass stets das vorausgehende negativer Kettenpol wird, wenn es einem der folgenden gegenüber gestellt wird, so stimmt diese Reihenfolge nicht überein mit derjenigen der Wärmetönungen, sondern mit derjenigen der Arbeitsfähigkeiten, der freien Energien; z. B. würde sein für die Chloride (resp. Chlorüre) in wässriger Lösung:

Reihenfolge der			
Wärmetönungen		Arbeitsfähigkeiten (Spannungsreihe)	
(Zn, Cl <sub>2</sub> , aq) . . .	225	(Zn, Cl <sub>2</sub> , aq) . . .	195
(Fe, Cl <sub>2</sub> , aq) . . .	200	(Cd, Cl <sub>2</sub> , aq) . . .	159
(Cd, Cl <sub>2</sub> , aq) . . .	192	(Fe, Cl <sub>2</sub> , aq) . . .	151
(Hg <sub>2</sub> , Cl <sub>2</sub> ) . . . .	165	(Cu, Cl <sub>2</sub> , aq) . . .	99
(Cu, Cl <sub>2</sub> , aq) . . .	125	(Ag <sub>2</sub> , Cl <sub>2</sub> ) . . . .	97
(Ag <sub>2</sub> , Cl <sub>2</sub> ) . . . .	117	(Hg <sub>2</sub> , Cl <sub>2</sub> ) . . . .	94
$\frac{1}{2}$ (Pt, Cl <sub>4</sub> , HCl aq) .	85	$\frac{1}{2}$ (Pt, Cl <sub>4</sub> , HCl aq) .	41
$\frac{3}{2}$ (Au, Cl <sub>3</sub> , HCl aq) .	42	$\frac{3}{2}$ (Au, Cl <sub>3</sub> , HCl aq) .	24

Die folgende Tabelle gibt, nach der Grösse geordnet, eine



Schematische Uebersicht der Arbeitsfähigkeiten  
in  $\frac{1}{2}$  Cal.

$\text{Cl}_2$	$\text{Br}_2$	$\text{SO}_4$	$\text{N}_2\text{O}_5$	$\text{Ac}_2$	$\text{J}_2$
Zn 195	Zn 167	Zn 176 bis 136	Zn 160 bis 127	wahrscheinlich sehr nahe gleich den Nitraten	Zn 118
Cd 159	Cd 138	Cd 143 „ 104	Cd 133 „ 100		Cd 94
Fe 151	Pb 118	Fe 136 „ 95 <sup>1)</sup>	Pb 119 „ 85		$\text{Ag}_2$ 60
Cu 99	$\text{Ag}_2$ 85	Cu 76 „ 36	Cu 74 „ 40		$\text{Hg}_2$ 48
$\text{Ag}_2$ 97	Cu 63				
$\text{Hg}_2$ 94	$\text{Hg}_2$ 63				
$\frac{1}{2}$ Pt 41					
$\frac{2}{3}$ Au 24					

Für dasselbe Metall ist die Reihenfolge der Arbeitsfähigkeiten im allgemeinen:  $\text{Cl}_2$ ,  $\text{Br}_2$ ,  $\text{SO}_4$ ,  $\text{N}_2\text{O}_5$ ,  $\text{J}_2$ ; ob  $\text{Br}_2$  über  $\text{SO}_4$  steht oder darunter, ist nicht mit Bestimmtheit zu sagen.

Die vorstehenden Reihen haben mir schon seit langer Zeit einen Schluss nahe gelegt, welcher mir beachtenswerth erscheint, und dessen weitere experimentelle Prüfung für die physikalische Chemie von Wichtigkeit sein dürfte. Ein Theil der Stoffe in der Spannungsreihe folgt sich nämlich entschieden in derselben Reihe, in welcher die Stoffe sich gegenseitig verdrängen, während nach den Verbindungswärmen, wäre das Berthelot'sche Princip der maximalen Arbeit richtig, es nicht der Fall sein dürfte; z. B. wird aus  $\text{Hg}_2\text{Cl}_2$  trotz seiner grösseren Verbindungswärme Quecksilber durch Cu ausgefällt. Auch die Affinitäten von Platin und Gold einerseits, Kupfer und Silber andererseits gegen Chlor stehen in keinem Verhältniss zu den bezüglichen Wärmetönungen. Während ich es nach rein apriorischen Ueberlegungen wohl für möglich hielt, dass für die chemischen Umsetzungen hauptsächlich entscheidend sei die Wärmetönung, da es sich

1) Infolge eines Versehens sind in meinem vorigen Aufsätze (Wied. Ann. 16. p. 593) für die Arbeitsfähigkeit von  $\text{FeSO}_4$  falsche Werthe angeführt; die richtigen Werthe sind:

$\text{Ag}_2\text{SO}_4$	$\text{FeSO}_4$
$y$	$x \cdot q_1$
0	0,73 135,8
0,5	0,62 115,4
1	0,51 95

bei der Zersetzung einer Verbindung unter gleichzeitiger Bildung einer anderen um intramoleculare Vorgänge von wesentlich gleicher Beschaffenheit handelt, wurde ich allmählich durch die Thatsachen zu der Ueberzeugung gebracht, dass auch für die rein chemischen Umsetzungen entscheidend sei die mechanische Arbeitsfähigkeit eines chemischen Processes, sodass z. B., wenn auch die gesammte Wärmetönung eines Processes gleich Null ist, doch Umsetzung erfolgen kann, indem diejenige Verbindung entsteht, welche gegen Wärme stabiler ist. Auch die durch directe chemische Action, ohne Vermittelung eines Stromes verlaufenden Prozesse würden also in dem Sinne gehen, dass die Arbeitsfähigkeit der ganzen Materie abnimmt. In diese Auffassung, welche vor kurzem auch Helmholtz l. c. ausgesprochen hat, fügen sich bekannte andere Erfahrungen, z. B. die leichte Verdrängung von Ammoniak aus seinen Verbindungen ganz von selbst. Dem von Berthelot aufgestellten Princip, welches besser das der maximalen Wärmetönung heissen sollte, hätten wir dann ein anderes zu substituiren, welches mit mehr Recht den Namen Princip der maximalen Arbeitsfähigkeit führen könnte. Das Berthelot'sche Princip wäre ein Specialfall des letzteren; es würde nämlich gelten bei dem absoluten Nullpunkt der Temperatur, und die Abweichungen vom Berthelot'schen Princip müssten um so stärker hervortreten, je näher die Versuchstemperatur der Dissociationstemperatur der betreffenden Stoffe liegt. Die Spannungsreihe im Sinne der Chemiker würde aber damit gleichzeitig wieder vollständig in ihre Rechte eintreten: in einer richtig bestimmten Spannungsreihe müsste thatsächlich (nach dem dort üblichen Sprachgebrauch), der electro-positivere Bestandtheil jeden electro-negativeren aus der Verbindung verdrängen, und umgekehrt müsste der Verlauf derartiger chemischer Reactionen direct die relative Stellung der Metalle in der oben definirten Spannungsreihe bestimmen.

Obschon viele Erscheinungen zu Gunsten dieser Auffassung sprechen, so will mir doch scheinen, als ob chemische Thatsachen vorlägen (darunter auch solche, welche auf Verdrängung von Metallen durch andere Bezug haben), die

sich nicht in diese Form fügen. Ich kann daher das auf rein chemische Processe Bezügliche nur als eine Vermuthung bezeichnen, welche sich mir aufgedrängt hat, und auf welche ich bei dieser Gelegenheit hinweisen wollte.

Physikal. Inst. der Univ. Strassburg i. Els., Juli 1882.

# **VI. Das electrische Leitungsvermögen von Chlorsilber, Bromsilber und Jodsilber; von W. Kohlrausch.**

1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit<sup>1)</sup> habe ich aus dem Verlauf des electrischen Leitungsvermögens der Schwefelsäure den von G. Wiedemann, Beetz, F. Kohlrausch und Grotrian wiederholt gezogenen Schluss von neuem bestätigt gefunden, dass für das electrolytische Leitungsvermögen die Zähigkeit der leitenden Substanz neben anderen Factoren in hohem Grade massgebend ist. Dieser Schluss scheint für die bisher in der erwähnten Richtung eingehender untersuchten Lösungen durchweg berechtigt zu sein. Ja sogar für die Hydrate der Schwefelsäure, die wir doch wohl kaum noch als Lösungen aufzustellen berechtigt sind, behält er seine Gültigkeit. Zähigkeit und electrolytischer Leitungswiderstand zeigen hier einen durchweg ähnlichen Gang.

Aber auch nur für Lösungen ist bisher die Gültigkeit dieser Regel höchst wahrscheinlich gemacht. Dagegen wissen wir aus Arbeiten von Hittorf<sup>2)</sup>, von F. Braun<sup>3)</sup> und von E. Wiedemann<sup>4)</sup>, dass z. B. für Haloide und Sulfide von Metallen und Metalloiden unsere Regel von dem Zusammenhang zwischen Zähigkeit und Leitungsvermögen ihre Gültigkeit theilweise verliert. Durch neuere gelegentliche Beobachtungen von Hrn. Braun<sup>5)</sup> bin ich dazu gekommen, die

1) W. Kohlrausch, Wied. Ann. **17**. p. 69. 1882.

2) Hittorf, Pogg. Ann. **84**. p. 1. 1851.


3) F. Braun, Pogg. Ann. **154**. p. 161. 1875.

4) E. Wiedemann, Pogg. Ann. **154**. p. 318. 1875.

5) F. Braun, vorstehende Abhandlung.

Leitung von Chlorsilber, Bromsilber und Jodsilber und ihre Aenderung in weiten Temperaturgrenzen näher zu verfolgen.

2. Die drei Haloide des Silbers wurden folgendermassen dargestellt. 150 g chemisch reines Silber (aus der Gold- und Silberscheideanstalt von Rössler in Frankfurt) wurden zu salpetersaurem Silber gelöst und die Haloide mit Salzsäure, Bromkalium und Jodkalium ausgefällt, die Niederschläge, ohne sie aufs Filter zu bringen, sorgfältig ausgewaschen und unter möglichstem Ausschluss von Licht und organischer Substanz getrocknet. Das Chlorsilber war schneeweiss, und an sämtlichen Haloiden war auch später niemals eine Spur von Verunreinigung oder ausgeschiedenem Silber zu bemerken.

In einem -förmigen Glasrohr wurden die zur Untersuchung bestimmten Mengen der Verbindungen geschmolzen, sodass sie den horizontalen Theil des Rohres etwa zu Hälfte füllten, und an ihren Enden breite Electroden aus reinem Silberblech eingeführt, an welche die Haloide so fest und innig anschmelzen, dass sie erkaltet sich nicht mehr davon ablösen lassen. Sodann wurde das Glasrohr in ein vorgewärmtes grosses Sandbad eingesetzt, welches durch eine entsprechende Heizvorrichtung auf Temperaturen bis zu 700—800° dauernd und ziemlich gleichmässig erwärmt werden konnte. Da die Haloide durch Anhaften am Glasrohr dieses beim Erkalten bei ca. 100° zerrissen, musste das Sandbad gelegentlich lange Zeit Tag und Nacht geheizt bleiben.

3. Die Temperaturen des Sandbades wurden durch die Ausschläge eines Wiedemann'schen Galvanometers gemessen, durch dessen Drahtwindungen der Strom des im Sandbad befindlichen Thermoelementes aus Eisen und Platin lief. Bei der empirischen Calibrirung des Thermoelementes durch Vergleich mit einem neu controlirten Baudin'schen Quecksilberthermometer, welche im Paraffinbad sowie im Sandbad bis zu 340° hinauf vorgenommen wurde, zeigte sich die electromotorische Kraft nur bis etwa 150° proportional der Temperaturdifferenz der Löthstellen. Es wurde deshalb noch der Ausschlag beobachtet, den das Thermoelement

hervorbrachte, wenn die eine Löthstelle im Dampf von siedendem Schwefel sich befand ( $448^{\circ}$ ) — die andere Löthstelle wurde immer auf  $0^{\circ}$  gehalten — und diese Bestimmung, sowie die Calibrirung während der Dauer der Arbeit öfter wiederholt. Die Unterschiede der Ausschläge des Galvanometers für  $448^{\circ}$  erreichten bei verschiedenen, durch Wochen getrennten Bestimmungen nicht  $0,5\%$ . Auch überzeugte ich mich öfter, ob sich nicht der Widerstand des Elementes durch Beschädigung der Löthstellen, durchrosten und dergl. geändert habe. Die übrigen Widerstände der Leitung waren so abgeglichen, dass bei etwa 2 m Abstand von Spiegel und Scala für die ersten  $100^{\circ}$  ein Ausschlag von etwa 70 mm entstand.

Die Empfindlichkeit des Galvanometers, welche an meinem Arbeitsplatze gelegentlich durch äussere Einflüsse hätte verändert werden können, wurde möglichst oft durch den etwa 200 mm betragenden Ausschlag controlirt, den ein anderes Thermoelement  $\text{Fe}|\text{Pt}$  mit geringerem Widerstand lieferte, wenn seine Löthstellen auf  $100^{\circ}$  und  $0^{\circ}$  waren.

Im Sand lag das Thermoelement unmittelbar an dem ziemlich dünnwandigen Glasrohr an, welches das zu untersuchende Haloid enthielt. Die Grösse des Sandbades und die langsamen Temperaturänderungen, mit denen ich operirte, berechtigten mich, anzunehmen, dass unterhalb  $200^{\circ}$  meine Temperaturangaben (bezogen auf das Luftthermometer) selten um mehr als  $1^{\circ}$ , bis zu  $500^{\circ}$  nicht mehr als  $5^{\circ}$  fehlerhaft sind. Darüber hinaus können die Fehler grösser werden, da ich keine höher gelegenen Fixpunkte des Thermoelementes als  $448^{\circ}$  bestimmt habe.

4. Bezüglich der Widerstandsbestimmungen, die mit den in der letzten Arbeit beschriebenen Apparaten — also trotz der jedenfalls verschwindenden Polarisirbarkeit der Silberelectroden mit Wechselströmen — vorgenommen wurden, war ich in einer sehr günstigen Lage. Ich konnte nämlich durch Aenderung der Vergleichwiderstände am Universalrheostaten von Siemens, sowie durch Aenderung der electromotorischen Kraft des Helmholtz'schen Schlittenapparates die Empfindlichkeit in so weiten Grenzen reguliren,

dass ich im Stande war, Widerstände von 5 S.-E. bis zu 100 000 S.-E. rasch und leicht bis auf Fehler von höchstens ein Procent zu bestimmen. Mit allerdings weniger Sicherheit konnte ich noch Widerstände von 10 Millionen S.-E. messen. Für die nachstehenden Bestimmungen war eine derartige Versuchsanordnung sehr bequem, da die Leitungsfähigkeit der Silberhaloide ausserordentlichen Aenderungen mit der Temperatur unterliegt.

Ein wesentlicher Einfluss von Sprüngen und Rissen in der erstarrten Masse der leitenden Substanzen auf ihren Widerstand kann schon wegen der allmählichen Aenderung desselben nicht vorliegen. Es zeigten sich allerdings bei Jodsilber und auch bei Bromsilber Spuren solcher Sprünge, aber die aus dem Glasrohr herausgenommenen Stangen waren so compact, dass sie beim Anschlagen mit einem harten Gegenstand einen Klang gaben wie ein Porzellanstab. Dass eine eventuelle Leitung durch das Glasrohr bei hohen Temperaturen die Resultate nicht fälschen konnte, wurde durch Controlversuche ebenfalls constatirt.

Nachdem die Versuche an einer Partie eines Haloides beendet waren, liess man das Material erkalten. Aus Länge, Gewicht und specifischem Gewicht des vorsichtig aus dem Glasrohr losgelösten Stabes, der meist einen halbkreisförmigen Querschnitt hatte, wurde schliesslich der den beobachteten Widerständen entsprechende specifische Widerstand für die beobachteten Temperaturen berechnet.<sup>1)</sup>

5. Ich gebe im Folgenden eine Zusammenstellung der Resultate für Jodsilber, Bromsilber, Chlorsilber und eine nach den Verhältnissen der Aequivalentgewichte hergestellte Mischung von Jodsilber und Chlorsilber. Die Temperaturangaben sollen innerhalb der oben bezeichneten Fehlergrenzen Temperaturen des Luftthermometers bedeuten. In  $w \cdot 10^{-3}$  bezeichnet  $w$  den auf Quecksilber von 0° bezogenen specifischen Widerstand des Materials. Die Division durch 1000

1) War das Silberhaloid lange Zeit im Glasrohr geschmolzen gehalten, so war, wahrscheinlich durch Bildung und Eindringen von etwas kieselurem Silber in das Glasrohr, dasselbe gelegentlich bis zur Hälfte seiner Stärke dunkelbraun gefärbt.

ist vorgenommen, um zu einigermaßen übersichtlichen Zahlen zu gelangen. Um einen bequemeren Vergleich mit den Lösungen zu geben, bemerke ich, dass für die bestleitende Schwefelsäure  $w \cdot 10^{-3} = 14,5$  ist.

Tabelle I.

Jodsilber		Bromsilber		Chlorsilber		Chlorsilber + Jodsilber	
Temp.	$w \cdot 10^{-3}$	Temp.	$w \cdot 10^{-3}$	Temp.	$w \cdot 10^{-3}$	Temp.	$w \cdot 10^{-3}$
700	4,2	600	3,2	650	2,27	700	
650	4,5	550	3,35	600	2,40	600	
600	4,7	500	3,6	550	2,50	500	
*550	4,9	450	4,2	510	3,5	450	
500	5,0	440	4,9	500	5,8	400	
450	5,12	430	6,0	493	10	350	
400	5,4	*420	10	*487	15	300	
350	5,8	411	15	480	20	268	
300	6,25	405	20	473	30	*246	
250	6,8	400	30	460	50	238	
200	8,1	392	50	446	100	213	
160	8,75	373	100	433	150	190	
156	10	362	150	424	200	160	
153,6	15	350	200	380	500	142	
152	20	321	500	362	1 000	134	
150,7	30	295	1 000	335	2 000	128	
149,1	50	265	2 700	309	5 000	121,5	1 100
147,1	100	227	8 800	288	10 000	119,5	9 500
145,9	150	206	20 000	252	27 000	118	29 000
145,2	200	176	57 000	222	84 000	108	54 000
143	500	145	270 000	197	230 000	20°	2 000 000
140,6	1 000	113	1 100 000	147	1 600 000		
139,4	2 000	20°	3 000 000	20°	>3 000 000		
138,7	5 000						
138	10 000						
134	20 000						
131	50 000						
124	100 000						
114	200 000						
107	500 000						
86	1 000 000						

\* bedeutet Schmelzpunkte.

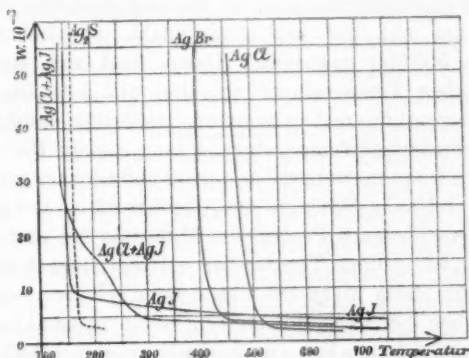
Die Schmelzpunkte der Haloide habe ich zum Theil Zahlen von Rodwell<sup>1)</sup> entnommen, zum Theil habe ich sie selbst mit Hülfe des oben beschriebenen Thermoelements in einem kleinen Luftbade mit dreifacher Wandung bestimmt.

1) Rodwell, Proc. of the Roy. Soc. 25. p. 280—291 und 31. p. 291 bis 295.



Für Chlorsilber findet sich in den Lehrbüchern meist die Angabe, der Schmelzpunkt liege bei  $260^\circ$ . Rodwell gibt ihn in seiner ersten Abhandlung zu  $350^\circ$ , in der zweiten zu  $451^\circ$  an. Meinen Bestimmungen nach kann er nicht unter  $485^\circ$  liegen. Für Bromsilber liegt nach Rodwell der Schmelzpunkt bei  $427^\circ$ . Für Jodsilber findet er ihn bei  $527^\circ$ , ich bei etwa  $540^\circ$  gelegen. Der Schmelzpunkt des Gemisches von Jodsilber und Chlorsilber liegt nach meinen Bestimmungen bei  $260^\circ$ .

Ich habe in beistehender Figur die Theile der Curven gezeichnet, welche den Verlauf des Leitungswiderstandes mit



der Temperatur bis zu  $w \cdot 10^{-3} = 50$  veranschaulichen. Aus der Tabelle I, sowie aus diesen Curven geht hervor, dass der Widerstand von geschmolzenem Chlorsilber und Bromsilber mit abnehmender Temperatur langsam und gleichmässig aufsteigt, etwas oberhalb des Schmelzpunktes rascher zu wachsen beginnt, um nach dem Erstarren ausserordentlich schnell zuzunehmen. Die Curven für AgCl und AgBr zeigen relativ zum Schmelzpunkt genau den gleichen Verlauf und bieten keine unerwarteten Eigenthümlichkeiten.

#### Jodsilber.

Ganz anders verhält sich das Jodsilber. Sein Widerstand nimmt zwar ebenfalls mit abnehmender Temperatur oberhalb des Schmelzpunktes langsam zu, zeigt aber

hen Zahlen  
a mit den  
bestleitende

Chlorsilber  
+ Jodsilber

Temp.  $w \cdot 10^{-3}$

700  
600  
500  
450  
400  
350  
300  
268  
246  
238  
213  
190  
160  
142  
134  
128  
121,5  
119,5  
118  
108  
20°

zum Theil  
be ich sie  
elementes  
bestimmt.

31. p. 291

beim Erstarren des Jodsilbers keine Spur irgend einer schnelleren Zunahme, sondern die Curve setzt sich langsam stärker steigend bis weit unterhalb des Schmelzpunktes fort, sodass das feste Haloid noch weit besser leitend bleibt, als die bestleitende Schwefelsäure. Aber plötzlich bei circa  $150^{\circ}$  macht die Curve eine scharfe Wendung, und nun steigt bei weiter abnehmender Temperatur der Widerstand noch weit schneller, als es bei den anderen Haloiden beim Erstarren der Fall ist.

Während von  $700^{\circ}$  bis herunter auf  $156^{\circ}$   $w.10^{-3}$  von 4,2 zu 10 anwächst, steigt es bei weiterer Abnahme der Temperatur um nur  $20^{\circ}$  auf etwa 20000, und bei  $107^{\circ}$  ist  $w.10^{-3} = 500\,000$  geworden. Dabei zeigt sich ausserdem, dass zwischen Temperaturen von  $150$  und  $140^{\circ}$  der Widerstand gelegentlich fast momentan, vielleicht infolge nicht ganz gleichmässiger Temperaturänderung, um die Hälfte seines Betrages schwankt, während er vorher und nachher ganz stetig zunimmt. Ich habe die Curve für Jodsilber oft an der gleichen, und an verschiedenen Proben des Materials bei absteigender und bei aufsteigender Temperatur verfolgt, manchmal stundenlang die Scala nicht aus den Augen gelassen, sodass ein Zweifel über den Verlauf derselben völlig ausgeschlossen ist.

Damit wäre also im Jodsilber ein electrolytischer Leiter der Electricität gefunden — ich werde den Nachweis für den Ausdruck electrolytisch führen — der eine Aenderung seines Widerstandes beim Uebergang aus dem festen in den flüssigen Zustand absolut nicht zeigt. Ein Zusammenhang zwischen electrolytischer Leitungsfähigkeit und mechanischer Zähigkeit ist demnach für Jodsilber undenkbar.

Was die rapide Zunahme des Leitungswiderstandes des AgJ bei  $145^{\circ}$  anlangt, so wissen wir aus den Untersuchungen von Rodwell<sup>1)</sup> u. a., dass das sich abkühlende Jodsilber bei dieser Temperatur unter starker Ausdehnung aus dem amorphen in den krystallinischen Zustand übergeht, also eine Aenderung der molecularen Anordnung, vielleicht

1) l. c.

auch der Molecularstructur selbst erleidet, welche ohne Zweifel mit der starken Widerstandszunahme in unmittelbarem Zusammenhange steht.

Das Gemisch aus Chlorsilber und Jodsilber cf. Tabelle II und Figur, dessen Widerstand bei höheren Temperaturen zwischen denen der Componenten, dessen Schmelzpunkt aber weit tiefer als der der Componenten liegt, zeigt oberhalb dieses Schmelzpunktes die allmähliche Widerstandszunahme mit abnehmender Temperatur, wie die einfachen Silberhaloide; der Widerstand nimmt dann beim Erstarren bedeutend zu, um etwas unterhalb der Temperatur, bei der das Jodsilber seine Modification ändert, noch einmal sehr schnell zu wachsen. Ich möchte mich für dieses Material einstweilen auf die Zahlenangaben beschränken.

6) Als andere Haloide, die unterhalb ihres Schmelzpunktes noch verhältnissmässig gute electrolytische Leiter sind, kennen wir einstweilen aus den citirten Abhandlungen von F. Braun und E. Wiedemann Chlorblei, Bromblei und Jodblei.

Ich möchte mir erlauben, hier ausserdem noch einige Zahlen von Hittorf über Leitung von Halbschwefelkupfer  $\text{Cu}_2\text{S}$  und Schwefelsilber  $\text{Ag}_2\text{S}$  anzuführen. Beide Sulfide schmelzen erst bei Glühhitze. Hittorf hat seiner Zeit die Widerstände in Meter Platindraht von 0,5 mm Dicke angegeben. Ich habe nach seinen Zahlen unter der Annahme, dass das Platin den spec. Widerstand 0,0918 gehabt habe, folgende Tabelle berechnet.

Tabelle II. Zahlen von Hittorf.

$\text{Cu}_2\text{S}$		$\text{Ag}_2\text{S}$	
Temp.	$w \cdot 10^{-3}$	Temp.	$w \cdot 10^{-3}$
192	13	195	3,25
184	14,5	180,5	3,71
152	25	170	58
136	34	165,2	108
113	54	158,2	170
107	62	148	284
103	148	129,2	506
85	264	113,2	600
67	447	93	1660
51	790	84,1	2270
10	4470		
0	7430		

Man bemerkt in der Tabelle (und der punktirten Curve s. Figur für  $\text{Ag}_2\text{S}$ ), dass für  $\text{Cu}_2\text{S}$  bei etwa  $105^\circ$ , für  $\text{Ag}_2\text{S}$  bei etwa  $175^\circ$  ebenfalls eine unverhältnissmässig starke Zunahme des Widerstandes mit abnehmender Temperatur innerhalb geringer Temperaturintervalle stattfindet. Hittorf hat nun ausserdem durch Beobachtung von Abkühlungsgeschwindigkeiten der Materialien, sowie dem Augenschein nach geschlossen, dass für die betreffenden Temperaturen eine erhebliche Erweichung des Sulfides eintritt, die ebenfalls auf eine Aenderung der Molecularstructur hinzudeuten scheint.

7) Eine Erklärung des auffallenden Verhaltens des Jodsilbers schon jetzt geben zu wollen, wäre verfrüht. Zu dem Ende müssen erst weitere Verbindungen mit ähnlichem Gange des Leitungsvermögens gefunden und bezüglich anderer physikalischer und chemischer Eigenschaften miteinander verglichen werden. Soviel lässt sich aber schon jetzt sagen. Jodsilber zeigt eine enorme Zunahme des Widerstandes beim Uebergange aus dem amorphen in den krystallinischen Zustand, dagegen ändert sich der Widerstand nicht, während es aus dem flüssigen in den amorph festen Zustand übergeht.

Bromsilber und Chlorsilber, von denen das erstere jedenfalls beim Erstarren krystallinisch wird, also einen Modificationswechsel erfährt, welche beide unterhalb des Schmelzpunktes keine Modificationsänderung mehr erleiden, zeigen eine der des Jodsilbers (bei  $150^\circ$ ) analoge rapide Widerstandszunahme beim Erstarren selbst. Die meisten Salze leiten gelöst oder geschmolzen, d. h. wenn sie nach aussen wie amorph sich verhalten, unvergleichlich viel besser, als wenn sie krystallisirt sind, und ganz analog verhalten sich die Schwefelsäurehydrate.

Ausser bei Jodsilber fällt also bei den obenerwähnten Verbindungen mit den Aenderungen — Schmelzung oder Lösung — die eine totale Aenderung in der Grössenordnung des electrolytischen Leitungswiderstandes verursachen, auch der Uebergang aus dem krystallinischen in den amorphen Zustand zusammen. Beim Jodsilber aber, wo dieser Modificationswechsel nicht mit der Aenderung des Aggregatzu-

standes Hand in Hand geht, ist der Wechsel in der Grössenordnung des Widerstandes nicht an die Aenderung des Aggregatzustandes, sondern an den Modificationswechsel geknüpft.

Demnach könnte man vermuthen, dass überhaupt bei electrolytisch leitenden Verbindungen für die Grösse des Widerstandes nicht sowohl der Aggregatzustand, als die Modification oder auch die Structur massgebend ist; dass etwa bei den Salzen, die beim Erstarren eine bedeutende Aenderung des Widerstandes zeigen, die Modificationsänderung beim Erstarren eintritt, während sie beim Jodsilber, vielleicht auch beim Schwefelsilber, für das ich nach Hittorf's Zahlen ein Verhalten ähnlich dem des Jodsilbers vermuthete, erst bei weit niedrigeren Temperaturen stattfindet. Weitere Versuche, die ich in nicht zu langer Zeit vornehmen zu können hoffe, führen die Frage vielleicht der Entscheidung etwas näher.

8. Es ist bekannt und kürzlich noch einmal von F. Braun constatirt worden, dass die Silberhaloide bei der Temperatur ihrer Schmelzpunkte und auch noch bei tieferen Temperaturen jedenfalls electrolytisch leiten. F. Braun hat bei hohen Temperaturen die Haloide galvanisch polarisirt und hat die Polarisation der Zellen noch bei Zimmertemperatur mit dem Electrometer gemessen. Es würde dies eigentlich als Beweis dafür, dass die Silberhaloide auch bei Zimmertemperatur electrolytisch leiten, völlig ausreichen, denn wenn die Combination  $\text{Ag}|\text{AgJ}|\text{J}$  Polarisation zeigt, so muss Jodsilber ein electrolytischer Leiter sein.

Ich habe trotzdem die Polarisirbarkeit noch einmal auf einem ganz anderen Wege constatirt. Da es mir darauf ankam, zu erfahren, ob bei Zimmertemperatur die Silberhaloide polarisirbar seien, so musste ich des grossen Widerstandes einer kalten Silberhaloidzelle halber eine sehr hohe electromotorische Kraft anwenden, also am einfachsten auf die Electricisirmaschine als Electricitätsquelle zurückgreifen.

In einem Porzellantiegel wurde z. B. Jodsilber geschmolzen, zwei feine Platindrähte eingeführt und das Ganze sehr langsam abgekühlt. Um ein ungefähres Urtheil über

die Electricitätsmenge zu erhalten, die die Jodsilberzelle passirte, wurde neben derselben ein Wasservoltameter eingeschaltet, welches folgendermassen hergestellt war. Ein Glasrohr, in welches zwei feine Platindrähte eingeschmolzen waren, wurde mit ausgekochtem Wasser beschickt, das Wasser noch einige Zeit im Rohr ausgekocht und dann das Rohr abgeschmolzen. Da das durch den Strom ausgeschiedene Gas unter sehr geringem Druck steht, so sieht man die Bläschen schon in grosser Menge aufsteigen, wenn man den Strom einer kleinen Holtz'schen Maschine hindurchschickt.<sup>1)</sup> Ich habe für meine Versuche die von Kundt construirte combinirte Reibungs- und Influenzmaschine der Holtz'schen Maschine vorgezogen. Letztere liefert freilich unter günstigen äusseren Umständen mehr Electricität, aber erstere hat den grossen Vorzug, dass bei ihr ein Polwechsel nicht stattfinden kann, und dass sie in ihrer Wirkung weniger von den Witterungsverhältnissen beeinflusst wird.

Im voraus sei bemerkt, dass die Haloidzellen mit den frisch eingeschmolzenen Electroden, ehe sie polarisirt wurden, niemals eine Potentialdifferenz zeigten. Die electromotorische Kraft der mit der Maschine polarisirten Zellen wurde mit Hülfe eines Thomson'schen Quadrantenelectrometers mit der eines Daniell verglichen. Ich setze im Folgenden die Potentialdifferenz eines Daniell gleich 100.

Bei Jodsilber mit Platinelectroden erhielt ich sehr leicht eine constante Polarisation = 61,8, welche sich ziemlich lange hielt und bei verschiedenen Proben des Materials keine nennenswerthen Unterschiede ergab. Vertauschte ich die Conductoren der Maschine gegen die Electroden, d. h. kehrte ich die Richtung des polarisirenden Stromes um, so sank die Polarisation sehr rasch auf Null und stieg nach einiger Zeit mit Umkehrung der Pole wieder auf ihren vollen Werth an. Am positiven Pol der Jodsilberzelle sah man nach längerem Durchgang des Stromes deutlich das dunkle Jod im durchscheinenden Jodsilber ausgeschieden.

1) Diese Methode, Wasserzersetzung durch den Strom einer Maschine zu zeigen, dürfte für die Vorlesung sehr geeignet sein.

Bei Bromsilber und Chlorsilber habe ich als Electrode, an der das Silber ausgeschieden werden sollte, ein Stück Silberblech eingeschmolzen und als zweite Electrode ein möglichst feines Kohlenstäbchen aus einer Edison'schen Glühlampe eingeführt. Auch diese Zellen zeigten sich gänzlich ohne Ladungen, so lange sie nicht vom polarisirendem Strom durchflossen waren.

Bromsilber ergab, nachdem der Strom der Maschine hindurch geschickt war, fast immer einen Maximalwerth der Polarisation zwischen 80 und 85, welcher aber, wie es bei der leichten Verflüchtigung und Diffusion des ausgeschiedenen Broms nicht anders zu erwarten war, sehr bald abnahm.

Chlorsilber leitet bei Zimmertemperatur von den drei Haloiden weitaus am schlechtesten, und infolge dessen bildeten sich offenbar statische Ladungen beim Durchgang des Maschinenstromes, denn zu Anfang war die Polarisation des Chlorsilbers scheinbar um so grösser, je länger polarisirt wurde; und trotzdem ich die ebenfalls aus Silberblech und Kohle bestehenden Electroden einander sehr nahe stellte, bekam ich Ausschläge, die gelegentlich etwa einer Polarisation von 200 entsprachen. Jedoch stets nahm der Ausschlag sehr rasch ab, blieb dann längere Zeit auf einem Werthe, dem eine Polarisation = 100 zugehört, und sank später allmählich auf Null.

Der Werth für Jodsilber 61,8 ist im besten Einklang mit dem kürzlich von F. Braun mitgetheilten Werth, und auch die weniger sicheren Angaben für Bromsilber (80—85) und Chlorsilber (ca. 100) entsprechen den von F. Braun ermittelten Zahlen in befriedigender Weise.

9. Die Hauptresultate vorliegender Arbeit lassen sich etwa folgendermassen aussprechen:

Chlorsilber, Bromsilber und Jodsilber leiten die Electricität bei Temperaturen oberhalb ihrer Schmelzpunkte weit besser als die bestleitende Schwefelsäure, d. h. als der überhaupt bestleitende flüssige Electricitätsleiter bei Zimmertemperatur.

Jodsilber leitet am schlechtesten, Chlorsilber am besten, und Bromsilber hält zwischen beiden etwa die Mitte.



Der Widerstand von Chlorsilber und Bromsilber nimmt beim Erstarren derselben sehr stark und rasch zu und steigt beim Abkühlen auf  $20^{\circ}$  bis zu mehr als dem Millionenfachen des Anfangswerthes.

Jodsilber dagegen ändert seinen Widerstand beim Erstarren ( $540^{\circ}$ ) absolut nicht, sondern zeigt ein rapides Anwachsen desselben erst bei derjenigen Temperatur ( $145^{\circ}$ ), bei der es aus dem amorphen in den krystallinischen Zustand übergeht. Es besteht folglich mindestens bei Jodsilber zwischen der Zähigkeit und der electrolytischen Leitungsfähigkeit kein Zusammenhang, der dem bei den Salzlösungen und den Säuren bisher fast durchweg constatirten ähnlich wäre.

Alle drei Haloide leiten noch bei Zimmertemperatur electrolytisch.

Phys. Inst. d. Univ. Strassburg im Juli 1882.

## VII. *Zur Multiplications- und Zurückwerfungs- methode; von E. Dorn.*

Bei mehreren Methoden der absoluten Widerstandsbestimmung, sowie bei anderen galvanischen Messungen bedient man sich des Multiplications- und Zurückwerfungsverfahrens, das wir Hrn. W. Weber verdanken.

Die zur Berechnung der Beobachtungen angewandten Formeln setzen voraus, dass der jedesmalige Inductionsschoss von verschwindend kurzer Dauer ist und genau in dem Augenblick erfolgt, wo die Nadel die Ruhelage passirt.

Die erste der eben genannten Bedingungen ist in einigen Fällen erfüllt, z. B. bei der Induction durch Stromschliessung, resp. -öffnung und hinreichend nahe wohl auch bei einem nicht zu schweren Magnetinductor; doch auch der geübteste Beobachter wird nicht im Stande sein, die Inductionsschösse genau rechtzeitig auszuüben.

Benutzt man aber, wie bei der ersten und zweiten

Weber'schen Methode der absoluten Widerstandsmessung<sup>1)</sup>, einen Erdinductor, so ist auch der Bedingung eines momentanen Ablaufs der Induction nicht mehr zu genügen, da die Drehung immer eine längere Zeit, bei grösseren Instrumenten etwa zwei Secunden erfordert.

Den Einfluss der Unrechtzeitigkeit momentaner Stösse hat Hr. O. Chwolson<sup>2)</sup> untersucht; doch ist der Ausgangspunkt seiner Betrachtung unrichtig, und daher sind auch die Resultate fehlerhaft. Wären die Formeln von Hrn. Chwolson einwurfsfrei, so wäre dies gleichbedeutend mit einem gänzlichen Verzicht auf die Multiplications- und Zurückwerfungsmethode für genauere Messungen.<sup>3)</sup>

Von Versuchen, die Dauer der Drehung des Erdinductors in Rechnung zu ziehen, ist mir nur eine angenäherte Schätzung von Hrn. W. Weber<sup>4)</sup> bekannt.

Im Folgenden will ich nun die gedämpfte Bewegung eines Magnets behandeln, wenn demselben zu beliebigen Zeiten beliebige Geschwindigkeitszuwächse ertheilt werden, und die Resultate dann anwenden auf die Multiplications- und Zurückwerfungsmethode für den Fall verfrühter oder verspäteter momentaner Stösse und eines gleichmässig gedrehten Erdinductors.

Bezeichnet  $\varphi$  den von der Ruhelage aus gerechneten Ablenkungswinkel, so ist die Bewegungsgleichung des Magnets:

$$(1) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + \beta^2\varphi = 0.$$

Ist ferner  $\lambda$  das logarithmische Decrement (mit Dämpfung),  $T_0$  die Schwingungsdauer bei abwesender Dämpfung, und wird endlich gesetzt:

$$(2) \quad \varrho^2 = \beta^2 - \alpha^2,$$

so hat man bekanntlich:

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 6. p. 3. 1874.

2) O. Chwolson, Mélanges physiques et chimiques, St. Pétersbourg. p. 403. 1881.

3) Vgl. die Fehlerschätzung bei einigen Beispielen a. a. O. p. 411 und diese Abh. p. 666.

4) W. Weber, Abh. der k. sächs. Ges. d. Wiss. 1. p. 230. 1846.

$$(3) \quad \alpha = \frac{\pi \lambda}{T_0 \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}},$$

$$(4) \quad \varrho = \frac{\pi^2}{T_0 \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}.$$

Diese Gleichungen dienen dazu, die Constanten der Differentialgleichung durch beobachtbare Grössen auszudrücken.

Es sei nun für  $t = 0$   $\varphi = \varphi_0$  und die Winkelgeschwindigkeit  $v = v_0$  gewesen, so ist das Integral von (1), welches diesen Anfangsbedingungen genügt:

$$(5) \quad \varphi = e^{-\alpha t} \left[ \varphi_0 \cos \varrho t + \frac{v_0 + \alpha \varphi_0}{\varrho} \sin \varrho t \right],$$

$$(5) \quad v = e^{-\alpha t} \left[ v_0 \cos \varrho t - \frac{\alpha v_0 + (\varrho^2 + \alpha^2) \varphi_0}{\varrho} \sin \varrho t \right].$$

Zur Zeit  $t_1$  werde nun eine Geschwindigkeit  $\gamma_1$  zu der vorhandenen hinzugefügt, so wird für  $t = t_1$ :

$$(6) \quad \varphi_1 = e^{-\alpha t_1} \left[ \varphi_0 \cos \varrho t_1 + \frac{v_0 + \alpha \varphi_0}{\varrho} \sin \varrho t_1 \right],$$

$$(6) \quad v_1 = \gamma_1 + e^{-\alpha t_1} \left[ v_0 \cos \varrho t_1 - \frac{\alpha v_0 + (\varrho^2 + \alpha^2) \varphi_0}{\varrho} \sin \varrho t_1 \right].$$

Um die Bewegung für die auf  $t_1$  folgende Zeit zu erhalten, hat man in (5)  $t$ ,  $\varphi_0$ ,  $v_0$  zu ersetzen resp. durch  $t - t_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $v_1$  und findet:

$$(7) \quad \varphi = e^{-\alpha t} \left[ \varphi_0 \cos \varrho t + \frac{v_0 + \alpha \varphi_0}{\varrho} \sin \varrho t \right] + \frac{\gamma_1 e^{-\alpha(t-t_1)}}{\varrho} \sin \varrho(t-t_1).$$

Es möge noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die Zeit hier von dem alten Anfangspunkte gezählt ist.

Man kann nun die Gleichung (7) in die Form setzen:

$$(8) \quad \varphi = e^{-\alpha t} \left[ \varphi_0' \cos \varrho t + \frac{v_0' + \alpha \varphi_0'}{\varrho} \sin \varrho t \right],$$

wo:

$$(9) \quad \varphi_0' = \varphi_0 - \frac{\gamma_1 e^{\alpha t_1}}{\varrho} \sin \varrho t_1,$$

$$(10) \quad v_0' = v_0 + \gamma_1 e^{\alpha t_1} \left( \cos \varrho t_1 + \frac{\alpha}{\varrho} \sin \varrho t_1 \right).$$

Das in den Gleichungen (8), (9), (10) enthaltene Resultat kann man so aussprechen: Hat der Magnet zur Zeit  $t = 0$  in der Stellung  $\varphi_0$  mit einer Winkelgeschwindigkeit  $v_0$  seine Bewegung begonnen, und wird seine

Geschwindigkeit zur Zeit  $t_1$  um  $\gamma_1$  vergrößert, so bewegt er sich nach  $t_1$  ebenso, als wenn er zur Zeit 0 die Bewegung mit den in (9) und (10) definirten Anfangswerthen  $\varphi_0'$  und  $v_0'$  begonnen hätte und sich selbst überlassen geblieben wäre.

Jetzt ist die Verallgemeinerung leicht. Waren für  $t = 0$  die Anfangswerthe der Ablenkung und Winkelgeschwindigkeit  $\varphi_0$  und  $v_0$ , und wird zu den Zeiten  $t_1, t_2 \dots t_n$  die Winkelgeschwindigkeit um resp.  $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$  vermehrt, so kann man nach  $t_n$  hierfür eine Bewegung substituiren, die bei  $t = 0$  mit den Werthen:

$$(11) \quad \varphi' = \varphi_0 - \frac{1}{\varrho} \sum_1^n \gamma_h e^{at_h} \sin \varrho t_h,$$

$$(12) \quad v' = v_0 + \sum_1^n \gamma_h e^{at_h} \left[ \cos \varrho t_h + \frac{a}{\varrho} \sin \varrho t_h \right]$$

angefangen hätte.

Im Falle einer während des Zeitintervalles  $t_0$  bis  $t_0 + \tau$  stattfindenden continuirlichen Induction, welche während  $dt$  die Geschwindigkeit um  $\Gamma dt$  vermehrt, hat man ebenso:

$$(13) \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{\varrho} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \Gamma e^{at} \sin \varrho t dt,$$

$$(14) \quad v' = v_0 + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \Gamma e^{at} \left[ \cos \varrho t + \frac{a}{\varrho} \sin \varrho t \right] dt.$$

$\Gamma$  muss selbstredend als Function von  $t$  gegeben sein.

Die Gleichungen für die definitive Bewegung mögen noch einmal mit diesen Werthen hingeschrieben werden:

$$(15) \quad \varphi = e^{-at} \left[ \varphi' \cos \varrho t + \frac{v' + a\varphi'}{\varrho} \sin \varrho t \right],$$

$$(15') \quad v = e^{-at} \left[ v' \cos \varrho t - \frac{a v' + (\varrho^2 + a^2) \varphi'}{\varrho} \sin \varrho t \right].$$

Beiläufig sei hier noch Folgendes bemerkt. Der zunächst sich darbietende Weg der Behandlung der vorliegenden Aufgabe wäre, die in (6) und (6') gegebenen Werthe als Anfangswerthe für eine neue Epoche zu benutzen und so weiter zu

gehen, wenn später noch neue Geschwindigkeiten hinzutreten. Die Formeln werden aber nicht einfach, und insbesondere macht der Fall einer continuirlichen Induction Schwierigkeiten.<sup>1)</sup>

Für das Folgende ist noch von Wichtigkeit diejenige Geschwindigkeit  $V_0$ , mit welcher der Magnet bei den fictiven Anfangswerthen  $\varphi'$  und  $v'$  die Ruhelage passirt (resp. hätte passiren müssen, um zur Zeit  $t = 0$  sich in  $\varphi'$  mit der Geschwindigkeit  $v'$  zu befinden). Aus (15) folgt zunächst für  $\varphi = 0$  Moment des Durchganges:

$$T = \frac{1}{\varrho} \arctg - \frac{\varrho \varphi'}{v' + \alpha \varphi'},$$

und dann aus (15') nach einigen Reductionen:

$$(16) \quad V_0 = \sqrt{(v' + \alpha \varphi')^2 + \varrho^2 \varphi'^2} e^{-\frac{\alpha}{\varrho} \arctg - \frac{\varrho \varphi'}{v' + \alpha \varphi'}}.$$

Die Formeln (11) bis (16) erlauben, wenn  $v_0$  und  $\varphi_0$  gegeben sind, den Einfluss der Unrechtzeitigkeit, resp. Dauer der Inductionsstösse in aller Strenge festzustellen. Wenn, wie fast stets,  $\varphi_0 = 0$  ist, hat man nur die aus (11) und (12), resp. (13) und (14) entnommenen Werthe von  $\varphi'$  und  $v'$  in (16) einzusetzen und das gefundene  $V_0$  mit dem für einen momentanen rechtzeitigen Stoss geltenden Werth  $v_0 + \gamma$  zu vergleichen. Mit  $\gamma$  ist hier kurz der entsprechende Geschwindigkeitszuwachs im letzteren Falle bezeichnet.

Die in (13) und (14) vorkommenden Integrale mögen ausgeführt werden für einen mit gleichmässiger Geschwindigkeit gedrehten Erdinductor. Wenn derselbe richtig eingestellt ist, so ist für eine in  $\tau$  Secunden vollendete Bewegung um  $180^\circ$ :

$$\Gamma = C \sin \frac{t - t_0}{\tau} \pi,$$

1) Der Fehler von Hrn. Chwolson befindet sich a. a. O. p. 407 in den Worten: „Der obige Satz führt uns etc.“ Er ersetzt die in einem Moment  $t_1$  hinzugefügte Geschwindigkeit durch eine fictive Vergrösserung der Anfangsgeschwindigkeit, übersieht aber, dass dann der Magnet sich zur Zeit  $t = t_1$  an einer ganz anderen Stelle befinden würde. Der angezogene Satz (p. 407 oben) lässt sich zur Lösung des Problems überhaupt nicht verwerthen.

wo  $t_0$  den Moment des Anfanges der Drehung,  $C$  den Maximalwerth von  $\Gamma$  bezeichnet.

Um  $C$  durch  $\gamma$ , den einer instantanen Drehung entsprechenden Zuwachs der Geschwindigkeit auszudrücken, hat man:

$$\gamma = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \Gamma dt = C \int_{t_0}^{t_0+\tau} \sin \frac{t-t_0}{\tau} \pi dt = C \frac{2\tau}{\pi},$$

also:

$$C = \frac{\gamma}{2} \frac{\pi}{\tau}.$$

Es ergibt sich nun aus (13) und (14):

$$(17) \left\{ \begin{aligned} q' &= q_0 - \frac{\gamma}{2} \frac{\pi}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{\alpha t} \sin \varrho t \sin \frac{t-t_0}{\tau} \pi dt \\ &= q_0 - \frac{\frac{\gamma}{2} \frac{\pi^2}{\tau^2}}{\left[ \frac{\pi^2}{\tau^2} + \alpha^2 - \varrho^2 \right]^2 + 4\alpha^2 \varrho^2} \left[ \begin{aligned} &\left[ \frac{\pi^2}{\tau^2} + \alpha^2 - \varrho^2 \right] \left[ e^{\alpha(t_0+\tau)} \sin \varrho(t_0+\tau) + e^{\alpha t_0} \sin \varrho t_0 \right] \\ &- 2\alpha \varrho \left[ e^{\alpha(t_0+\tau)} \cos \varrho(t_0+\tau) + e^{\alpha t_0} \cos \varrho t_0 \right] \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(18) \left\{ \begin{aligned} v' &= v_0 + \frac{\gamma}{2} \frac{\pi}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{\alpha t} \left( \cos \varrho t + \frac{\alpha}{\varrho} \sin \varrho t \right) \sin \frac{t-t_0}{\tau} \pi dt \\ &= v_0 + \frac{\frac{\gamma}{2} \frac{\pi^2}{\tau^2}}{\left[ \frac{\pi^2}{\tau^2} + \alpha^2 - \varrho^2 \right]^2 + 4\alpha^2 \varrho^2} \left[ \begin{aligned} &\left[ \frac{\pi^2}{\tau^2} - \alpha^2 - \varrho^2 \right] \left[ e^{\alpha(t_0+\tau)} \cos \varrho(t_0+\tau) + e^{\alpha t_0} \cos \varrho t_0 \right] \\ &+ \frac{\alpha}{\varrho} \left[ \frac{\pi^2}{\tau^2} + \alpha^2 + \varrho^2 \right] \left[ e^{\alpha(t_0+\tau)} \sin \varrho(t_0+\tau) + e^{\alpha t_0} \sin \varrho t_0 \right] \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$

#### Näherungsformeln.

Die oben entwickelten strengen Formeln sind praktisch in vielen Fällen nicht brauchbar. Sie lassen zunächst die Abhängigkeit der hauptsächlich in Betracht kommenden Geschwindigkeit  $V_0$  von der Unrechtzeitigkeit und Dauer der Induction nicht explicite hervortreten; gänzlich ungeeignet erweisen sie sich aber zur Anwendung auf die Multiplications- und Zurückwerfungsmethode, wo  $v_0$  nicht gegeben ist, sondern aus  $V_0$  erst berechnet werden muss.

Wenn aber  $\varphi_0 = 0$  ist, was von nun an stets angenommen werden soll, und die oben mit  $t_1$ ,  $t_0$  und  $\tau$  bezeichneten Grössen gegen die Schwingungsdauer der Magnetnadel klein

sind, so lassen sich bequeme Entwicklungen nach Potenzen von  $t_1$ , resp.  $t_0$  und  $r$  herleiten, wobei bis zu Grössen der dritten Ordnung gegangen werden soll. Zu dem Ende werde (16) zunächst so geschrieben:

$$(19) \quad V_0 = (v' + \alpha \varphi') \sqrt{1 + \frac{\varrho^2 \varphi'^2}{(v' + \alpha \varphi')^2}} e^{-\frac{\alpha}{\varrho} \arctg \xi - \frac{\varrho \varphi'}{v' + \alpha \varphi'}}.$$

Setzt man nun:

$$\xi = \frac{\varrho \varphi'}{v' + \alpha \varphi'},$$

so wird mit Vernachlässigung von Potenzen, die höher als die dritte sind:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \xi^2} e^{\frac{\alpha}{\varrho} \arctg \xi} &= \sqrt{1 + \xi^2} e^{\frac{\alpha}{\varrho} (\xi - \frac{1}{3}\xi^3)} \\ &= (1 + \frac{1}{2}\xi^2) \left[ 1 + \frac{\alpha}{\varrho} \xi + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\varrho^2} \xi^2 - \frac{2\alpha\varrho^2 - \alpha^3}{6\varrho^3} \xi^3 \right] \\ &= 1 + \frac{\alpha}{\varrho} \xi + \frac{\varrho^2 + \alpha^2}{2\varrho^2} \xi^2 + \frac{\alpha\varrho^2 + \alpha^3}{6\varrho^3} \xi^3, \end{aligned}$$

und nach Einführung in (19):

$$(20) \quad V_0 = v' + 2\alpha\varphi' + \frac{(\varrho^2 + \alpha^2)}{2} \frac{\varphi'^2}{v' + \alpha\varphi'} + \frac{\alpha\varrho^2 + \alpha^3}{6} \frac{\varphi'^3}{(v' + \alpha\varphi')^2}.$$

Nun ist  $\varphi'$  augenscheinlich erster Ordnung, und wenn man  $v' = v_0 + \gamma + \omega$  setzt, wo  $\gamma$  den für rechtzeitige Wirkung erfolgenden Geschwindigkeitszuwachs bedeutet, so ist auch  $\omega$  erster Ordnung, wie aus einer Betrachtung der Formeln (11), (12) und (13), (14) hervorgeht. Indem man nur noch die Brüche entwickelt, wird:

$$(21) \quad V_0 = v_0 + \gamma + \omega + 2\alpha\varphi' + \frac{\varrho^2 + \alpha^2}{2} \frac{\varphi'^2}{v_0 + \gamma} \left( 1 - \frac{\omega + \alpha\varphi'}{v_0 + \gamma} \right) + \frac{\alpha\varrho^2 + \alpha^3}{6} \frac{\varphi'^3}{(v_0 + \gamma)^2}.$$

Da, wie gezeigt werden wird, in den später zu behandelnden Fällen  $\omega + 2\alpha\varphi'$  zweiter Ordnung wird, kann man  $\omega + \alpha\varphi'$  im vorletzten Term durch  $-\alpha\varphi'$  ersetzen und findet:

$$(22) \quad V_0 = v_0 + \gamma + \omega + 2\alpha\varphi' + \frac{\varrho^2 + \alpha^2}{2} \frac{\varphi'^2}{v_0 + \gamma} + \frac{1}{3} (\alpha\varrho^2 + \alpha^3) \frac{\varphi'^3}{(v_0 + \gamma)^2}.$$

Es sollen nun zwei specielle Annahmen weiter verfolgt werden.

Es habe zunächst eine Verspätung  $t_1$  (eine Verfrühung als negative Verspätung gerechnet) eines momen-



tanen Inductionstosses stattgefunden. Aus (11) und (12) folgt dann durch Entwicklung:

$$q' = -\frac{\gamma}{\varrho} e^{\alpha t_1} \sin \varrho t_1 = -\gamma \left[ t_1 + \alpha t_1^2 + \frac{3\alpha^2 - \varrho^2}{6} t_1^3 \right],$$

$$\begin{aligned} v' &= v_0 + \gamma e^{\alpha t_1} \left[ \cos \varrho t_1 + \frac{\alpha}{\varrho} \sin \varrho t_1 \right] = v_0 + \gamma + \omega \\ &= v_0 + \gamma + \gamma \left[ 2\alpha t_1 + \frac{3\alpha^2 - \varrho^2}{2} t_1^2 + \frac{2}{3} (\alpha^3 - \alpha \varrho^2) t_1^3 \right], \end{aligned}$$

und durch Einsetzen in (22):

$$(23) \quad V_0 = v_0 + \gamma - \frac{\varrho^2 + \alpha^2}{2} \frac{v_0 \gamma}{v_0 + \gamma} \cdot t_1^2 - \frac{\alpha(\varrho^2 + \alpha^2)}{3} \frac{v_0 \gamma (v_0 - \gamma)}{(v_0 + \gamma)^2} t_1^3$$

oder mit Benutzung von (3) und (4):

$$(24) \quad V_0 = v_0 + \gamma - \frac{v_0 \gamma}{v_0 + \gamma} \cdot \frac{\pi^2}{2 T_0^2} t_1^2 - \frac{v_0 \gamma (v_0 - \gamma)}{(v_0 + \gamma)^2} \frac{\pi^3 \lambda}{3 T_0^3 \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} t_1^3.$$

Als merkwürdig fällt hier in die Augen, dass kein Term erster Ordnung vorkommt, und also, von dem meistens sehr kleinen Term 3. Ordnung abgesehen, eine Verfrüherung dieselbe Wirkung hat wie eine Verspätung.

Ferner werde ein Erdinductor betrachtet, der mit gleichmässiger Geschwindigkeit in der Zeit von  $t_0$  bis  $t_0 + \tau$  um  $180^\circ$  gedreht wird.

Die Werthe von  $q'$  und  $v'$  könnten aus den Schlussformeln (17) und (18) hergeleitet werden, sie ergeben sich aber bequemer durch Entwicklung nach Potenzen von  $t$  vor der Integration.

Hierdurch ergibt sich:

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{\gamma}{2} \frac{\pi}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \left[ t + \alpha t^2 + \frac{3\alpha^2 - \varrho^2}{6} t^3 \right] \sin \frac{t - t_0}{\tau} \pi dt \\ &= -\frac{\gamma}{2} \left[ (t_0 + \tau) + t_0 + \alpha \left\{ (t_0 + \tau)^2 + t_0^2 - \frac{4\tau^2}{\pi^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\alpha^2 - \varrho^2}{6} \left\{ (t_0 + \tau)^3 + t_0^3 - \frac{6\tau^2}{\pi^2} ((t_0 + \tau) + t_0) \right\} \right], \end{aligned}$$

$$v' = v_0 + \gamma + \frac{\gamma}{2} \frac{\pi}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \left[ 2\alpha t + \frac{3\alpha^2 - \varrho^2}{2} t^2 + \frac{2(\alpha^3 - \alpha \varrho^2)}{3} t^3 \right] \sin \frac{t - t_0}{\tau} \pi dt$$

$$= v_0 + \gamma + \frac{\gamma}{2} \left[ 2\alpha \left\{ (t_0 + \tau) + t_0 \right\} + \frac{3\alpha^2 - \varrho^2}{2} \left\{ (t_0 + \tau)^2 + t_0^2 - \frac{4\tau^2}{\pi^2} \right\} \right. \\ \left. + \frac{2(\alpha^3 - \alpha\varrho^2)}{3} \left\{ (t_0 + \tau)^3 + t_0^3 - \frac{67^2}{\pi^2} ((t_0 + \tau) + t_0) \right\} \right].$$

Führt man statt  $t_0$  den Moment  $\vartheta$  der Mitte der Inductorbewegung ein, also  $\vartheta = t_0 + \frac{1}{2}\tau$ , so nehmen diese Formeln eine etwas übersichtlichere Gestalt an:

$$\varphi' = -\gamma \left[ \vartheta + \alpha \left\{ \vartheta^2 + \tau^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{3\alpha^2 - \varrho^2}{6} \left\{ \vartheta^3 + 3\tau^2\vartheta \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) \right\} \right], \\ v' = v_0 + \gamma + \gamma \left[ 2\alpha\vartheta + \frac{3\alpha^2 - \varrho^2}{2} \left\{ \vartheta^2 + \tau^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{2(\alpha^3 - \alpha\varrho^2)}{3} \left\{ \vartheta^3 + 3\tau^2\vartheta \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) \right\} \right].$$

Die mit  $\omega$  bezeichnete Grösse ist hier  $\gamma [2\alpha\vartheta + \dots]$ , so mit also auch hier  $\omega + 2\alpha\varphi'$  der zweiten Ordnung. Das Einsetzen dieser Werthe in (22) liefert endlich:

$$(25) \quad V_0 = v_0 + \gamma - \frac{\varrho^2 + \alpha^2}{2} \frac{v_0\gamma}{v_0 + \gamma} \vartheta^3 - \frac{\alpha(\varrho^2 + \alpha^2)}{3} \frac{v_0\gamma(v_0 - \gamma)}{(v_0 + \gamma)^2} \vartheta^3 \\ - \frac{\varrho^2 + \alpha^2}{2} \gamma \tau^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) \\ = v_0 + \gamma - \frac{v_0\gamma}{v_0 + \gamma} \frac{\pi^2}{2T_0^2} \vartheta^2 - \frac{v_0\gamma(v_0 - \gamma)}{(v_0 + \gamma)^2} \frac{\pi^2\lambda}{2T_0^3\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \vartheta^3 \\ - \gamma \cdot \frac{\pi^2}{2T_0^2} \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) \tau^2.$$

Der Factor  $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}$  ist = 0,047 358, sodass auch verhältnissmässig bedeutende  $\tau$  auf  $V_0$  nur einen geringen Einfluss ausüben.

Die Formel (25) geht für  $\tau = 0$  in (24) über, wie es ja sein muss.

Um den Grad der Annäherung der Formeln (24) und (25) festzustellen, habe ich ein Beispiel nach denselben numerisch berechnet, und das Resultat mit dem nach den strengen Formeln erhaltenen verglichen.

Für  $\gamma = 1$ ,  $v_0 = -0,26894$  (etwa der Zurückwerfungs-methode entsprechend gewählt)  $\lambda = 0,5$ ,  $T_0 = 20$  Sec.,  $t = 0,5$  Sec. wird in (24) der Term:

$$\begin{array}{rcl}
 0. \text{ Ordnung} & 0,731\,06, \\
 2. \text{ Ordnung} & + 0,001\,134, \\
 3. \text{ Ordnung} & - 0,000\,016, \\
 \hline
 V_0 = & 0,731\,18.
 \end{array}$$

Andererseits liefern (11) und (12) zunächst  $\varphi' = -0,50571$ ,  $v' = +0,75292$ , woraus dann mit Hülfe von (16) folgt  $V_0 = 0,73117$ .

In (25) kommt es vor allem darauf an, ob der Einfluss von  $\tau$ , der Dauer der Drehung, durch den letzten Term genügend dargestellt wird. Mit Rücksicht hierauf werde gesetzt:  $\gamma = 1$ ,  $v_0 = -0,26894$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $T_0 = 20 \text{ Sec.}$ ,  $\vartheta = 0$ ,  $\tau = 2 \text{ Sec.}$

Es folgt dann der Term 0. Ordnung  $0,73106$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{„ „ mit } \tau^2 & - 0,00234 \\
 \hline
 V_0 = & 0,72872
 \end{array}$$

Die Einsetzung der mit Hülfe von (17) und (18) erhaltenen Werthe  $\varphi' = -0,004668$ ,  $v' = 0,72895$  in (16) ergibt den strengen Werth  $V_0 = 0,72871$ .

Hieraus geht hervor, dass schon die Berücksichtigung des Terms zweiter Ordnung genügt. Die Glieder dritter Ordnung sind wohl ohne praktischen Werth, da schon in der Differentialgleichung, welche ja nur eine angenäherte ist, Grössen von entsprechendem Betrage vernachlässigt sind.

Die erhaltenen Resultate sollen nun auf die Multiplikations- und Zurückwerfungsmethode angewendet werden.

Fassen wir zunächst den Fall einer momentanen Induction ins Auge, und sei  $t_1$  die Verspätung des Stosses in einer Richtung,  $t_2$  in der anderen. Wie Hr. Chwolson treffend hervorhebt, sind  $t_1$  und  $t_2$  als constant zu betrachten, da ja die Operation fortgesetzt wird, bis die Ausschläge constant geworden sind. Ferner brauchen  $t_1$  und  $t_2$  nicht untereinander gleich zu sein. Die analogen Bemerkungen werden für die bei einem Erdinductor auftretenden Grössen  $\vartheta_1$ ,  $\tau_1$ ,  $\vartheta_2$ ,  $\tau_2$  gelten.

Wird die Geschwindigkeit positiv gerechnet im Sinne des jedesmaligen Inductionsstosses, also  $\gamma$  immer  $+$ , und werden die  $V_0$  und  $v_0$  bei momentanen rechtzeitigen Stössen entsprechenden Grössen mit  $W_0$  und  $w_0$  bezeichnet, so ist:

$$(26) \quad W_0 = w_0 + \gamma,$$

und nachdem die Ausschläge constant geworden sind, was immer angenommen werden möge, für die Multiplicationsmethode:

$$(27) \quad w_0 = W_0 e^{-\lambda}, \text{ also:}$$

$$(28) \quad W_0 = \frac{\gamma}{1 - e^{-\lambda}}, \quad (29) \quad w_0 = \frac{\gamma e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Bei Verspätungen  $t_1$  und  $t_2$  seien die früher allgemein mit  $V_0$  und  $v_0$  bezeichneten Grössen für die Bewegung nach der einen Seite  $V_0^{(1)}$  und  $v_0^{(1)}$ , nach der anderen Seite  $V_0^{(2)}$  und  $v_0^{(2)}$ . Dann ist:

$$(30) \quad v_0^{(1)} = V_0^{(2)} e^{-\lambda},$$

$$(30') \quad v_0^{(2)} = V_0^{(1)} e^{-\lambda},$$

und durch Einsetzen dieser Werthe in (24) geht hervor, dass  $v_0^{(1)}$  und  $v_0^{(2)}$  sich von  $w_0$  nur um Grössen zweiter Ordnung unterscheiden, und dass man also mit Vernachlässigung der vierten Ordnung in den beiden letzten Termen von (24) statt der  $v_0$  einfach  $w_0$  schreiben kann.

Wenn zur Abkürzung

$$(31) \quad \mathfrak{M}(t) = \frac{\pi^2}{2 T_0^2} e^{-\lambda} t^2 + \frac{\pi^2 \lambda}{3 T_0^2} \frac{e^{-\lambda} (2e^{-\lambda} - 1)}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} t^3$$

gesetzt wird, hat man nach (24), (30), (30'):

$$(32) \quad V_0^{(1)} = V_0^{(2)} e^{-\lambda} + \gamma - \gamma \mathfrak{M}(t_1),$$

$$(32') \quad V_0^{(2)} = V_0^{(1)} e^{-\lambda} + \gamma - \gamma \mathfrak{M}(t_2),$$

woraus:

$$(33) \quad \frac{1}{2} (V_0^{(1)} + V_0^{(2)}) = \frac{\gamma}{1 - e^{-\lambda}} \left[ 1 - \frac{1}{2} (\mathfrak{M}(t_1) + \mathfrak{M}(t_2)) \right].$$

Für einen Erdinductor ergibt sich ebenso:

$$(33') \quad \frac{1}{2} (V_0^{(1)} + V_0^{(2)}) = \frac{\gamma}{1 - e^{-\lambda}} \left[ 1 - \frac{1}{2} (\mathfrak{M}_e(\vartheta_1, \tau_1) + \mathfrak{M}_e(\vartheta_2, \tau_2)) \right],$$

wo:

$$(31') \quad \mathfrak{M}_e(\vartheta, \tau) = \frac{\pi^2}{2 T_0^2} \left( 1 - \frac{2}{\pi^2} \right) \tau^2 + \frac{\pi^2}{2 T_0^2} e^{-\lambda} \vartheta^2 + \frac{\pi^2 \lambda e^{-\lambda} (2e^{-\lambda} - 1)}{3 T_0^2 \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \vartheta^3.$$

Der beobachtete Schwingungsbogen ist mit  $V_0^{(1)} + V_0^{(2)}$  proportional. Derselbe fällt also bei der Multiplications-

methode stets zu klein aus, wenn die Stösse nicht momentan und rechtzeitig erfolgen.

Die gewöhnlich sich darbietende Aufgabe ist, aus dem beobachteten Schwingungsbogen den wahren Werth der ertheilten Geschwindigkeit  $\gamma$  zu bestimmen. Sei  $\gamma'$  derjenige Werth, den man aus dem beobachteten Schwingungsbogen ohne Rücksicht auf die Correctionen berechnet, also:

$$(34) \quad \frac{1}{2}(V_0^{(1)} + V_0^{(2)}) = \frac{\gamma'}{1 - e^{-\lambda}},$$

so folgt durch Vergleichung mit (33), resp. (33') in Rücksicht darauf, dass  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}_e$  zweiter Ordnung sind:

$$(35) \quad \gamma = \gamma' \left[ 1 + \frac{1}{2}(\mathfrak{M}(t_1) + \mathfrak{M}(t_2)) \right],$$

$$(35') \quad \gamma = \gamma' \left[ 1 + \frac{1}{2}(\mathfrak{M}_e(\vartheta_1, \tau_1) + \mathfrak{M}_e(\vartheta_2, \tau_2)) \right].$$

Ganz analog lässt sich die Zurückwerfungsmethode behandeln.

Für momentane rechtzeitige Stösse wäre hier:

$$(36) \quad w_0 = -W_0 e^{-2\lambda}, \quad (37) \quad W_0 = \frac{\gamma}{1 + e^{-2\lambda}},$$

$$(38) \quad w_0 = -\frac{\gamma e^{-2\lambda}}{1 + e^{-2\lambda}}.$$

Die den grossen Bogen bestimmende Summe der Anfangsgeschwindigkeiten folgt aus:

$$(39) \quad \frac{1}{2}(V_0^{(1)} + V_0^{(2)}) = \frac{\gamma}{1 + e^{-2\lambda}} \left[ 1 + \frac{1}{2}(\mathfrak{R}(t_1) + \mathfrak{R}(t_2)) \right],$$

und für einen Erdinductor:

$$(39') \quad \frac{1}{2}(V_0^{(1)} + V_0^{(2)}) = \frac{\gamma}{1 + e^{-2\lambda}} \left[ 1 + \frac{1}{2}(\mathfrak{R}_e(\vartheta_1, \tau_1) + \mathfrak{R}_e(\vartheta_2, \tau_2)) \right],$$

wo:

$$(40) \quad \mathfrak{R}(t) = \frac{\pi^2}{2T_0^2} e^{-2\lambda} t^2 - \frac{\pi^2 \lambda}{2T_0^3} \frac{e^{-2\lambda}(1 + 2e^{-2\lambda})}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} t^3,$$

$$(40') \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_e(\vartheta, \tau) &= \frac{\pi^2}{2T_0^2} e^{-2\lambda} \vartheta^2 - \frac{\pi^2 \lambda}{3T_0^3} \frac{e^{-2\lambda}(1 + 2e^{-2\lambda})}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \vartheta^3 \\ &\quad - \frac{\pi^2}{2T_0^2} \left( 1 - \frac{2}{\pi^2} \right) \tau^2. \end{aligned} \right.$$

Die wahre ertheilte Geschwindigkeit  $\gamma$  hängt mit der ohne Berücksichtigung der Correctionen aus dem beobachteten grossen Bogen berechneten durch die Relationen zusammen:

$$(41) \quad \gamma = \gamma' \left[ 1 - \frac{1}{2} (\Re(t_1) + \Re(t_2)) \right], \text{ resp. :}$$

$$(41') \quad \gamma = \gamma' \left[ 1 - \frac{1}{2} (\Re(\vartheta_1, \tau_1) + \Re(\vartheta_2, \tau_2)) \right],$$

Der grosse Bogen wird für momentane Stösse stets zu gross, während er bei Anwendung eines Erdinductors zu gross und auch zu klein werden kann.

Man übersieht übrigens leicht, dass der aus dem grossen und kleinen Bogen  $A$  und  $B$  nach der Formel:

$$\lambda = \log \text{nat} \frac{A}{B}$$

berechnete Werth des logarithmischen Decrementes durch die Unrechtzeitigkeit, resp. Dauer der Induction nicht beeinflusst wird.

Um von dem Betrage der Correctionen eine Vorstellung zu geben, soll der relative Fehler für einige Beispiele berechnet werden unter der Annahme  $t_1 = t_2$  mit Vernachlässigung des Terms dritter Ordnung. Wo nicht eine besondere Veranlassung vorliegt, werde die Rechnung unter Voraussetzung der Multiplicationsmethode geführt, da hier die Abweichung noch etwas grösser ausfällt.

Die drei Beispiele von Hrn. Chwolson p. 411 ergeben:

$\lambda$	$T_0$ Sec.	$t_1$ Sec.	Relativer Fehler	In Proc.	Nach Chwol. Proc.
0,3	25	0,2	0,000 234	0,0234	0,5
0,8	15	0,5	0,002 46	0,246	5,3
1,5	8	0,8	0,011 0	1,10	31,6

Ein besonderes Interesse knüpft sich an die Frage, welchen Einfluss die hier erörterten Verhältnisse auf die Bestimmung der Quecksilbereinheit in absolutem Maasse durch Hrn. F. Kohlrausch <sup>1)</sup> gehabt haben können.

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 6. p. 1. 1874.

Bei einer der Beobachtungen war  $\lambda = 0,4949$ ,  $T_0$  etwa 34,4. Ueber die Art, wie die Drehung des Erdinductors bei der benutzten Zurückwerfungsmethode ausgeführt wurde, sind leider nähere Angaben nicht gemacht. Da das Instrument ziemlich gross war, nehme ich die Dauer der Drehung  $\tau = 2$  Sec. an. Unter der Annahme  $\vartheta = 0$  würde, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, die Umkehr schon vor Erreichung der Ruhelage eintreten. Für  $\vartheta = 0,16$  würde die Umkehr sehr nahe an der richtigen Stelle erfolgen. Endlich könnte, was freilich wenig wahrscheinlich ist, die Drehung des Inductors erst in dem Augenblick begonnen sein, wo die Nadel die Ruhelage passirte, und dann wäre  $\vartheta = 1$  Sec. zu setzen.

Unter diesen drei Annahmen wäre der relative Fehler der Winkelgeschwindigkeit  $\gamma$  in Procenten:

$\vartheta$	0	0,16	1
Fehler in Proc.	+0,0790	+0,0750	-0,0760

Da nun in der Formel für den absoluten Widerstand <sup>1)</sup>  $\gamma^2$  im Nenner steht, so wäre der procentische Fehler der Widerstandsbestimmung:

$$-0,1580 \quad -0,1500 \quad +0,1520.$$

Ein — bedeutet hier, dass das Resultat von Kohlrausch zu verkleinern, ein +, dass es zu vergrössern ist.

Hr. W. Weber corrigirt an der schon citirten Stelle <sup>2)</sup> den beobachteten grossen Bogen von 79,4 mit Rücksicht auf die Dauer der Drehung des Erdinductors um +0,5.

Da  $T_0 = 10,2818$  Sec.,  $\tau = 2$  Sec. war, ergibt die Rechnung nach obigen Formeln unter der Annahme  $\vartheta = 0$  die erforderliche Reduction = + 0,00844.  $79,4 = + 0,67$ .

In Leipzig sind neuerdings mit sehr bedeutenden Mitteln Apparate zur absoluten Widerstandsmessung auf Veranlassung der Hrn. W. Weber und Zöllner aufgestellt und zu einigen vorläufigen Versuchen benutzt worden. <sup>3)</sup>

1) a. a. O. p. 14.

2) W. Weber, Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1. p. 230. 1846.

3) Zöllner, Wissenschaftliche Abhandlungen 4. p. 443. 1881.



Die Drehung des Erdinductors wurde auch hier in 2 Sec. ausgeführt. Bei dem einen der benutzten Magnete von 200 mm Länge war  $T_0$  nahe 17 Sec., bei dem anderen 100 mm langen  $T_0 = 30,7$  Sec., was für  $\vartheta = 0$  den relativen Fehler  $+0,00324$ , resp.  $+0,00099$  ergibt. Der beobachtete Bogen ist um den angegebenen Bruchtheil zu vergrössern; man erkennt, dass die Schwingungsdauer von 17 Sec. für fundamentale Messungen nicht genügt.

#### Experimentelle Prüfung der Formeln.

Die oben erhaltenen theoretischen Resultate sind eigenthümlich genug, um eine Bestätigung durch die Beobachtung wünschenswerth zu machen.

Es wurde benutzt ein Galvanometer von Meyerstein mit astatischem Magnetpaar, dessen Schwingungsdauer etwa 35,8 Sec. betrug, und bei der Aufstellung zunächst Sorge getragen, dass die Ruhelage der Symmetrielage entsprach, d. h. dass entgegengesetzt gleiche Ströme beiderseits gleiche Ablenkungen ergaben. Die Scala war vom Spiegel 3378 Scalentheile entfernt, und ihre Theilfehler überstiegen nicht 0,1 mm. Zur Induction diente ein Magnetinductor mit nur 15 Windungen, dessen Bewegung in 0,1 bis 0,2 Sec. ausgeführt werden konnte, und ein kleiner Erdinductor, der sich in 0,2 bis 0,3 Sec. umlegen liess. Die Ruhelage des Galvanometers blieb ungeändert, gleichviel in welcher der beiden Endlagen der inducirende Magnet des Magnetinductors sich befand.

Eine in den Stromkreis eingeschaltete Siemens'sche Widerstandsscala erlaubte, die Dämpfung und den Ausschlag in geeigneten Grenzen zu halten.

Infolge des grossen Werthes von  $T_0$  lassen sich die Inductionsstösse beider Instrumente als momentane betrachten, wie leicht aus den Formeln hervorgeht, und auch Verspätungen oder Verfrühungen derselben Ordnung, wie die Dauer der Bewegung, bleiben ohne bemerkbaren Einfluss. Auf dem Scalentheil 500 befand sich eine deutlich sichtbare Marke, und diese wurde vor jeder Reihe durch Verschiebung der Scala zur Coincidenz mit der Ruhelage gebracht.

Die Aufgabe, die Inductionsstöße um einen hinreichend genau bekannten Betrag zu früh oder zu spät auszuüben, würde sich mit Hülfe einer Uhr gar nicht oder nur sehr unvollkommen lösen lassen. Es wurden daher zwei weitere Marken symmetrisch zur ersten auf der Scala befestigt und die Bewegung der Instrumente in dem Moment vorgenommen, wo die Marke auf dem Fadenkreuz erschien.

Die Verfrühung oder Verspätung  $t_1$  konnte leicht aus der dem Stosse vorhergehenden Elongation  $\varphi_0$  und der Entfernung  $\varphi_1$  der betreffenden Marke von der Ruhelage berechnet werden.

Da nämlich im Moment der Umkehr die Winkelgeschwindigkeit = 0 ist, folgt aus (5):

$$(42) \quad \varphi = \Phi_0 e^{-\alpha t} \cos \varrho t,$$

wenn zunächst die Zeit vom Moment der Umkehr an gerechnet wird.

Die Ruhelage wird passirt zur Zeit  $\pi/2\varrho$ , und die von da an gezählte Verspätung  $t_1$  folgt aus:

$$(43) \quad \Phi_1 = -\Phi_0 e^{-\frac{\alpha\pi}{2\varrho} - \alpha t_1} \sin \varrho t_1.$$

Das negative Zeichen hat die Bedeutung, dass im Fall einer Verspätung  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  auf entgegengesetzten Seiten der Ruhelage sich befinden.

Mit Rücksicht auf (3) und (4) kann (43) geschrieben werden:

$$(45) \quad \Phi_1 = -\Phi_0 e^{-\frac{\lambda}{2} - \alpha t_1} \sin \varrho t_1,$$

woraus:

$$(45) \quad t_1 = -\frac{1}{\varrho} \frac{\Phi_1 e^{\frac{\lambda}{2}} [1 + \alpha t_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 t_1^2 + \dots]}{\Phi_0 [1 - \frac{1}{2} \varrho^2 t_1^2 + \frac{1}{120} \varrho^4 t_1^4 - \dots]},$$

eine Formel, welche eine bequeme successive Näherung in leicht ersichtlicher Weise ermöglicht.

Bei anderen Beobachtungen, welche den Einfluss einer langsamen Drehung des Erdinductors zum Gegenstande hatten, wurde  $\Phi_0$  durch einen Vorversuch ermittelt und

dasjenige  $\Phi_1$ , bei dessen Passiren die Drehung zu beginnen hatte, einfach aus (43) berechnet.

Das Folgende enthält die Beobachtungen und ihre Vergleichung mit der Theorie.

Multiplicationsmethode. 21. Aug. 1882.

Erdinductor, möglichst rasch gedreht. Induction durch die horizontale Componente. Seitliche Marken von der mittleren um 50 Scalentheile entfernt.

$$T_0 = 35,84. \quad \lambda_{\text{nat}} = 0,8481.$$

$t_1$ Sec. + Verspätung - Verfrühung	Bogen	Differenz beob.	Differenz ber.	ber. - beob.
0	372,12	—	—	—
+ 6,63	347,20	-25,04	-26,46	-1,42
- 4,67	359,00	-13,24	-13,54	-0,30
0	372,35	—	—	—

Die Bogen sind in Scalentheilen gegeben, welche den Ablenkungswinkeln proportional gemacht sind.<sup>1)</sup> Die Columne Diff. beob. gibt den Unterschied der Bogen bei unzeitigen Stößen gegen das Mittel der ersten und letzten Beobachtung. Da  $t_2$  hier =  $t_1$ , so ist die Columne Diff. ber. erhalten aus dem Bogen bei zeitigen Stößen durch Multiplication mit dem in (32) definirten  $\mathcal{M}(t_1)$ .

Zurückwerfungsmethode. 21. Aug. 1882.

Magnetinductor, möglichst rasch bewegt. Seitliche Marken von der mittleren um 50 Scalentheile entfernt.

$$T_0 = 35,84 \text{ Sec.} \quad \lambda_{\text{nat}} \text{ Mittel} = 0,5643.$$

$t_1$ + Verspätung - Verfrühung	A	B	$\lambda = \log \text{nat} \frac{A}{B}$	$\Delta A$ beob.	$\Delta A$ ber.	ber. - beob.
0	662,46	376,35	0,5653	—	—	—
+ 4,36	677,60	385,68	0,5636	+15,52	+14,46	-1,06
0	661,69	376,39	0,5642	—	—	—
- 3,82	674,76	383,78	0,5643	+13,07	+12,79	-0,28
0	661,69	376,49	0,5639	—	—	—

1) cfr. F. Kohlrausch, Prakt. Physik. 4. Aufl. p. 145 unten. 1880.

$A$  und  $B$  bedeuten den grossen und kleinen Bogen und haben auch die Correction auf Winkelgrössen erhalten. Die aus den einzelnen Reihen folgenden  $\lambda$  weichen von ihrem Mittel im Durchschnitt nur um  $\pm 0,0004$ , also noch nicht 0,1 Proc. ab. Die  $\Delta A$  berechnet sind ähnlich wie oben erhalten mit Benutzung von  $\Re(t_1)$  in (40). Eine Vergleichung der kleinen Bogen ist nicht besonders ausgeführt, weil dieselben mit Rücksicht auf das sich constant ergebende  $\lambda$  zu entsprechenden Resultaten führen würden.

Zurückwerfungsmethode. 22. Aug. 1882.

Induction durch die Verticalcomponente. Seitliche Marken um 13,5 Scalentheile von der mittleren entfernt. Die Drehung wurde beim Passiren der Marke, also 3 Sec. zu früh, begonnen und in sechs Secunden nach der Uhr möglichst gleichmässig ausgeführt.

$$T_0 = 35,89 \text{ Sec.} \quad \lambda_{\text{nat}} \text{ Mittel} = 0,8442.$$

$\tau$ Dauer der Drehung	$A$	$B$	$\lambda$	$\Delta A$ beob.	$\Delta A$ ber.	beob. — ber.
0,2 Sec.	385,16	165,47	0,8449	—	—	—
6	382,78	164,69	0,8434	—2,39	—2,51	—0,12
0,2	385,18	165,54	0,8445	—	—	—
6	382,60	164,54	0,8438	—2,46	—2,51	—0,05
0,2	384,93	165,47	0,8443	—	—	—

Auch hier ist die Uebereinstimmung der  $\lambda$  eine gute (bis auf  $\pm 0,00046$ ), sodass man auf eine Vergleichung der  $B$  verzichten kann. Da  $\vartheta$ , die Verspätung der Mittelzeit der Drehung, = 0 war, hat man nach (40') zur Rechnung nur anzuwenden:

$$\Re(0, \tau) = -\frac{\pi^2}{2T_0^2} \left(1 - \frac{2}{\pi^2}\right) \tau^2.$$

Versuche über den Einfluss der Dauer der Drehung bei der Multiplicationsmethode sind nicht angestellt, da dieser hier von dem in demselben Sinne wirkenden einer Unrechtzeitigkeit sich schwer trennen liesse.

Die Beobachtung hat also durchgängig eine Bestätigung der Theorie ergeben.

Die entwickelten Formeln werden in den meisten Fällen

nur benutzt werden, um eine Schätzung für die Grösse der möglichen Fehler zu gewinnen; zu einer wirklichen Correction erhaltener Beobachtungsdata wird man sie hingegen in dem sehr wichtigen Falle grosser Erdinductoren verwerthen. Es müssen die Beobachtungen dann aber auch in geeigneter Weise ausgeführt werden. Da in (40') der Term mit  $\vartheta^2$  schon für verhältnissmässig kleine  $\vartheta$  grössere Werthe annimmt, als der mit  $\tau^2$ , so wird man bestrebt sein müssen,  $\vartheta$  (die Verspätung der Mittelzeit der Drehung) möglichst nahe = 0 zu machen.

Man bringe also auf der Scala Marken an der Stelle an, welche einer Verfrühung um  $\frac{1}{2}\tau$  entsprechen, und führe, im Moment des Passirens der Marke beginnend, die Drehung gleichmässig in der Zeit  $\tau$  aus.

Bei einigermassen kräftiger Dämpfung wird für die Zurückwerfungsmethode dann die Umkehr nicht auf der Ruhelage erfolgen.

Die Resultate vorstehender Arbeit mögen noch einmal kurz zusammengefasst werden.

Für die Fälle, wo ein momentaner Inductionsstoss einen gedämpften Magnet nicht beim Passiren der Ruhelage trifft, oder wo die Inductionswirkung eine endliche Dauer hat, sind strenge und bequeme genäherte Formeln gegeben, und letztere auf die Multiplications- und Zurückwerfungsmethode angewandt.

Bei der ersteren fällt die Elongation stets zu klein aus, wenn die Induction nicht momentan und rechtzeitig geschieht, bei letzterer für unrechtzeitige momentane Stösse zu gross, während unter Benutzung eines gleichmässig gedrehten Erdinductors je nach Umständen die Abweichungen nach beiden Seiten liegen können.

Darmstadt, 23. Aug. 1882.

**VIII. Beiträge zu den Beziehungen zwischen Fluidität und galvanischem Leitungsvermögen; von Carl Stephan in Görlitz.**

(Theilweise umgearbeitete Inauguraldissertation; mitgetheilt vom Hrn. Verfasser).

Einleitung.

Den Ausgangspunkt vorliegender Arbeit bildet die bekannte Annahme, dass der electriche Widerstand einer Lösung sich zusammensetzt aus den Bewegungswiderständen, welche die Bestandtheile des Electrolytes an den Theilchen des Lösungsmittels, aneinander und vielleicht noch an unzersetzten Molecülen des Electrolytes finden, während das lösende Medium nur als Mittel dient, in welchem die Wanderung der Ionen stattfindet. Bei verdünnten Lösungen vereinfacht sich, wie F. Kohlrausch<sup>1)</sup> bemerkt, dieser Vorgang der Leitung: je mehr nämlich die Anzahl der Theilchen des Lösungsmittels diejenige des Electrolytes überwiegt, desto mehr wird wesentlich nur die moleculare Reibung der Ionen an den Theilchen des Lösungsmittels, nicht aber ihre Reibung aneinander in Betracht kommen, sodass also der electriche Widerstand sehr verdünnter Lösungen nur eben bestünde aus der Reibung der Ionen und der durch ihre Bewegung mitbewegten Theilchen des Lösungsmittels.

Die Aehnlichkeit, welche nach dieser Vorstellung zwischen „electrolytischer“ und „innerer Reibung“ besteht, hat mehrfach Anlass gegeben, nach Analogien zwischen diesen beiden Arten der Reibung, oder zwischen ihren Reciproken, dem electriche Leitungsvermögen und der Fluidität zu suchen.

Um die Fluidität des Mediums, in dem die Bewegung der Ionen geschieht, zu ändern, hat man verschiedene Mittel angewandt.

G. Wiedemann<sup>2)</sup> erreichte diesen Zweck durch Aende-

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 167. 1879.

2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 99. p. 229. 1856.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVII.

zung der Concentration und fand für Lösungen von  $\text{CuSO}_4$ ...etc. das galvanische Leistungsvermögen dem Salzgehalt direct, dem Reibungscoefficienten der Lösung umgekehrt proportional. Augenscheinlich liegen hier aber ziemlich complicirte Verhältnisse vor, und man vermag nicht den Einfluss der einzelnen massgebenden Umstände auf das galvanische Leistungsvermögen zu trennen.

Grottrian<sup>1)</sup> variirte die Temperatur der untersuchten Lösungen, wodurch er den Vortheil eines gleichbleibenden Procentgehaltes erreichte, und constatirte die grösste Aehnlichkeit zwischen den Aenderungen der Fluidität und der Leitungsfähigkeit durch die Temperatur. Da er jedoch meist concentrirte Lösungen benutzte, bei denen der Leitungsvorgang ein verwickelter ist, so sind auch die von ihm gefundenen Beziehungen theils verwickelter, theils unbestimmter Natur.

Ich selbst habe einen dritten Weg eingeschlagen, nämlich das Lösungsmittel geändert und Lösungen geringer Concentration (nicht über 5 Proc.) von:

$\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{LiCl}$ ,  $\text{NaJ}$ ,  $\text{KJ}$

in mehreren Gemischen von Wasser und Alkohol bei verschiedenen Temperaturen in Beziehung auf ihre galvanische Leitungsfähigkeit untersucht. Ferner wurde die Fluidität des Lösungsmittels bestimmt.

Die Beobachtungen sind zunächst zu einer Vergleichung der Temperaturcoefficienten des Leistungsvermögens und der Fluidität des Lösungsmittels verwerthet, dann ist unter Hinzuziehung der Messungen von Kohlrausch über wässrige Lösungen der Einfluss der Fluidität des Lösungsmittels auf die galvanische Leitungsfähigkeit betrachtet.

Für die Beschränkung auf verdünnte Lösungen waren die schon oben angedeuteten Erörterungen von Kohlrausch massgebend, der darauf hinwies, dass man die Vorgänge bei der Electrolyse am vortheilhaftesten an verdünnten Lösungen studiren könne.

1) Grottrian, Pogg. Ann. 157. p. 130. 1876 und Wied. Ann. 8. p. 530. 1879.



Unbedenklich erweitere ich seine Ausführungen dahin, dass bei verdünnten Lösungen auch etwa vorhandene Beziehungen zwischen Fluidität und electricischem Leitungsvermögen sich klarer und deutlicher zu erkennen geben werden als bei den concentrirten. Je bedeutender ferner die innere Reibung der lösenden Flüssigkeit ist, und je grösser demnach der Widerstand, den dieselbe den wandernden Bestandtheilen entgegensetzt, um so mehr wird voraussichtlich der Einfluss der inneren Reibung auf das galvanische Leitungsvermögen die Einwirkungen anderer, dasselbe bedingenden Factoren überwiegen, und um so eher kann man hoffen, die Beziehungen zu erkennen, die zwischen electricischer und innerer Reibung bestehen. Dies bestimmte zum Theil die Wahl des Lösungsmittels: Gemische aus Alkohol und Wasser, deren manche nach Poiseuille<sup>1)</sup> eine mehr als dreimal so grosse innere Reibung besitzen, als das Wasser.

Die Beobachtungen geschahen im physikalischen Institute der Universität Breslau; Wägungen wurden auf einer grossen Staudinger'schen Kilogrammwaage (die bei geringen Belastungen auf 1 mg etwa 1,4 Scalentheile Ausschlag gab), spec. Gewichtsbestimmungen auf einer Mohr'schen Waage, welche die vierte Decimale zu schätzen erlaubte, ausgeführt. Die beobachteten Werthe der spec. Gewichte wurden wegen des Gewichtes der verdrängten Luft corrigirt. Zur Berechnung des Gehaltes der Flüssigkeiten an absolutem Alkohol benutzte ich die Tabellen von Mendelejeff.<sup>2)</sup>

An dieser Stelle habe ich den Herren Prof. Dr. Dorn und Dr. Meyer meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die gütige Unterstützung, die sie mir zu Theil werden liessen, und für das Wohlwollen, mit dem sie mir unter missgünstigsten Verhältnissen stets entgegengekommen sind. Ebenso danke ich den Herren Dr. Kuschel und Dr. Schumann, welche mir bei dem chemischen Theile der Untersuchung mit ihrem Rathe zur Seite standen.

1) Poiseuille, Mém. des savants étrang. 9.

2) Musprat, Chemie.

## Beobachtungen.

Meine Beobachtungen waren zweifacher Art; die einen bezweckten die Gewinnung der Reibungsconstanten der Lösungsmittel, die anderen die Bestimmung der Leitungsfähigkeiten der Lösungen bei verschiedenen Temperaturen. Ich beschreibe zunächst die ersteren.

Es waren

## Strömungsversuche

angestellt mit einem Apparate, wie ihn ähnlich Hr. Prof. Dorn sich früher zu eigenen Untersuchungen construiert hatte. Die beigelegte Fig. 1 mag ihn veranschaulichen. Aus einer sehr grossen Flasche (*f*) führen luftdicht drei Röhren, die durch Schläuche von ungeschwefeltem Kautschuk, bez. mit dem Recipienten einer Luftpumpe, einem Manometer (*m*) und einer Vorlage (*v*) verbunden sind. An letzterer ist durch einen Gummischlauch eine kleine Pipette (*p*) befestigt, an

der durch zwei Marken ein bestimmtes Volumen abgetheilt ist; an der Pipette sitzt die Capillare (*c*), und beide tauchen in einen mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Cylinder, der umgeben wird von dem als Heizbad dienenden, wasser-gefüllten Becherglase. Wesentlich sind an dem Apparate noch Thermometer zur Bestimmung der Temperatur der strömenden Flüssigkeit. (Der Beobachter

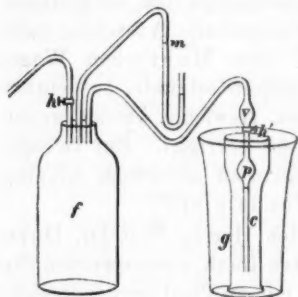


Fig. 1.

hatte zwei in ihren Angaben

möglichst verglichene Thermometer, von denen leider das ungenauere, in Grade getheilte innerhalb der strömenden Flüssigkeit Platz fand, während das bessere Instrument — es war in  $\frac{1}{10}$  Grade getheilt — seiner bedeutenden Länge wegen im Wasserbade untergebracht werden musste.) Von Wichtigkeit sind endlich die beiden Hähne *h* und *h'*; der eine (*h*) verschliesst die zur Luftpumpe führende Röhre, der andere

(*k'*) trennt den Raum der Pipette von dem der Vorlage und der grossen Flasche. Sollte beobachtet werden, so wurde nach Verdünnung der Luft in der Flasche (*f*) *h* geschlossen, *k'* geöffnet, und der Zeitraum gemessen, innerhalb dessen sich das zwischen den Marken der Pipette liegende Volumen mit Flüssigkeit erfüllte. Aus dieser Zeit, aus dem durch das Manometer angezeigten Drucke und den Dimensionen der Pipette und Capillare konnte alsdann nach dem Poiseuille'schen Gesetze die Constante der inneren Reibung für die Temperatur bestimmt werden, welche das Thermometer anzeigte.

Zur Zeitmessung diente eine Secunden schlagende Pendeluhr, die in der Nähe des Apparates stand. Bei der Bestimmung des Druckes, welcher die Flüssigkeit durch die Capillare trieb, wurde als Temperatur des Quecksilbers im Manometer die Temperatur der Umgebung angenommen. Eine Regulirung desselben, wie sie z. B. Rosencranz<sup>1)</sup> anwandte, konnte hier nicht angebracht werden. Darum verminderte sich während eines jeden Versuchs die Differenz der Quecksilberhöhen in den Schenkeln des Manometers, und zwar, je nach der Natur der strömenden Flüssigkeit, in höherem oder geringerem Grade. Bei reinem Wasser betrug die Veränderung des Manometerdruckes bis zu 1 mm Quecksilber; enthielt aber die strömende Flüssigkeit Alkohol und lief bei höherer Temperatur in die Pipettenkugel, so wuchs die Verminderung auf das Doppelte und Dreifache. Zur Rechnung wurde stets das arithmetische Mittel aus den am Anfange und am Ende jedes Versuches abgelesenen Quecksilberständen benutzt. Infolge dieser Verhältnisse war es von Vortheil, einen möglichst hohen Druck anzuwenden; dies habe ich gethan, so weit es erlaubt schien ohne Gefahr für die grosse Flasche. An dem durch das Manometer angezeigten Druck musste noch eine Correction angebracht werden wegen der Niveaudifferenzen der Flüssigkeiten im Cylind und der Pipette. Die Fig. 2 wird die dabei in Betracht kommenden Verhältnisse überblicken lassen; sie stellt den

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. 2. p. 387. 1877.

oberen Theil des Cylinders (*g*) vor; in ihm die Pipette und Capillare in derjenigen Stellung, welche mir am vortheilhaftesten erschien. Das untere Ende der Capillare befindet sich in ziemlicher Entfernung von dem Boden des Cylinders; denn da die Flüssigkeiten wegen ihres Gehaltes an Alkohol nicht filtrirt werden durften, musste angenommen werden,

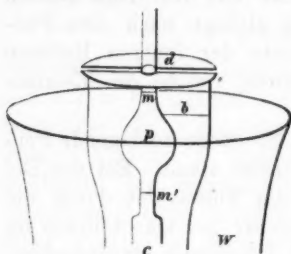


Fig. 2.

dass sich am Boden des Cylinders mechanische Bestandtheile absetzten; — zu dem Ende habe ich auch vor jedem Versuche die Flüssigkeit sich selbst überlassen. — Damit glaubte ich am besten das Aufsaugen von Unreinigkeiten in die Capillare verhindern zu können.

(*d*) ist ein Deckel, der die Verdunstung des Alkohols verhindern sollte, (*w*) das Wasserbad, welches die Capillare in ganzer Ausdehnung, von der Kugel der Pipette aber nur einen Theil umgab, weil das sehr hohe Becherglas im Verhältniss zur Länge der Capillare und Pipette um ein geringes zu niedrig war.

Am Anfange eines jeden Versuchs stand nun die Flüssigkeit im Cylinder in einer Horizontalen mit der oberen Marke der Pipette; zu Ende beim Punkte *b*. Die Entfernung  $\bar{mb}$  wurde mehrere male auf 18 mm bestimmt. Zwischen den Marken *m* und *m'* lag eine Strecke von 70 mm. Behalf ich mich also mit einem Mittelwerthe, so hatte ich von dem Manometerdrucke, der die Flüssigkeit in die Capillare trieb, den Druck einer Flüssigkeitssäule abzuziehen, die vom unteren Ende der Capillare bis in die Mitte von  $\bar{mm'}$  reichte. — Die Marken waren gleichweit von dem Umfange der Pipettenkugel entfernt — und hinzuzuzählen war der Druck einer Flüssigkeitssäule von demselben Anfange aus bis in die Mitte von  $\bar{mb}$ ; d. h. der Manometerdruck war um 26 mm Flüssigkeitsdruck zu vermehren.

Dies war die einzige Correction, welche an den beobachteten Zahlen angebracht wurde. Die Veränderungen der Dimen-

sionen der Capillare und Pipette durch die Temperatur, sowie der Umstand, dass die Pipettenkugel nicht vollständig von dem Wasserbade umgeben, und darum die eingeströmte Flüssigkeit nicht mehr genau die Temperatur des Versuchs besass, bei welcher das in der theoretischen Formel auftretende Volumen gemessen werden sollte, konnten nur eine minimale Fehlerquelle abgeben.

Fehler konnten endlich durch die Schwierigkeit entstehen, die Temperatur des Wasserbades während der lange dauernden Versuche allein durch untergesetzte Flammen constant zu erhalten. Von fünf zu fünf Minuten wurde die Temperatur vermerkt und als Versuchstemperatur das Mittel genommen. Bei den meisten der späteren Versuche gelang es, durch Probiren der Flamme eine solche Stellung zu geben, dass eine Schwankung des Thermometers nicht eintrat.

Die Länge der Capillare betrug  $l = 23,13$  cm. Ihr Radius war durch Wägung des von ihr gefassten Quecksilbers bestimmt worden,  $r = 0,014545$  cm. Das Volumen der Pipette — ebenfalls durch Wägung ermittelt — war  $v = 24,5418$  ccm, während das Volumen der grossen Flasche zu schätzen ist auf 22000 ccm. Das Thermometer war in  $\frac{1}{10}$  Grade getheilt und hatte einen Fehler von  $-0,23^\circ$ .

Die Constante der inneren Reibung hat Hr. Prof. O. E. Meyer<sup>1)</sup> in den Mittheilungen der Versuche von Rosencranz definirt. Wenn ich also den für Breslau geltenden Werth der Schwere ( $g = 9,811$  m) und den von Kohlrausch<sup>2)</sup> angegebenen Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers benutzte, so war die gesuchte innere Reibung der Flüssigkeiten zu berechnen nach der Formel:

$$\eta = \frac{13,596 \cdot 98,11 \cdot \pi \cdot (0,014545)^4 \cdot p \cdot z}{8 \cdot 23,13 \cdot 24,5418 (1 + 0,0001815 \cdot t)},$$

worin  $p$  den (corrigirten) Druck in Millimetern Quecksilber,  $z$  die Ausflusszeit in Secunden,  $t$  die Temperatur des Quecksilbers im Manometer bedeutet. Der so erhaltene Zahlenwerth stellt die Constante der inneren Reibung dar, bezogen auf Quadratcentimeter.

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. 2. p. 387. 1877.

2) Kohlrausch, prakt. Phys. Tab. 9.

Um über die Brauchbarkeit des im Vorigen beschriebenen Apparates ein Urtheil zu gewinnen, verfuhr ich folgendermassen: Erstens verdünnte ich die Luft in der grossen Flasche, schloss die beiden Hähne *h* und *h'* und überliess dann alles während einiger Zeit sich selbst. Es zeigte die Beobachtung des Manometers, dass alle hergestellten Verbindungen luftdicht waren. Ferner stellte ich Strömungsversuche mit destillirtem Wasser an bei verschiedenen Temperaturen und verglich die von mir beobachteten Werthe der Reibungsconstanten mit denjenigen, welche die von Hrn. Prof. O. E. Meyer aus Poiseuille's Beobachtungen hergeleitete Formel liefert. In der nächsten Tabelle sind letztere den von mir gefundenen Zahlen gegenübergestellt.

Tabelle I.  
Quecksilber im Man. 13°.

Temperat. °	Druck mm	Ausflusszeit Sec.	$\eta$ beob.	$\eta$ nach Poiseuille	$\Delta$
13,62	147,4	1949	0,011 836	0,011 860	+ 24
13,92	156,0	1828	11 748	11 766	+ 18
14,50	140,8	2001	11 607	11 587	- 20
20,13	149,3	1665	10 241	10 050	-191
25,67	159,4	1350	0,008 865	8 824	- 41
27,02	201,7	1046	8 692	8 560	-132
30,00	152,4	1284	7 878	8 018	+140

Es zeigt sich also eine Abweichung bis zu 2% von den Werthen, die Poiseuille fand. Obiges sind die allerersten Beobachtungen, bei denen mir Uebung in der Erhaltung der Temperatur fehlte. Dies, glaube ich, hat die bedeutenden Abweichungen in den hohen Temperaturen verursacht.

Das Folgende bringt zunächst die Beobachtungen Poiseuille's über die innere Reibung von Alkoholgemischen, von welchen im Folgenden öfters Gebrauch gemacht werden wird.

Tabelle II.  
Poiseuille's Beobachtungen

über den Ausfluss von Alkoholgemischen aus Capillaren.

Es flossen stets aus 13 cm unter einem Drucke von 140 mm Quecksilber von der Temperatur 10°. Die Länge der Capillare betrug 24,5 cm; ihr Radius war = 0,018 cm.

Gewichtstheile Wasser zugesetzt zu 73,512 Ge- wichtsth. Alkohol	Dichtigkeit 10°	Ausfluss- zeit Sec.	Gewichtstheile Wasser zugesetzt zu 73,512 Ge- wichtsth. Alkohol	Dichtigkeit 10°	Ausfluss- zeit Sec.
0	0,8001	682	226,487	0,9606	1444
26,487	8557	1158	276,487	9672	1326
36,487	8793	1336	386,487	9734	1227
76,487	9243	1731	676,487	9798	841
86,487	9311	1732	1026,487	9820	760
106,487	9349	1726	1276,487	9893	694
126,487	9400	1723			

Die nächste Tabelle enthält die von mir beobachteten Reibungsconstanten einer Mischung von 49 Gewichtstheilen Alkohol und 51 Gewichtstheilen Wasser. Ueber die unter „berechnet“ stehenden Zahlen soll bald gesprochen werden.

Tabelle II.

Procentgehalt an Alkohol 49,00.

Quecksilber im Man. 13°.

Temperat.	Druck	Ausflusszeit	$\eta$ beob.	$\eta$ ber.	$\Delta$
0	mm	Sec.			
10,00	182,3	5502	0,04133	0,04128	+ 5
12,42	179,0	5090	3754	3789	- 35
13,42	136,4	6501	3653	3639	+ 14
14,99	169,1	4935	3438	3464	- 26
18,30	189,3	3974	3099	3113	- 14
20,20	180,5	3961	2926	2929	- 3
21,39	209,0	3281	2825	2822	+ 3
25,00	189,6	3266	2551	2532	+ 19
25,01	198,9	3065	2524	2530	- 6
30,77	192,6	2696	2139	2145	- 6
31,20	204,2	2498	2102	2121	- 19

So weit es möglich war, kam es darauf an, aus den vorstehenden Beobachtungen das Gesetz der Abhängigkeit der Reibungsconstante von der Temperatur zu ermitteln. Dabei habe ich mich angeschlossen an das Verfahren, dessen sich Hr. Prof. Meyer bei der Bearbeitung der Poiseuille'schen Zahlen für Wasser bedient hat. War die für Wasser sich bewährende Form des Gesetzes auch auf alkoholische Flüssigkeiten anwendbar, dann mussten sich die reciproken Werthe der Reibungsconstanten darstellen lassen durch die Formel:

$$\frac{1}{\eta} = a + b \cdot t + c \cdot t^2.$$



in welcher  $a$ ,  $b$ ,  $c$  Constanten,  $t$  die Temperatur der Flüssigkeit bedeuten. Die Constanten bestimmte ich aus folgenden, durch lineare Interpolation aus den beobachteten erhaltenen Zahlen:

$\eta$ bei $10^\circ = 0,04133$	$\eta$ bei $25^\circ = 0,02537$
" " $15 = 3464$	" " $30 = 2194$
" " $20 = 2946$	

und fand so die Formel:

$$\eta = \frac{0,06053}{1 + 0,04053 \cdot t + 0,0006053 \cdot t^2}$$

Mittelst derselben sind die Zahlen der vorletzten Reihe obiger Tabelle berechnet worden.

Weil kleine Abweichungen in dem Gehalte an Alkohol der untersuchten Lösungen nicht vermieden werden konnten, habe ich noch folgende Strömungsbeobachtungen ausgeführt.

Tabelle IV.

Quecksilber im Man.  $13^\circ$ .

Procentgeh. an Alkohol 48,55.

Temperat. o	Druck mm	Ausflusszeit Sec.	$\eta$ beob.	$\eta$ ber.	$\Delta$
12,56	196,6	4641	0,08759	0,08771	-12
13,42	158,3	5326	3604	3639	-35
23,61	214,2	3009	2656	2638	+18
26,47	210,7	2759	2395	2424	-28
30,02	213,9	2484	2189	2191	-2

Die Zahlen der vorletzten Columnne sind mittelst der aus den vorhergehenden Beobachtungen gefolgerten Formel berechnet worden; sie bestätigen, was aus den Angaben Poiseuille's ersichtlich ist, dass die Constante der inneren Reibung durch einen geringen Zusatz von Wasser zu Mischungen des angegebenen Verhältnisses nicht geändert wird.

Zur weiteren Vergleichung stehen mir nur die Angaben Poiseuille's zu Gebote, und auch sie nur liefern ein spärliches Material; nämlich die Reibungsconstante für die Temperatur  $10^\circ$ . Dafür fanden:

$$\begin{aligned} \text{Poiseuille } \eta &= 0,04175 \\ \text{Stephan} &= 4133 \end{aligned}$$

Je nach dem Zwecke, dem die Werthe der Reibungsconstanten dienen sollten, wurden noch andere Mischungen von Alkohol und Wasser in mehr oder wenig eingehender Weise untersucht. Ich verzeichne die erhaltenen Resultate.

Tabelle V.

Quecksilber im Man. 13°.

Procentgeh. an Alkohol 70,00.

Temperat.	Druck	Ausflusszeit	$\eta$ beob.	$\eta$ ber.	$\Delta$
o	mm	Sec.			
10,19	210,4	3764	0,03263	0,03253	+10
11,80	204,6	3657	3083	3083	$\pm 0$
14,98	201,7	3331	2768	2782	-14
16,10	204,1	3187	2680	2687	-7
19,89	203,2	2892	2421	2395	+26
20,13	198,7	2902	2376	2389	-13
21,52	202,9	2722	2277	2283	-7
24,78	198,2	2579	2104	2082	+22
25,01	200,1	2509	2068	2079	-11
28,49	202,4	2264	1885	1884	+4
29,20	187,4	2318	1849	1848	+1

Die unter „berechnet“ aufgeführten Werthe sind aus einer Formel gefunden, die auf schon angegebene Weise aus nachstehenden Werthen von  $\eta$  abgeleitet ist:

10°	= 0,03279
15	2789
20	2368
25 $\eta$	2069
30	1809

Die Formel aber lautet:  $\eta = \frac{0,04726}{1 + 0,03970 t + 0,0004662 \cdot t^2}$ .

Eine wasserreichere Mischung enthielt 35,11% Alkohol, also ziemlich genau die Hälfte der eben untersuchten. Aus folgenden drei Beobachtungen:

Tabelle VI.

Quecksilber im Man. 12,5°. Procentgeh. a. Alkohol 35,11.

Temperatur	Druck	Ausflusszeit	$\eta$ beob.
o	mm	Sec.	
10,21	178,1	5273	0,03869
22,59	168,5	3678	2553
29,94	178,6	2796	2057

ergibt sich die Formel:  $\eta = \frac{0,05703}{1 + 0,04220 t + 0,0006111 \cdot t^2}$ .

Endlich werde ich von folgenden Werthen der Reibungs-  
constante Gebrauch machen:

Tabelle VII.

Procentgehalt an Alkohol	Temp. °	$\eta$
13,73	10,0	0,02635 (v. Poiseuille)
60,3	20,51	2771
60,3	29,90	2001
78,3	12,08	2794

Zu den gesammten Strömungsbeobachtungen erlaube ich mir einige Bemerkungen. Aus den für die Constante der inneren Reibung berechneten Formeln geht hervor, dass mit Zunahme der Fluidität von dem Minimum derselben aus ihre Temperaturcoefficienten abnehmen, sobald man sich nach der Seite des absoluten Alkohols hin wendet; dass sie aber zunehmen, je wasserreicher die Mischung wird. Dies wird in der Folge mit anderen Beobachtungen in Beziehung gesetzt werden.

Eine recht merkwürdige Beziehung besteht zwischen den Werthen der Reibungsconstanten der beiden zuletzt untersuchten Mischungen, deren eine 70,00%, deren andere 35,11% Alkohol enthält. Bildet man  $\eta$  für beide Flüssigkeiten bei verschiedenen Temperaturen, so gelangt man zu folgenden Zahlen:

70 %	Alkohol	35,11 %
$\eta$	Temperat. °	$\eta$
0,03279	10	0,03899
2789	15	3268
2368	20	2769
2069	25	2373
1809	30	2057

Beide Zahlenreihen sind fast völlig gleich, nur um 5° Temperaturdifferenz gegeneinander verschoben.

#### Beobachtungen des Leitungsvermögens.

Ich gehe nun über zu der Beschreibung derjenigen Beobachtungen, durch welche die mit den eben besprochenen Flüssigkeiten hergestellten Lösungen von Chloriden und Jodiden auf ihr electrisches Leitungsvermögen geprüft wurden. Die Methode der Versuchsanordnung wich nur in geringen

Dingen ab von derjenigen, welche F. Kohlrausch am Eingange seines Aufsatzes<sup>1)</sup> mittheilt. Auch hier wurden die Ströme eines mit einem massiven Eisenkerne statt des Drahtbündels versehenen Inductionsapparates durch die Lösungen hindurchgeschickt; die Widerstandsgefäße waren nach den Angaben von Kohlrausch (von E. Hartmann in Würzburg) gearbeitet. Die Messung der Widerstände geschah nach der Brückenmethode mittelst eines (von Hrn. Prof. Dorn calibrirten) Siemens'schen Universalwiderstandskastens; nur trat an die Stelle des Dynamometers ein Telephon (von Siemens und Halske in Berlin). Ferner hatte Hr. Prof. Dorn nach dem Vorgange von Quincke speciell zu diesen Versuchen ein Rheochord construirt, in der doppelten Absicht, es sollten Bruchtheile von S.-E. gemessen werden können, sodann aber sollte es dem Beobachter möglich sein, ohne seine Aufmerksamkeit von dem Geräusche des Telephons ablenken zu müssen, schnell und leicht geeignete Widerstände ein- und ausschalten zu können.

Die Fig. 3 stellt es dar: Auf der mit einer Theilung versehenen hölzernen Unterlage ( $u$ ) ist ein Glasrohr ( $r$ ) be-

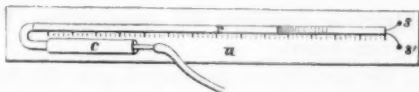


Fig. 3.

festigt, in dessen Inneren zwei feine Platindrähte getrennt voneinander ausgespannt sind. Ihre Enden münden in zwei Klemmschrauben ( $s$  und  $s'$ ).  $c$  ist eine Trockenröhre, durch einen Gummischlauch mit dem Glasrohr verbunden. Von derselben aus führt ein Gummischlauch zu dem Munde des Beobachters. Bringt man nun in die Röhre ( $r$ ) einen kleinen Quecksilberfaden von wenigen Centimetern Länge, so vermag der Beobachter denselben durch Saugen leicht hin und her zu bewegen, und da durch das Quecksilber die getrennten Platindrähte verbunden werden, den Uebertritt des Stromes von dem einen zum anderen an beliebigen Stellen zu bewerkstelligen, d. h. beliebige Widerstände ein- und auszuschalten.

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 1. 1879.

Da sich überdies bei der Verschiebung des Quecksilberfadens kein störendes Geräusch hören liess, so genügte das Rheochord seinen Zwecken vortrefflich. Die Verbindung aller genannten Apparate untereinander wird durch Fig. 4 veranschaulicht. *U* ist der Universalwiderstandskasten mit seinen drei Zweigen *A*, *B*, *C*. Zu dem Zweige *A* gehört noch das Rheochord *R*. *G* ist das Widerstandsgefäß mit

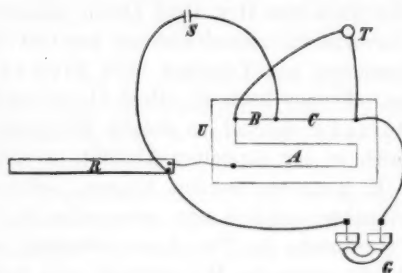


Fig. 4.

der zu untersuchenden Flüssigkeit, *S* die Stromquelle, *T* das Telephon. Dies die schematische Anordnung. In Wirklichkeit war der Inductionsapparat in einem entfernten Zimmer aufgestellt, damit der

Ton des Telephons nicht beeinträchtigt würde. Die Widerstandsgefässe befanden sich in einem Wasserbade, welches durch untergesetzte Flammen auf verschiedene Wärmegrade gebracht werden konnte.

Ehe an die definitiven Beobachtungen der Widerstände gegangen werden konnte, war sowohl das Rheochord bezüglich seines Widerstandes auszumessen, als auch der Widerstand zu bestimmen, welchen die mit Quecksilber gefüllten Gefässe bei der Temperatur  $0^{\circ}$  haben. — Kohlrausch bezeichnet diesen Widerstand mit  $w_0$  und nennt ihn „Widerstandscapacität“. — Beide Bestimmungen geschahen auf bekannte Weise. Das Rheochord wurde von 20 zu 20 cm der 1 m langen Scala ausgemessen, weil die Widerstände ziemlich proportional der Länge des Drahtes wuchsen. Ich führe dieselben an für die Temperatur  $20^{\circ}$ , bei welcher sie beobachtet wurden.

Scalentheile . . . .	0	20	40	60	80	100
Widerstände in S.-E.	25,765	20,820	15,878	10,953	6,025	1,093

Die Widerstandscapacitäten der drei Widerstandsgefäße, die mir zur Verfügung standen, und die ich mit I, II, III bezeichnen will, vom engsten angefangen bis zum weitesten, wurden mit Hülfe von concentrirter Kochsalzlösung und einer Bittersalzlösung vom spec. Gew. 1,187 bei 18° — beide Flüssigkeiten sind von Kohlrausch empfohlen — gemessen. Die folgenden Zahlen sind die beobachteten Werthe von  $w_0$ .

Tabelle VIII.

Gefäß	Kochsalzlösung		Bittersalzlösung	
I	0,001 635 4	0,001 629 2	0,001 625 3	—
	1 633 8	1 628 2	1 624 8	0,001 621 4
II	0,000 634 1	0,000 636 8	0,000 638 7	0,000 633 8
	637 1	637 2	636 9	634 6
III	0,000 257 7	0,000 257 5	0,000 258 5	0,000 257 1
	259 1	257 4	258 0	257 3

Als Mittelwerthe habe ich zur Rechnung die folgenden benutzt:

$w_0$  für I 0,001 630 9  
 „ „ II 0,000 637 6  
 „ „ III 0,000 257 8

Was sonst die Widerstandsbeobachtungen betrifft und ihre Berechnung angeht, so sei Nachstehendes bemerkt: Die untersuchten Flüssigkeiten waren Lösungen von:

NaCl; KCl; LiCl; NaJ; KJ

in drei verschiedenen Concentrationen, deren keine 5% überstieg. Eine jede kam zunächst in allen drei Gefäßen und bei drei verschiedenen Temperaturen zur Beobachtung. Die Bestimmung des Widerstandes geschah so: Es wurde der Widerstand der beiden Zweige des Universalwiderstandskastens B und C auf 10 S.-E., resp. 100 S.-E. gebracht. Dann wurde im Zweige A derjenige Widerstand eingeschaltet, bei dem der Ton des Telephons am schwächsten erschien. Nach dieser vorläufigen Bestimmung wurde die Temperatur abgelesen, sodann mittelst des Rheochords die genaue Einstellung des Widerstandes rasch besorgt und nach diesem sofort noch-

mals die Temperatur gemessen. Veranlassung zu Fehlern konnte ausser der mangelhaften Bestimmung der Temperatur noch der Umstand geben, dass die Bestimmung des Widerstandes in  $A$  und  $R$  nicht sicher war, weil sich das Minimum des Telephons für mein Gehör auf grössere Strecken des Rheochords vertheilte. Bei concentrirteren Lösungen, die in dem weitesten Gefässe untersucht wurden, war über die Stellung des Quecksilberfadens meist kein Zweifel; wurden aber sehr verdünnte Lösungen in dem engsten Gefässe electrolysirt, dann brachte eine grosse Verschiebung des Quecksilberfadens keine Aenderung in der Stärke des vom Telephon ausgehenden Geräusches hervor. In diesen Fällen habe ich mich bemüht, die Grenzen des Minimums festzustellen, und habe die Mitte desselben in Rechnung gezogen. Weil hierbei im Zweige  $A$  ein sehr grosser Widerstand eingeschaltet war, konnte die beschriebene Unsicherheit das Endresultat um kaum 1% modificiren. War der einzuschaltende Widerstand sehr gross, so habe ich von Correctionen desselben, die theils durch Fehler des Universalwiderstandskastens, theils durch die Temperatur desselben bedingt waren, abgesehen. Wo Correctionen jedoch nöthig erschienen, wurden sie angebracht.

Die Berechnung der Leitungsfähigkeiten der Lösungen geschah nach der Formel:

$$k = \frac{w_0 \cdot B}{C \cdot (A + R)},$$

worin  $w_0$  die Widerstandscapacität der resp. Gefässe,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $R$  aber die — mit Correctionen versehenen — Widerstände in den Zweigen des Universalwiderstandskastens und im Rheochord bedeuten. Die Concentration der Lösungen wurde meist durch eine zweimalige Analyse ermittelt, die spec. Gewichte derselben mit einer Mohr'schen Wage bestimmt und auf den der Beobachtungstemperatur nächstliegenden Wärmegrad mit den Tabellen von Mendelejeff gebracht.

Die folgenden Tabellen enthalten die Leitungsfähigkeiten, wie ich sie an verschiedenen Lösungen mit den verschiedenen Gefässen beobachtet habe. Der Gehalt an Alkohol versteht sich für das Lösungsmittel.



Tabelle IX.

Lösung		10 <sup>10</sup> k					
NaCl.		Temp. ° I	Temp. ° II	Temp. ° III			
0/10 a. Alk.	48,80	9,80	2952	10,56	2989	9,80	2921
11 a. NaCl.	0,9972	—	—	20,90	4228	21,00	4219
sp. G. bei 23°	0,9205	29,32	5376	28,92	5356	28,92	5338
0/10 a. Alk.	48,76	—	—	10,70	5440	9,62	5312
11 a. NaCl.	1,986	20,00	7497	20,00	7473	20,00	7484
sp. G. bei 23°	0,9266	29,99	10024	29,87	9938	30,01	9997
0/10 a. Alk.	48,67	—	—	10,26	12223	10,15	12151
11 a. NaCl.	4,980	—	—	—	—	22,00	17563
sp. G. bei 23°	0,9444	—	—	30,02	22176	30,01	22132
KCl.							
0/10 a. Alk.	49,00	9,98	2643	9,98	2637	9,96	2636
11 a. KCl.	0,9166	20,71	3813	—	—	20,17	3719
sp. G. bei 12°	0,9280	—	—	29,63	4894	29,69	4890
0/10 a. Alk.	49,28	—	—	10,32	4865	10,32	4826
11 a. KCl.	1,620	19,87	6579	19,87	6577	20,46	6808
sp. G. bei 12°	0,9316	29,80	8793	29,82	8825	29,80	8812
0/10 a. Alk.	49,14	10,27	9226	10,27	9217	10,31	9220
11 a. KCl.	3,267	20,00	12521	20,26	12578	19,80	12552
sp. G. bei 12°	0,9419	29,68	16578	30,32	16717	30,18	16688
LiCl.							
0/10 a. Alk.	48,70	9,85	2340	9,91	2325	10,07	2389
11 a. LiCl.	0,7679	20,01	3360	19,98	3327	20,00	3318
sp. G. bei 12°	0,9273	30,43	4375	30,30	4479	30,25	4448
0/10 a. Alk.	48,70	—	—	—	—	—	—
11 a. LiCl.	1,323	19,90	6007	20,43	6030	20,00	5970
sp. G. bei 12°	0,9305	30,23	7967	30,00	8013	30,24	8012
0/10 a. Alk.	48,72	—	—	10,04	8822	10,11	8839
11 a. LiCl.	3,081	—	—	20,00	12093	19,99	12184
sp. G. bei 12°	0,9408	—	—	30,19	16187	30,03	16067
NaJ.							
0/10 a. Alk.	49,00	10,75	1611	10,09	1606	10,56	1580
11 a. NaJ	1,183	20,50	2214	20,02	2206	20,23	2201
sp. G. bei 12°	0,9300	30,05	2935	30,01	2922	30,03	2937
0/10 a. Alk.	49,08	10,00	2366	10,09	2343	9,99	2356
11 a. NaJ	1,866	20,25	3389	19,99	3273	19,88	3260
sp. G. bei 12°	0,9349	—	—	30,10	4430	30,09	4380
0/10 a. Alk.	48,98	—	—	9,99	5395	10,01	5390
11 a. NaJ.	4,151	—	—	20,00	7406	19,98	7412
sp. G. bei 12°	0,9529	—	—	30,07	9840	30,00	9827

Lösung		$10^{10} k$					
KJ.		Temp. ° I		Temp. ° II		Temp. ° III	
°/o a. Alk.	49,29	—	—	—	—	9,94	1475
„ a. KJ.	1,038	—	—	—	—	20,12	2081
sp. G. bei 12°	0,9266	—	—	—	—	30,01	2778
°/o a. Alk.	49,26	—	—	10,13	2693	10,04	2704
„ a. KJ.	2,158	—	—	19,99	3716	19,86	3720
sp. G. bei 12°	0,9330	—	—	30,02	4965	30,01	4948

Tabelle X.

Lösung		$10^{10} k$					
NaCl.		Temp. ° I		Temp. ° II		Temp. ° III	
°/o a. Alk.	70,00	—	—	—	—	10,38	2179
„ a. NaCl	0,9027	20,34	2987	19,60	2913	20,09	2966
sp. G. bei 13°	0,8749	30,01	3951	26,99	3616	30,00	3990
°/o a. Alk.	70,15	—	—	—	—	—	—
„ a. NaCl.	1,852	—	—	—	—	20,01	5175
sp. G. bei 14°	0,8844	—	—	—	—	30,30	6789
LiCl.		Temp. ° I		Temp. ° II		Temp. ° III	
°/o a. Alk.	69,95	9,91	1828	—	—	9,97	1846
„ a. LiCl	0,6720	20,00	2543	20,10	2531	19,98	2536
sp. G. bei 13°	0,8780	29,71	3317	30,11	3311	29,80	3328
°/o a. Alk.	69,80	—	—	—	—	10,59	6497
„ a. LiCl	2,654	—	—	20,00	8737	19,99	8730
sp. G. bei 10°	0,8920	—	—	30,13	11448	30,01	11438
KJ.		Temp. ° I		Temp. ° II		Temp. ° III	
°/o a. Alk.	70,15	—	—	—	—	13,00	1261
„ a. KJ.	1,038	—	—	—	—	21,19	1609
sp. G. bei 14°	0,8800	—	—	—	—	30,02	2038
°/o a. Alk.	70,00	10,45	5101	10,10	5088	10,00	5057
„ a. KJ.	4,457	20,02	6937	16,80	6345	20,02	6904
sp. G. bei 11°	0,9051	—	—	28,80	8584	28,69	8564

Tabelle XI.

Lösung		$10^{10} k$		Lösung		$10^{10} k$	
NaCl.		Temp. ° III		KCl.		Temp. ° III	
°/o a. Alk.	35,10	11,54	7590	°/o a. Alk.	35,09	10,02	6453
„ a. NaCl.	2,001	21,20	10581	„ a. KCl	1,802	20,00	9143
sp. G. bei 10°	0,9658	27,80	13346	sp. G. bei 10°	0,9629	—	—

Tabelle XII.

Lösung		10 <sup>10</sup> k		Lösung		10 <sup>10</sup> k	
NaCl.		Temp. °	III	KCl.		Temp. °	III
°/o a. Alk.	13,73	10,01	12301	°/o a. Alk.	13,73	9,99	12121
„ a. NaCl	2,002	20,00	16700	„ a. KCl	1,987	20,49	16500
sp.G. bei 10°	0,9942	—	—	sp.G. bei 10°	0,9920	—	—

Tabelle XIII.

Lösung		10 <sup>10</sup> k	
NaCl.		Temp. °	III
°/o a. Alk.	60,3	—	—
„ a. NaCl	1,075	15,45	3357
sp.G. bei 16°	0,9019	20,31	3858

Tabelle XIV.

Lösung		10 <sup>10</sup> k	
NaCl.		Temp. °	III
°/o a. Alk.	78,3	—	—
„ a. NaCl	0,8785	12,01	1818
sp. G. ?	—	—	—

## Verwerthung der Beobachtungen.

Die Temperaturcoefficienten. — Diese nunmehr vollständig mitgetheilten Beobachtungen sollen im Folgenden nach verschiedenen Seiten hin verwerthet werden.

Zu dem Ende versuche ich zunächst, aus den Tabellen IX—XII Werthe von 10<sup>10</sup> k für die drei Temperaturen 10, 20 und 30° zu interpoliren und mit ihrer Hülfe sodann die Temperaturcoefficienten:

$$\frac{\Delta k_{15}}{k_{10}} = \frac{k_{20} - k_{10}}{10 \cdot k_{10}} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta k_{21}}{k_{20}} = \frac{k_{30} - k_{20}}{10 \cdot k_{20}},$$

d. h. die mittleren Zunahmen des Leitungsvermögens zwischen 10 und 20°, resp. zwischen 20 und 30° in Theilen von  $k_{10}$  und  $k_{20}$  zu bilden, um auf diese Weise die Abhängigkeit des Leitungsvermögens von der Temperatur zu erhalten. Die erste Reduction geschah so, dass die Werthe von 10<sup>10</sup> k bei den drei Temperaturen für jedes der zur Beobachtung gekommenen Gefässe allein gebildet wurden; dann nahm ich bei genügender Uebereinstimmung Mittelwerthe, anderenfalls erhielten die mit den weiteren Gefässen gefundenen Zahlen den Vorzug.

Die Resultate sind im Folgenden übersichtlich zusammengestellt. Die beiden Temperaturcoefficienten stehen in einer Reihe, und zwar ist  $\Delta k_{15}/k_{10}$  der grössere.

Tabelle XV.

Mittlerer Procentgehalt an Alkohol 49,00.

Lösung %	Temp. <sup>a</sup>	10 <sup>10</sup> k	$\frac{\Delta k}{k}$	Lösung %	Temp. <sup>b</sup>	10 <sup>10</sup> k	$\frac{\Delta k}{k}$
NaCl.				KCl.			
0,9972	10	2940	0,0395 337	0,9166	10	2639	0,0404 332
	20	4100			20	3706	
	30	5481			30	4928	
1,986	10	5398	0,0386 336	1,620	10	4802	0,0387 332
	20	7484			20	6659	
	30	9997			30	8858	
4,980	10	12080	0,0379 330	3,267	10	9125	0,0375 327
	20	16649			20	12548	
	30	22145			30	16640	
LiCl.				NaJ.			
0,7679	10	2382	0,0395 338	1,183	10	1564	0,0399 339
	20	3323			20	2188	
	30	4446			30	2929	
1,323	10	—	0,0333	1,866	10	2361	0,0386 335
	20	5998			20	3273	
	30	7994			30	4370	
3,081	10	8805	0,0379 325	4,151	10	5392	0,0375 325
	20	12141			20	7412	
	30	16083			30	9826	
KJ.				KJ.			
1,038	10	1479	0,0401 336	2,158	10	2690	0,0384 330
	20	2072			20	3725	
	30	2772			30	4954	

Tabelle XVI.

Mittlerer Procentgehalt an Alkohol 70,00.

Lösung %	Temp. <sup>o</sup>	10 <sup>10</sup> k	$\frac{\Delta k}{k}$	Lösung %	Temp. <sup>o</sup>	10 <sup>10</sup> k	$\frac{\Delta k}{k}$
NaCl.				LiCl.			
0,9027	10	2147	0,0377 329	0,6720	10	1841	0,0377 318
	20	2954			20	2535	
	30	3925			30	3342	
1,852	10	—	0,0294	2,654	10	6357	0,0374 307
	20	5175			20	8734	
	30	6694			30	11422	
KJ.				KJ.			
1,038	10	1131	0,0377 308	4,457	10	5032	0,0374 307
	20	1557			20	6916	
	30	2037			30	9038	

Tabelle XVII.

Mittlerer Procentgehalt an Alkohol 35,11.

Lösung %	Temp. <sup>o</sup>	10 <sup>10</sup> k	$\frac{\Delta k}{k}$	Lösung %	Temp. <sup>o</sup>	10 <sup>10</sup> k	$\frac{\Delta k}{k}$
NaCl.				KCl.			
2,002	10	7222	0,0403	1,802	10	6449	0,0403
	20	10135			20	9145	
	30	—			30	—	

Tabelle XVIII.

Mittlerer Procentgehalt an Alkohol 13,73.

Lösung %	Temp. <sup>o</sup>	10 <sup>10</sup> k	$\frac{\Delta k}{k}$	Lösung %	Temp. <sup>o</sup>	10 <sup>10</sup> k	$\frac{\Delta k}{k}$
NaCl.				KCl.			
2,001	10	12301	0,0358	1,987	10	12120	0,0344
	20	16700			20	16287	
	30	—			30	—	

Die gefundenen Temperaturcoefficienten nehmen bei allen Salzen und allen Lösungsmitteln mit wachsendem Lösungsgehalte ab. In ihren numerischen Werthen ist — gleichen Procentgehalt an Alkohol vorausgesetzt — eine Uebereinstimmung wohl merklich; und wenn man denselben die entsprechenden Temperaturcoefficienten der Fluidität des lösenden Mittels entgegenstellt, so ergibt sich, dass sich die Temperaturcoefficienten sehr verdünnter Lösungen der untersuchten Chloride und Jodide in dem alkoholisch-wässrigen Mittel denen der Fluidität eben dieses lösenden Mediums annähern. Denn aus den mitgetheilten Strömungsversuchen ergeben sich die Temperaturcoefficienten:

Mittlerer Procentgehalt an Alkohol.	$\frac{\Delta f_{15}}{f_{10}}$	$\frac{\Delta f_{25}}{f_{20}}$
35,11	0,0408	0,0344
49,00	0,0403	0,0345
70,00	0,0380	0,0330

Somit bin ich bei alkoholischen Lösungen zu einem Ergebnisse gelangt, welches Grottrian<sup>1)</sup> und Kohlrausch schon

1) Grottrian, Pogg. Ann. 157. p. 253. 1876.

an wässerigen Lösungen erhalten haben. Kohlrausch äussert sich a. a. O. p. 192 also:

„Im Gegensatze zu dem weiten Spielraume“ (innerhalb dessen sich die Temperaturcoefficienten concentrirter Lösungen bewegen) „stehen die engen Grenzen, denen wir bei verdünnten Lösungen begegnen. Ein Blick . . . . . zeigt, dass die Temperaturcoefficienten der Chlormetalle, wenn sie auch später weit auseinandergehen, im Anfange alle nahe bei einander liegen und fast sämmtlich aus einem und demselben Anfangspunkte zu entspringen scheinen. An den übrigen Gruppen der Electrolyte zeigt sich nun, dass dies Verhalten der Chloride nicht vereinzelt oder zufällig dasteht. Die Jodide . . . . . zeigen dasselbe Ausstrahlen der Temperaturcoefficienten von fast genau derselben Gegend aus“, welche letztere — wie Kohlrausch weiter bemerkt — für alle Salze zwischen den Grenzen 0,0255—0,0211 gelegen ist. Nehmen wir hierzu den Temperaturcoefficienten der Fluidität des Wassers, wie er sich aus der von Hrn. Prof. Meyer berechneten Formel ergibt, nämlich  $(\Delta f_{22}/f_{18}) = 0,0262$ , so erhalten wir eben für wässerige Lösungen dasselbe, was wir schon bei den alkoholisch-wässerigen Lösungen gefunden haben:

Fluidität des Lösungsmittels und Leitungsvermögens werden in nahezu gleicher Weise durch die Temperatur geändert; mit anderen Worten, es ist hauptsächlich die Aenderung der Fluidität durch die Temperatur, die entsprechende Aenderungen des Leitungsvermögens nach sich zieht.

In einigen Punkten unterscheiden sich jedoch die von mir beobachteten Temperaturcoefficienten der alkoholisch-wässerigen Lösungen von denen, die Kohlrausch bei wässerigen durch Interpolation gefunden hat, zunächst darin, dass erstere den Temperaturcoefficienten der Fluidität des lösenden Mittels viel näher kommen als die letzteren; und dies ist wohl nicht zufällig, sondern eine Folge der bedeutenden Grösse der inneren Reibung des Lösungsmittels. Das andere ist, dass sich meine Temperaturcoefficienten für die verschiedenen Salze erheblich weniger voneinander unterscheiden, als das der Fall ist bei den wässerigen Lösungen.

Endlich mache ich hier noch aufmerksam auf den Parallelismus der Temperaturcoefficienten von Fluidität und galvanischem Leitungsvermögen in ihrer Abhängigkeit von dem Alkoholgehalte der Flüssigkeiten. Sie nehmen durch Zusatz von Alkohol zum reinen Wasser zunächst zu, bis sie bei ungefähr gleichen Mischungsverhältnissen von Alkohol und Wasser ein Maximum erreichen; von da nimmt ihre Grösse beständig ab, je alkoholreicher die Flüssigkeiten werden.

Um Beziehungen zwischen Fluidität und Leitungsvermögen bei verschiedenen Salzen und verschieden concentrirtem Lösungsmittel zu erhalten, will ich den Quotienten:

$$q = \frac{K \cdot H}{k \cdot \eta}$$

berechnen, worin  $K$  und  $k$  die Leitungsfähigkeiten gleich concentrirter Lösungen desselben Salzes in Wasser, resp. in Alkohol-Wassermischung,  $H$  und  $\eta$  aber die Werthe der Reibungsconstanten der resp. Lösungsmittel bedeuten, alle Grössen für eine und dieselbe Temperatur verstanden. Was die Berechnung von  $K$ ,  $k$ ,  $H$  und  $\eta$  anlangt, so sind die drei letzten aus meinen und Poiseuille's Beobachtungen zu entnehmen. Die Berechnung des  $K$  geschah mittelst der von Kohlrausch<sup>1)</sup> aufgestellten Tabelle für die Temperatur 18°. Zur Reduction dieser Werthe auf andere Temperaturen benutzte ich — da nur verdünnte Lösungen in Betracht kamen — auf Grund der schon von mir mitgetheilten Resultate die Temperaturcoefficienten der Fluidität des Wassers. Auf diese Weise ergeben sich die folgenden Tabellen, (deren letzte Reihe bald erklärt werden wird).

Tabelle XIX.

Mittlerer Procentgehalt an Alkohol 49,00.

	Lösung %	10 <sup>9</sup> $K_{20^\circ}$	10 <sup>9</sup> $k_{20^\circ}$	$q_{20^\circ}$	lim $q_{20^\circ}$
$NaCl$ {	0,9972	1331	410	1,16	} 1,13
	1,986	2775	748	1,27	
	4,980	6568	1665	1,37	

1) a. a. O. p. 47.



	Lösung ‰	$10^3 K_{20^\circ}$	$10^3 k_{20^\circ}$	$q_{20^\circ}$	lim $q_{20^\circ}$
<i>KCl</i>	0,9166	1259	371	1,16	1,11
	1,620	2219	666	1,14	
	3,267	4454	1255	1,20	
<i>LiCl</i>	0,7679	1076	382	1,17	1,12
	1,323	2141	600	1,22	
	3,081	4721	1214	1,33	
<i>NaJ</i>	1,183	704	219	1,10	1,03
	1,866	1053	327	1,11	
	4,151	2549	741	1,15	
<i>KJ</i>	1,038	700	207	1,18	1,05
	2,158	1433	372	1,32	

Tabelle XX.

Mittlerer Procentgehalt an Alkohol 70,00.

	Lösung ‰	$10^3 K_{20^\circ}$	$10^3 k_{20^\circ}$	$q_{20^\circ}$	lim $q_{20^\circ}$
<i>NaCl</i>	0,9027	1287	296	1,85	—
	1,852	2595	518	2,12	—
<i>LiCl</i>	0,6720	1106	253	1,85	1,80
	2,654	4121	874	1,99	
<i>KJ</i>	1,038	700	156	1,90	1,89
	4,457	3005	692	1,93	

Tabelle XXI.

Mittlerer Procentgehalt an Alkohol 35,11.

	Lösung ‰	Temp.°	$10^3 K$	$10^3 k$	$q$
<i>NaCl</i>	2,001	10	2171	722	1,00
		20	2787	1014	0,99
		10	1920	645	1,00
<i>KCl</i>	1,802	20	2465	915	0,98

Tabelle XXII.

Mittlerer Procentgehalt an Alkohol 13,73.

	Lösung ‰	$10^3 K_{10^\circ}$	$10^3 k_{10^\circ}$	$q_{10^\circ}$
<i>NaCl</i>	2,002	2171	1230	1,11
<i>KCl</i>	1,987	2117	1212	1,10

Die in vorstehenden Tabellen aufgeführten Werthe von  $q = K \cdot H / k \cdot \eta$  lassen eine mehrseitige Betrachtung zu.

1) Zunächst findet überall ein Wachsthum des Quotienten  $q$  mit wachsender Concentration der Lösungen statt, und

zwar derart, dass bei gleichem Alkoholgehalte die verdünntesten Lösungen aller Salze dieselben oder wenig verschiedene Werthe von  $q$  aufweisen. Ich schliesse hieraus, dass sich das Verhältniss  $K.H/k.\eta$  mit zunehmender Verdünnung bei allen untersuchten Salzen einem und demselben bestimmten Grenzwerthe nähert, der nur allein abhängt von der Natur des lösenden Mediums (wie ja auch aus den Tabellen die Verschiedenheit desselben für verschiedenen Gehalt an Alkohol zu ersehen ist.) Diesen Grenzwert habe ich dort, wo es möglich war, zu bestimmen versucht, indem ich annahm, es sei  $q$  eine lineare Function des Procentgehaltes der Lösung an Salz.

2) In seiner schon oft citirten Abhandlung stellt Kohlrausch das Leitungsvermögen wässriger Lösungen als Function des Lösungsgehaltes dar durch die Formel:

$$K = \kappa.p - \kappa'p^2,$$

worin  $p$  den Procentgehalt an Salz,  $\kappa$  und  $\kappa'$  aber Constanten bedeuten. Entsprechend werde ich bei alkoholisch-wässrigen Lösungen setzen:

$$k = \lambda.p - \lambda'p^2.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\lim \frac{K}{k} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Da aber  $\lim K.H/k.\eta = q = \text{Const.}$  (diese Constante ist nur eine Function des Gehaltes an Alkohol), so folgt:

$$\lambda = \frac{\kappa}{C} \cdot \frac{H}{\eta} = f.\kappa,$$

d. h. die specifischen Leitungsvermögen irgend eines der untersuchten Salze in wässriger, resp. alkoholisch-wässriger Lösung sind nur um einen Factor verschieden, der für alle Salze gleich, allein vom lösenden Mittel bedingt wird.

3) Es war:

$$q = \frac{K.H}{k.\eta} = \frac{H}{\eta} \cdot \frac{\kappa - \kappa'p}{\lambda - \lambda'p}.$$

Wir haben ferner gesehen, dass mit wachsendem Procentgehalte  $p$  der Quotient  $q$  ebenfalls wuchs. Daraus folgt, dass:

$$\frac{\kappa'}{\kappa} < \frac{\lambda'}{\lambda}$$

sein muss, d. h. in Worten: das Leitungsvermögen wächst bei alkoholisch-wässrigen Lösungen mit steigendem Salzgehalte verhältnissmässig langsamer als bei wässrigen Lösungen.

4) Um die Abhängigkeit des Quotienten  $q$ , resp. die des galvanischen Leitungsvermögens von dem Alkoholgehalte zu erörtern, füge ich noch folgende Beobachtungen hinzu, welche den in Tab. VII aufgeführten Beobachtungen der inneren Reibung entsprechen, nämlich:

Tabelle XXIII.

$\frac{0}{0}$ a. Alkohol	$\frac{0}{0}$ a. NaCl	spec. Gew.	Temp. <sup>o</sup>	$10^9 k$	$\frac{K \cdot H}{k \cdot \eta}$
60,3	1,075	0,9019	15,45	336	} 1,43
78,3	0,8785	16 <sup>o</sup>	20,31	386	
		—	12,01	182	

und nehme sodann Mittelwerthe für  $\lim KH/k\eta$ , resp. für diejenigen Zahlen von  $KH/k\eta$ , die mit den am meisten verdünnten Lösungen gefunden sind und unter sich die beste Uebereinstimmung zeigen; dann ergibt sich für ein:

Lösungsmittel v. $\frac{0}{0}$ a. Alkohol	
13,73	} $\dots \dots \frac{1}{1,1}$ $\dots \dots \frac{1}{1,0}$ $\dots \dots k = \frac{1}{1,08} \times \frac{K \cdot H}{\eta}$ $\dots \dots \frac{1}{1,43}$ $\dots \dots \frac{1}{1,85}$ $\dots \dots \frac{1}{2,53}$
35,11	
49,00	
60,30	
70,00	
78,30	

So roh der rechts stehende Zahlenwerth auch sein mag, so lässt er doch erkennen, dass er für die wasserreicheren Lösungen bis ungefähr zu gleichen Mischungsverhältnissen von Alkohol und Wasser wenig von der Einheit verschieden sein kann; ja, dass es keinen genaueren Werth dafür als die Einheit geben wird.

Wenn ich weiter in den anderen Gleichungen die rechten Seiten mit dem resp. mittleren Wassergehalte des lösenden Mittels erweitere, dann kann ich die obigen Gleichungen schreiben:

% a. Alkohol		
49,00	...	51,0
		55,1
60,30	. $k =$	$\frac{39,7}{56,77} \cdot \frac{K \cdot H}{\eta}$
70,00	...	30,0
		55,5
78,30	...	21,7
		55,39

Berücksichtigt man, dass nach Poiseuille's Beobachtungen das Maximum der inneren Reibung von Alkohol-Wassermischungen nicht bei dem Wassergehalte 51, sondern nicht weit von 54 liegt, dann wird es sehr wahrscheinlich, dass die im Nenner der umgeschriebenen Gleichungen auftretende Zahl eine Constante ist und nichts anderes bedeutet, als eben den Wassergehalt der Mischung von maximaler innerer Reibung. Nehme ich als mittleren Werth dieses Wassergehaltes 55,5%, so gewinnt der zu dem Verhältniss  $K \cdot H / \eta$  tretende Zahlenfactor eine recht einfache Bedeutung, und es lassen sich die Resultate so zusammenfassen:

*Das Leitungsvermögen sehr verdünnter alkoholisch-wässriger Lösungen bestimmt sich bei wasserreichem Lösungsmittel, vom Wasser an bis zu demjenigen von maximaler innerer Reibung, durch die Gleichung:*

$$k = \frac{K \cdot H}{\eta}.$$

Von da an würde man setzen können:

$$k = \frac{w}{w'} \frac{K \cdot H}{\eta}.$$

In diesen Formeln bedeutet  $K$  die Leitungsfähigkeit einer wässrigen Lösung von demselben Procentgehalte wie die alkoholische und derselben Temperatur;  $H$  und  $\eta$  die inneren Reibungen des Wassers und der lösenden alkoholischen Flüssigkeit für die nämliche Temperatur;  $w$  den Wassergehalt der alkoholischen Lösung,  $w'$  den Wassergehalt der Alkohol-Wassermischung von minimaler Fluidität; sodass also im letzten Falle das Leitungsvermögen dem Wassergehalte der Lösung proportional wäre.

Was nun die Möglichkeit der aufgestellten Formeln betrifft, so gibt die erstere zu keinen Bedenken Veranlassung;

sie bliebe beim Uebergange zum reinen Wasser gültig. Anders bei der zweiten: Nach ihr würden Lösungen in absolutem Alkohol das Leitungsvermögen 0 besitzen. Aber gerade dies halte ich für wahrscheinlich, weil die untersuchten Chloride und Jodide im absoluten Alkohol nicht gelöst werden dürften.<sup>1)</sup>

Während ich geneigt bin, die letztere Formel lediglich als eine empirische anzusehen, scheint mir die erstere eine physikalische Bedeutung zu besitzen. Es verhalten sich nach derselben (bis zu etwa gleichen Theilen von Wasser und Alkohol) die specifischen Leitungswiderstände ( $1/k$ ) wie die Coëfficienten der inneren Reibung ( $\eta$ ) der Lösungsmittel.

In sehr verdünnten Lösungen ist nun der Vorgang der, dass die wandernden Ionen zunächst die benachbarten Theile des Lösungsmittels in Bewegung setzen, und diese sich dann wieder an den übrigen Theilen des Lösungsmittels reiben, welche beiden Theile des Processes der äusseren und inneren Reibung entsprechen.

Aus der Proportionalität des electrolytischen Widerstandes mit dem Coëfficienten der inneren Reibung wird man schliessen müssen, dass die Reibung der Ionen am Lösungsmittel entweder der inneren Reibung des letzteren proportional oder so gross ist, dass jedes Ionenmolecul die benachbarten Moleculé des Lösungsmittels einfach mitnimmt.

Unter der letzteren Annahme, die mir plausibler scheint, würde die Differenz der Leitungsfähigkeit verschiedener Salze lediglich durch die Grösse und Gestalt der Ionen bedingt sein.

Dass für einen wachsenden Zusatz von Alkohol veränderte Verhältnisse eintreten würden, war nach der immer mehr abnehmenden Löslichkeit der Salze zu erwarten. Aus dem früher hervorgehobenen merkwürdigen Umstande, dass der Quotient  $q = KH/k\eta$  nicht vom Salze, sondern nur vom Lösungsmittel abhängt — auch dann, wenn  $q > 1$  wird —

1) Es wäre interessant, zu untersuchen, wie sich Lösungen von  $SrCl_2$  verhalten.  $SrCl_2$  wird in absolutem Alkohol gelöst, und es dürfte hier zur Wirklichkeit werden, dass stark alkoholhaltige Lösungen ein grösseres Leitungsvermögen besitzen als wasserreichere.

scheint mir hervorzugehen, dass der Grund dieser veränderten Verhältnisse wesentlich im Lösungsmittel zu suchen ist.

Zum Schlusse mögen die hauptsächlichsten Resultate kurz zusammengestellt werden.

1) Es ist der Reibungscoefficient mehrerer Mischungen von Wasser und Alkohol, sowie die galvanische Leitungsfähigkeit der mit ihnen hergestellten verdünnten Lösungen von NaCl, KCl, LiCl, NaJ und KJ bestimmt.

2) Das Leitungsvermögen alkoholisch-wässriger Lösungen wächst mit steigendem Salzgehalte langsamer als das wässriger Lösungen.

3) Die Temperaturcoefficienten der Leitungsfähigkeit verdünnter Lösungen entsprechen sehr nahe denen der Fluidität des Lösungsmittels.

4) Das Leitungsvermögen der untersuchten alkoholisch-wässrigen Lösungen folgt aus dem der entsprechenden wässrigen durch Multiplication mit einem Factor, der nur vom Lösungsmittel abhängt, für die verschiedenen Salze aber derselbe ist.

5) Vom reinen Wasser an bis zu etwa gleichen Theilen von Wasser und Alkohol ist die Leitungsfähigkeit sehr nahe der Fluidität des Lösungsmittels proportional. Erst bei grösseren Beimengungen von Alkohol bleibt die Leitungsfähigkeit zurück.

#### IX. Ueber das Zusammenwirken von Zug und Torsion bei Metalldrähten; von F. Himstedt.

(Aus den Verhandlungen der naturforsch. Ges. zu Freiburg i. Br.; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

§ 1. Wenn man einen Draht, welchem eine permanente Torsion ertheilt worden ist, abwechselnd be- und entlastet, so entzieht man ihm dadurch einen Theil seiner permanenten Torsion, und erst nach wiederholten Be- und Entlastungen gelangt der Draht in einen Zustand, in welchem eine dauernde Aenderung seiner permanenten Torsion durch Be- und Entlasten nicht mehr eintritt.<sup>1)</sup> Ueber die Wirkung, welche in

1) G. Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 485. 1879.

diesem Zustande (im Folgenden kurzweg „stationärer Zustand“ genannt) eine Belastung des Drahtes (Zug) hervorbringt, liegen drei Beobachtungen vor.

Hr. W. Thomson<sup>1)</sup> gibt an, dass nach Versuchen von Macfarlane ein Stahldraht sich beim Belasten detordirt und nach Fortnahme der Belastung wieder in seine alte Lage zurückkehrt. Hr. G. Wiedemann<sup>2)</sup> hat bei Messingdrähten beobachtet, dass keine Aenderung bei der Belastung eintritt und Hr. E. Warburg<sup>3)</sup> findet bei Kupfer- und Eisendrähten: der Draht tordirt sich, wenn er belastet wird und kehrt beim Entlasten wieder in seine alte Lage zurück.

Hr. W. Thomson folgert aus der angeführten Beobachtung, dass der Draht äolotrop geworden sein muss, und zwar der Art, dass wenn man aus dem Drahte ausserhalb der Axe desselben einen Würfel ausschneidet, von dem ein Seitenpaar der Längsaxe des Drahtes parallel ist, die beiden anderen Seitenpaare aber mit derselben Winkel von je  $45^\circ$  bilden, dann dieser Würfel nach zwei Axen, welche auf den letztgenannten Seitenpaaren senkrecht stehen, verschiedene Compressibilität zeigen muss.

Hr. E. Warburg gelangt unter Hinzunahme der weiteren von ihm gemachten Beobachtung, dass die in dem stationären Zustande durch einen Zug bewirkte Torsion demselben nahezu proportional ist, durch eine ausführliche Rechnung zu genau demselben Schlusse. Hr. Warburg macht dann noch des weiteren darauf aufmerksam, dass die Erscheinung geeignet ist, zwischen den beiden möglichen Vorstellungen über den Vorgang bei der permanenten Torsion zu entscheiden. Man kann sich nach ihm den Vorgang der permanenten Torsion entweder so vorstellen, dass dabei die Moleküle des Drahtes dauernd in solchen neuen Lagen zur Ruhe kommen, dass der isotrope Körper dabei isotrop bleibt, oder aber annehmen, dass die Materie des Drahtes in der Richtung der Hauptdruckaxen nachgibt, der ur-

1) Thomson, Elasticity. Encyclop. Britannica. 1878.

2) G. Wiedemann, l. c. p. 504.

3) Warburg, Ber. d. naturf. Ges. Freib. i. B. 7. p. 453. 1880.



sprünglich isotrope Körper dann also äolotrop wird. Für diese letztere Vorstellung sprechen die Beobachtungen von Thomson und Warburg, während aus Wiedemann's Beobachtungen sich hierüber kein derartiger Schluss ziehen lässt.

Hr. Warburg hatte die Freundlichkeit, mich hierauf aufmerksam zu machen und mir die nöthigen Theile des von ihm benutzten Apparates zur Wiederholung der Versuche zur Verfügung zu stellen.

Ich habe die Versuche mit Drähten aus elf verschiedenen Metallen angestellt und gefunden, dass sie alle durch Ertheilung einer permanenten Torsion bei gleichzeitiger Belastung äolotrop werden.

Den Verlauf der Erscheinung habe ich bei den verschiedenen Drahtsorten verschieden gefunden und mehr oder weniger abweichend von allen bisher darüber gemachten Angaben. Die untersuchten Drähte lassen sich hiernach in zwei Gruppen theilen.

In die erste gehören: Kupfer, Silber, Blei, Magnesium, Zink, Neusilber, Eisen, Stahl.

In die zweite: Messing, Aluminium, Nickel.

Bei den Drähten der ersten Gruppe habe ich die Erscheinung beobachtet, wie folgt:

Besitzt der Draht im stationären Zustande eine permanente Torsion  $P$ , welche eine bestimmte Grösse nicht überschreitet, so bewirkt eine Belastung eine Zunahme der Torsion von  $P$  auf  $P + T$ , die Entlastung eine Abnahme derselben von  $P + T$  auf die ursprüngliche Grösse  $P$ . Lässt man  $P$  wachsen, so nimmt  $T$  zu, erreicht ein Maximum, nimmt wieder ab und geht durch Null hindurch über in ein negatives  $T$ , sodass also jetzt im stationären Zustande bei der Belastung die Torsion abnimmt von  $P$  bis  $P - T$ , bei der Entlastung wieder zunimmt von  $P - T$  auf  $P$ .

Bei den Drähten der zweiten Gruppe habe ich bei der Belastung stets Detorsion, also stets  $-T$  beobachtet. Bei kleinen Werthen von  $P$  ist der absolute Werth von  $T$  sehr klein, mit wachsendem  $P$  nimmt er zu bis zu einem Maximum und dann wieder ab.

§ 2. Bevor ich die Versuche selbst und ihre Resultate des näheren mittheile, will ich eine andere Erscheinung beschreiben, die gleichzeitig beobachtet wurde, und die mit der soeben erwähnten in engem Zusammenhange steht.

Ertheilt man einem Drahte, welcher durch ein angehängtes Gewicht gespannt gehalten wird, eine permanente Torsion, so tritt stets eine permanente Verlängerung desselben ein.

Bei den Versuchen war der Draht an seinem oberen Ende in die Klemme eines Torsionskreises eingeschraubt, der von einem in die Wand eingegipsten eisernen Arme getragen wurde. An sein unteres Ende war mittelst einer Klemme eine Cardanische Aufhängevorrichtung befestigt<sup>1)</sup>, die an einer in einer Schnur hängenden, leicht beweglichen Rolle die Belastung trug. Das untere Ende des Drahtes ragte nach unten ca. 2 mm aus der Klemme hervor und war zu einer scharfen Spitze angefeilt. Auf diese war ein Mikroskop mit Ocularmikrometer gerichtet, welches an einem in die Wand eingegipsten Träger festgeschraubt war. Die genaue Centrirung des Drahtes im Torsionskreise wurde daran erkannt, dass bei einer Drehung die Spitze des Drahtes immer in gleicher Schärfe am Fadenkreuz des Mikroskops gesehen wurde. Ein Theilstrich des Ocularmikrometers hatte den Werth 0,06 mm.

An der Klemme der Cardanischen Aufhängung waren zwei cylindrische Stahlstäbchen rechts und links so befestigt, dass ihre Axen eine gerade Linie bildeten, welche senkrecht durch die Axe des Drahtes hindurch ging. Um den Draht zu tordiren, wurde der Torsionskreis zunächst so weit gedreht, bis diese Stahlstäbchen gegen zwei vertical aufgestellte Glasstäbchen stiessen, an diesen dann mittelst Mikrometerschrauben so lange gestellt, bis die Berührung auf beiden Seiten eine ganz gleichmässige war, und erst dann am Torsionskreise die nöthige Drehung ausgeführt.

Bei allen noch zu erwähnenden Versuchen habe ich nur solche Drähte benutzt, die, sich selbst überlassen, ohne Span-

1) Diese beiden Theile sind dem a. a. O. beschriebenen Warburg'schen Apparate entnommen.

nung v  
sich d  
Länge  
erwäh  
und S  
schwa  
über d  
V  
führe  
F  
ausge  
S  
C  
d  
D  
0,55 m

U  
ohne  
lastun  
werde  
und c  
P =

Ku

1  
burg  
Späte  
keine  
2  
dem  
oder  
An

nung und Belastung vollkommen gerade waren, und bei denen sich die permanente Torsion gleichmässig über die ganze Länge erstreckte.<sup>1)</sup> Beiden Bedingungen genügten die oben erwähnten Drahtsorten mit Ausnahme der Neusilber-, Eisen- und Stahldrähte sowohl wenn sie unter geringer Belastung schwach gegläht<sup>2)</sup>, als auch wenn sie durch starkes Belasten über die Elasticitätsgrenze hinaus gestreckt wurden.

Von den zahlreichen Beobachtungen mit solchen Drähten führe ich nur einige Beispiele an. Es bezeichnet:

$P$  die ganze bis dahin ertheilte permanente Torsion, ausgedrückt in ganzen Umdrehungen,

$S$  die totale Verlängerung in mm,

$G$  die Belastung, bei welcher tordirt wurde,

$d$  den Durchmesser der Drähte.

Die Länge betrug bei allen zu Anfang der Versuche 0,55 m.

#### Kupfer bei $0,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ gegläht.

	$d = 0,8 \text{ mm}$		$G = 5,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		
$P$	0,78	1,52	2,25	10,10	38,57
$S$	0,86	1,60	2,33	7,54	17,69
					66,40

Um dieselbe Verlängerung bei einem gleichen Drahte ohne Torsion zu erzielen, mussten bei stündlicher Mehrbelastung von 0,3 kg im ganzen 8,1 kg, d. i.  $16,2 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  angehängt werden. Wurde die Belastung darauf wieder fortgenommen und der Draht tordirt bei  $2 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ , so trat bei einer Torsion  $P = 3,83$  eine weitere Verlängerung  $S = 0,4 \text{ mm}$  ein.

#### Kupfer 14 Tage lang mit $25 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ belastet gewesen.

	$d = 0,8 \text{ mm}$		$G = 3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		
$P$	0,81	10,49	59,16	263,61	
$S$	0,07	0,51	2,40	10,72	

1) Es sind dies dieselben Bedingungen, welche auch schon Hr. Warburg an sein Beobachtungsmaterial stellte, und deren Wichtigkeit sich im Späteren zeigen wird. Bei Thomson und Wiedemann findet sich keine Angabe hierüber.

2) Ich will nicht unerwähnt lassen, dass ich keinen Unterschied in dem Verhalten der in Luft geglähten Drähte und der in Wasserstoff- oder Kohlensäureströme geglähten gefunden habe.

Während also eine Mehrbelastung von  $22 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  nicht hinreichte, eine permanente Verlängerung zu bewirken, trat eine solche schon bei verhältnissmässig kleiner permanenter Torsion ein.

Kupfer gegläht bei  $0,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ .

$$d = 0,8 \text{ mm} \quad G = 0,108 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

P	3,41	37,11	377,00
S	0,08	0,58	2,96

Also auch bei minimaler Belastung ist die Verlängerung mit vollster Sicherheit zu constatiren.

Kupfer gegläht bei  $0,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ , darauf drei Tage belastet mit  $24 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ , dann mit eben dieser Belastung tordirt.

P	$0^\circ 35'$	$1^\circ 12'$	$7^\circ 16'$
S	0,04	0,08	0,46

Bei grosser Belastung tritt also schon bei sehr kleinen permanenten Torsionen eine messbare Verlängerung ein, während ich eine solche bei der temporären Torsion nicht beobachtet habe<sup>1)</sup>, doch muss ich bemerken, dass für die letzte Art der Beobachtungen der Apparat nicht besonders eingerichtet war.

Die Anzahl der überhaupt untersuchten Drähte beträgt: Kupfer 22, Messing 22, Stahl 18, Eisen 15, Neusilber 12, Zink 12, Blei 12, Magnesium 10, Aluminium 8, Silber 4, Nickel 4.

Bei Neusilber-, Eisen- und Stahldrähten hat sich, wenn sie gegläht waren, die Torsion nie auch nur annähernd gleichmässig über die Länge des Drahtes vertheilt<sup>2)</sup>, bei ihnen traten vielmehr stets scharfe Torsionsknicke ein, d. h. Punkte, von denen aus gerechnet die ganze obere Länge des Drahtes sowohl wie die ganze untere, für sich betrachtet, ohne Torsion sind, beide Theile aber gegeneinander um den Torsionswinkel tordirt, verschoben sind.

Nicht geglähte Drähte tordirten sich fast immer gleichmässig, waren aber ohne Belastung nie ganz gerade, und ich habe deshalb mit solchen Drähten nur bei verhältnissmässig

1) Vgl. hierüber F. Braun, Pogg. Ann. 159. p. 337. 1876.

2) Die gleiche Bemerkung hat für Stahl und Eisen schon Hr. Warburg gemacht.

grosser Belastung beobachten können. Unter diesen Verhältnissen habe ich aber auch bei ihnen stets eine permanente Verlängerung bei permanenter Torsion beobachtet.

Stahl 14 Tage mit  $45 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  belastet, dann bei dieser Belastung tordirt.

P	1,50	7,11	101,66	148,97
S	0,20	0,78	4,42	5,81

Sir W. Thomson führt a. a. O. an, dass ein 5 m langer Stahldraht, mit 5 kg belastet, bei 95 Umdrehungen eine Verlängerung um  $\frac{1}{1600}$  seiner Länge erfahren habe, bei 120 Umdrehungen hingegen wieder eine Verkürzung um  $\frac{1}{6000}$  der Länge. Ob der Draht sich gleichmässig tordirte, ist nicht angegeben.

Hr. V. Kramm<sup>1)</sup> hat beobachtet, dass weiche Kupfer- und Eisendrähte bei grösseren Torsionen eine Verlängerung, nicht geglühte Eisen- und Stahldrähte dagegen eine Verkürzung zeigen. Die Drähte zeigten nicht immer gleichmässige Torsion.

Nun habe auch ich bei Drähten mit Torsionsknicken des öfteren bald Verkürzung, bald Verlängerung beobachtet, dagegen bei Drähten mit gleichmässiger Torsion nie derartige Unregelmässigkeiten gefunden, und ich vermute deshalb, dass sowohl Thomson's als Kramm's Beobachtungen einer Verkürzung bei permanenter Torsion auf Torsionsknicke zurückzuführen sind.

§ 3. Hr. G. Wiedemann<sup>2)</sup> hat beobachtet, dass die durch dieselbe temporäre Torsion hervorgebrachte permanente Torsion eines belasteten Drahtes abhängig ist von der Grösse der Belastung, und zwar ist die permanente Torsion grösser bei grösserer Belastung. Ich habe bei meinen Versuchen Gelegenheit gehabt, diese Beobachtung innerhalb sehr weiter Grenzen bestätigt zu sehen.

Nimmt man zu dieser Beobachtung hinzu die im vorhergehenden Paragraphen mitgetheilten Beobachtungen, wo-

1) V. Kramm, Ueber den Einfluss der Torsion auf die absolute Festigkeit der Metalledrähte. Dissertation. Marburg.

2) l. c. p. 497.

nach die Verlängerung eines belasteten Drahtes um so grösser ist, je grösser die ihm ertheilte permanente Torsion ist, so gelangt man zu dem folgenden Satze:

Wirken auf einen Draht gleichzeitig ein tordirendes Moment und ein dazu senkrechter Zug, so verstärken sich dieselben gegenseitig in ihrer Wirkung.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, noch ein besonderes Beispiel hierfür anzuführen. Ein weicher Kupferdraht war drei Tage lang mit  $10 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  belastet gewesen. Die Belastung wurde entfernt bis auf  $1,5 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  und dem Drahte eine temporäre Torsion von  $90^\circ$  ertheilt. Nach Aufhebung derselben konnte weder eine messbare permanente Torsion, noch eine permanente Verlängerung beobachtet werden. Der Draht wurde hierauf bei  $10 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  wieder temporär um  $90^\circ$  tordirt. Nach Aufhebung des tordirenden Momentes zeigte derselbe eine permanente Torsion von mehr als  $8^\circ$  und eine permanente Verlängerung von 0,22 mm. Also der Zug  $10 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  allein ist nicht im Stande, eine permanente Verlängerung hervorzubringen, und die temporäre Torsion von  $90^\circ$  allein ist nicht im Stande, eine permanente Torsion zu bewirken, wirken aber der Zug und das tordirende Moment gleichzeitig auf den Draht, so tritt sowohl permanente Verlängerung als auch permanente Torsion auf.

§ 4. Zu den in § 1 erwähnten Versuchen wurde der § 2 schon beschriebene Apparat benutzt. Die dem Drahte ertheilte permanente Torsion konnte am Torsionskreise bis auf zehn Minuten genau abgelesen werden. Die gleichzeitig eintretende Verlängerung wurde, wie schon erwähnt, mit Mikroskop und Ocularmikrometer gemessen. Die durch das Be- und Entlasten bewirkte Torsion, resp. Detorsion des Drahtes im stationären Zustande wurde mit Fernrohr, Spiegel und Scala beobachtet. Die Scala war in Millimeter getheilt, der Scalenabstand betrug stets 2,4 m. Das Be- und Entlasten des Drahtes geschah durch Zu-, resp. Abfliessenlassen von Wasser; entweder in ähnlicher Weise wie bei Hrn. G. Wiedemann in ein vom Drahte getragenes Gefäss, oder aber in ein fest aufgestelltes Gefäss, in welches dann ein

am Drahte aufgehängtes Gewicht eintauchte. Die Heber-  
vorrichtung, durch welche das Zu- und Abfließen des Was-  
sers bewerkstelligt wurde, war so eingerichtet, dass selbst  
bei ziemlich schnellem Be- und Entlasten der Draht voll-  
ständig in seiner Ruhelage blieb.

Sollten mit einem Drahte Versuche angestellt werden,  
so blieb derselbe mindestens zwölf Stunden hängen mit der  
Maximalbelastung, welche im Laufe der Versuche angewendet  
werden sollte, und wurde während dieser Zeit ca. 30—40 mal  
be- und entlastet:

In dem Folgenden bezeichnet wieder:

$P$  die permanente Torsion,

$S$  die bei derselben eingetretene Verlängerung,

$\pm T$  die im stationären Zustande durch Belasten her-  
vorgebrachte Torsion, resp. Detorsion in Graden, Minuten  
und Sekunden,

$G$  das Gewicht, mit welchem der Draht während der  
Torsion belastet war,

$K$  der im stationären Zustande ausgeübte Zug.

Bei positivem  $K$  trägt der Draht, wenn belastet:  $G+K$ ,  
entlastet:  $G$ . Bei negativem  $K$ , wenn belastet:  $G$ , wenn ent-  
lastet:  $G-K$ .

$d$  den Durchmesser des Drahtes.

Die Länge war bei allen Drähten 0,55 m.

### I. Gruppe.

Kupfer gegläht bei  $0,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ .

$d = 0,8 \text{ mm}$				$G = 2,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$				$K = +3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			
$P$	$S$	$T$		$P$	$S$	$T$		$P$	$S$	$T$	
0	0	+0°	1' 7"	18,05	3,73	+0°	46' 16"				
0,65	0,13	+0	10 1	193,88	25,64	+0	15 8				
1,89	0,52	+0	20 55	283,14	34,15	-0	6 44				
8,71	2,09	+0	42 33	674,77	59,95	-2	41 30				

Kupfer gegläht bei  $0,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ .

$d = 0,8 \text{ mm}$				$G = 5,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$				$K = -3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			
$P$	$S$	$T$		$P$	$S$	$T$		$P$	$S$	$T$	
0	0	+0°	0' 34"	10,10	7,53	+1°	41' 42"				
0,78	0,86	+1	19 26	77,41	27,23	+0	40 7				
1,52	1,60	+1	37 52	214,28	51,18	±0	0 0				
3,56	4,96	+1	56 42	312,46	66,40	-0	14 18				



Kupfer 14 Tage mit  $21 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  belastet gewesen.

$d = 0,8 \text{ mm}$			$G = 2,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			$K = + 3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		
P	S	T	P	S	T	P	S	T
0	0	0	10,13	0,51	$+0^\circ 10' 29''$	0	10'	29''
0,49	0,02(?)	$+0^\circ 0' 10''$ (?)	58,81	3,02	$+0 19 30$	0,58	0,10	$+0 19 30$
0,95	0,04	$+0 1 34$	151,47	8,26	$-0 18 2$	0,95	0,04	$+0 1 34$

Silber gegläht bei  $0,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ .

$d = 0,8 \text{ mm}$			$G = 2,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			$K = + 2,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		
P	S	T	P	S	T	P	S	T
0	0	0	53,07	13,02	$+0^\circ 14' 48''$	0	14'	48''
0,58	0,10	$+0^\circ 7' 12''$	94,22	18,56	$-0 1 2$	0,58	0,10	$+0^\circ 7' 12''$
21,90	5,84	$+0 57 10$	263,56	31,98	$-0 14 26$	21,90	5,84	$+0 57 10$

Blei 12 Stunden mit  $1,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  belastet gewesen.

$d = 1 \text{ mm}$			$G = 0,25 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			$K = + 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		
P	S	T	P	S	T	P	S	T
0	0	0	19,66	6,19	$+0^\circ 9' 19''$	0	9'	19''
0,72	0,24	$+0^\circ 1' 28''$	101,55	28,61	$-0 10 44$	0,72	0,24	$+0^\circ 1' 28''$

Zink bei  $0,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  auf  $180^\circ$  erwärmt.

$d = 0,6 \text{ mm}$			$G = 3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			$K = - 1,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		
P	S	T	P	S	T	P	S	T
0	0	0	82,27	17,82	$+0^\circ 21' 12''$	0	21'	12''
0,52	0,18	$+0^\circ 1' 30''$	261,63	48,38	$-0 1 58$	0,52	0,18	$+0^\circ 1' 30''$

Magnesium bei  $0,6 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  im Oelbade erhitzt.

$d = 0,4 \text{ mm}$			$G = 3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			$K = - 1,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		
P	S	T	P	S	T	P	S	T
0	0	$+0^\circ 0' 18''$	0,61	0,19	$+0^\circ 2' 23''$	0	2'	23''
0,33	0,09	$+0 4 -$	1,23	0,31	$-0^\circ 1' 42$	0,33	0,09	$+0 4 -$
0,51	0,14	$+0 5 22$				0,51	0,14	$+0 5 22$

Neusilber 24 Stunden mit  $24 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  belastet gewesen.

$d = 0,8 \text{ mm}$			$G = 5,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			$K = - 3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		
P	S	T	P	S	T	P	S	T
0	0	$-0^\circ 0' 42''$	34,25	7,47	$+0^\circ 6' 44''$	0	6'	44''
1,80	0,35	$-0 0 34$	126,08	20,95	$-0 2 12$	1,80	0,35	$-0 0 34$
13,47	2,57	$+0 2 21$				13,47	2,57	$+0 2 21$

Eisen 24 Stunden mit  $16 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  belastet gewesen.

$d = 0,6 \text{ mm}$			$G = 5,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$			$K = - 3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		
P	S	T	P	S	T	P	S	T
0	0	$+0^\circ 2' 21''$	23,42	4,24	$+0^\circ 29' 28''$	0	29'	28''
0,47	0,08	$+0 3 12$	116,88	17,46	$+0 16 36$	0,47	0,08	$+0 3 12$

Stahl 24 Stunden mit  $50 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  belastet gewesen.

$$d = 0,4 \text{ mm} \quad G = 13,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad K = -4,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}.$$

P	S	T	P	S	T
0	0	-0° 2' 21"	62,33	1,76	+0° 17' 24"
1,50	0,07	+0 1 8	104,01	2,77	-0 0 22

## II. Gruppe.

Messing gegläht bei  $0,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ .

$$d = 0,8 \text{ mm} \quad G = 2,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad K = +3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}.$$

P	S	T	P	S	T
0	0	0	64,72	4,69	-0° 31' 51"
0,55	0,02(?)	-0° 0' 4" (?)	273,01	6,21	-1 34 27
1,06	0,06	-0 0 34	498,31	26,08	-1 6 5
5,55	0,34	-0 0 53			

Messing gegläht bei  $0,8 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ .

$$d = 0,8 \text{ mm} \quad G = 5,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad K = -3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}.$$

P	S	T	P	S	T
0	0	+0° 0' 6"	59,95	11,47	-1° 23' 27"
0,60	0,15	-0 0 42	138,06	28,59	-3 11 18
1,16	0,30	-0 2 27	165,12	31,23	-3 11 14
4,52	1,18	-0 7 18	376,96	52,74	-1 3 -

Aluminium gegläht bei  $0,6 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ .

$$d = 0,75 \text{ mm} \quad G = 2,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad K = +2,6 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}.$$

P	S	T	P	S	T
0	0	-0° 0' 28"	153,25	12,38	-2° 1' 55"
1,48	0,14	-0 0 58	216,05	17,50	-1 23 18

Nickel stark gegläht bei  $1,6 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ .

$$d = 1,2 \text{ mm} \quad G = 2,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} \quad K = +3,0 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}.$$

P	S	T	P	S	T
0	0	+0° 0' 4"	416,25	37,34	-0° 29' 56"
0,55	0,07	-0 0 5	471,64	39,01	-0 28 35

Die Zahlen der überhaupt von jedem Metall untersuchten Drähte sind schon im Vorhergehenden gegeben.

Ich will hier nur noch darauf aufmerksam machen, dass der Werth von  $T$  abhängt sowohl von der Grösse der permanenten Torsion als auch von der gleichzeitig eingetretenen Verlängerung. Man vergleiche die Beispiele für Kupfer oder die für Messing untereinander.

Die permanente Torsion allein genügt nicht, um die Erscheinung hervorzubringen, vielmehr zeigt sich dieselbe nur dann, wenn gleichzeitig eine permanente Verlängerung eingetreten ist. Bei kleiner Torsion und kleinem Zug, wo  $S$  unmerklich ist, ist auch  $T$  unmerklich, dagegen ergaben sich bei kleiner Torsion, aber grossem Zug, sobald  $S$  messbar ist, auch für  $T$  nicht zu übersehende Werthe. Dies erklärt wohl, weshalb Hr. G. Wiedemann die Erscheinung nicht beobachtet hat. Bei seinen Versuchen wurde ein Messingdraht bei einer Belastung von ca.  $1 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  um ca.  $70^\circ$  tordirt. Für einen weichen Messingdraht habe ich aber bei  $2,4 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$  durch eine Torsion von  $383^\circ$  erst eine Verlegung von  $0,8$  Scalentheilen, also ein  $T = 0^\circ 0' 34''$  gefunden.

Bei Drähten desselben Metalls tritt die Erscheinung dem Obigen entsprechend weit stärker auf bei weichen als bei harten. Von den verschiedenen Metallen zeigten sie in der 1. Gruppe am stärksten Kupfer und Silber, am schwächsten Stahl. In der 2. Gruppe folgen sich die Metalle in der Reihenfolge: Messing, Aluminium, Nickel.

§ 5. Alle Drähte, mit denen Versuche angestellt waren, zeigten sich hinterher hart, federnd und brüchig. Weiche Kupferdrähte von  $0,5$  m Länge, die vor den Versuchen durch ihr eigenes Gewicht sich dauernd bogen, zeigten nach den Versuchen keine dauernde Biegung, selbst wenn sie temporär zu einem Kreise gebogen wurden. Besonders stark tordirte Drähte zerbrachen bei jeder versuchten Biegung. Selbst Blei verlor durch die Versuche in etwas seine Plasticität.

Die durch die Torsion bei Belastung hervorgerufene Aeolotropie der Drähte konnte sehr bequem durch Anätzen sichtbar gemacht werden. Die Drähte bekamen ohne Ausnahme ein schraubenförmiges Aeussere, und zwar ganz gleich, mochte nur die Oberfläche leicht angeätzt sein oder der Draht so lange in der Säure gelassen werden, bis er zu zerfallen drohte.

Ich habe hierbei Gelegenheit gehabt, die Beobachtungen des Hrn. Kalischer<sup>1)</sup> über das Krystallinischwerden von

1) Kalischer, Berl. Ber. 14, p. 2797. 1881.

Metalldrähten durch Glühen bestätigen zu können und will nicht unerwähnt lassen, dass ich entgegen jenen Beobachtungen auch bei Messingdraht in deutlichster Weise die Krystalle schon für das blosse Auge habe sichtbar machen können. Bei Aluminiumdrähten habe ich Krystallflächen nicht direct sehen können, doch zeigten dieselben nach dem Glühen stark muschelige Bruchflächen.

Physikal. Inst., Freiburg i. Br., Mai 1882.

X. *Ueber den Zusammenhang zwischen den Einheiten des Magnetismus und der Electricität;*  
von R. Clausius.

In einem im März d. J. veröffentlichten Aufsatz<sup>1)</sup> habe ich einige Betrachtungen über die zur Messung electricischer und magnetischer Grössen anzuwendenden Maasssysteme angestellt, worin ein Punkt vorkommt, der zu verschiedenen Einwendungen Veranlassung gegeben hat, nämlich die Bestimmung der Einheit des Magnetismus im electrostatischen Maasssysteme. Einige dieser Einwendungen, welche sich im Junihefte des Phil. Mag. befanden, habe ich schon in einem im Augusthefte des Phil. Mag. veröffentlichten Artikel beantwortet. Seitdem sind aber noch einige weitere, zum Theil von sehr beachtenswerthen Seiten stammende Bemerkungen über jene Bestimmungsweise gemacht, sodass ich glaube, den Gegenstand noch einmal zur Sprache bringen zu müssen.

In früheren Zeiten galt der Magnetismus als ein für sich bestehendes, von der Electricität unabhängiges Agens. Wenn man an dieser Anschauung auch jetzt noch festhalten wollte, so wäre es nicht nöthig, bei der Festsetzung eines Maasssystemes für den Magnetismus auf das für die Electricität angewandte Maasssystem Rücksicht zu nehmen. Es

1) Clausius, Verhandl. des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande und Westfalens. 39. p. 105. 1882 und Wied. Ann. 16. p. 529. 1882.

ist aber das grosse Verdienst von Ampère, und ich glaube hinzufügen zu dürfen, einer der grössten Fortschritte der Physik, dass zwischen Electricität und Magnetismus ein fester Zusammenhang nachgewiesen ist, sodass man den Magnetismus nicht mehr als ein besonderes Agens zu betrachten braucht, sondern alle Kräfte, welche gewöhnlich magnetische Kräfte genannt werden, als electrodynamische Kräfte ansehen kann.

Denkt man sich nämlich in einem gegebenen Magnet von messbarer Grösse jeden der unzähligen kleinen Magnete, aus denen er besteht, durch einen kleinen electrischen Strom ersetzt, der so bestimmt ist, dass das Product aus der Stromstärke und dem von dem Strome umflossenen Flächenraume gleich dem Producte aus der Länge des kleinen Magnets und der Stärke seiner Pole, oder, anders ausgedrückt, gleich dem magnetischen Momente des kleinen Magnets ist, so übt die Gesamtheit dieser kleinen electrischen Ströme auf andere electrische Ströme oder andere Magnete dieselben Kräfte aus, wie der gegebene Magnet. Man kann also nach Ampère den Magnetismus, ohne ein zweites, neben der Electricität existirendes Agens anzunehmen, aus der Existenz jener electrischen Ströme erklären.

Nach dieser Erklärung ist unter dem Worte Magnetismus nur noch ein electrodynamischer Begriff zu verstehen, und man muss daher auch in jedem Maasssysteme die zur Messung des Magnetismus anzuwendende Einheit diesem Begriffe gemäss wählen, nämlich so, dass das Product aus der Magnetismuseinheit und der Längeneinheit, und das Product aus der Stromeinheit und der Flächeneinheit gleichwerthige Grössen werden. Bezeichnen wir also die Einheit des Magnetismus mit  $[m]$  und die Einheit der Stromstärke mit  $[i]$ , und ferner die Längeneinheit mit  $[L]$  und demgemäss die Flächeneinheit mit  $[L^2]$ , so muss folgende Gleichung gelten:

$$(1) \quad [mL] = [iL^2],$$

woraus folgt:

$$(2) \quad [m] = [iL].$$

Da nun die Einheit der Stromstärke die Stärke eines solchen Stromes ist, bei dem in der Zeiteinheit die Electricitätseinheit durch einen Querschnitt geht, so hat man, wenn  $[e]$  die Electricitätseinheit und  $[T]$  die Zeiteinheit bedeutet, zu setzen:

$$[i] = [eT^{-1}],$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$(3) \quad [m] = [eLT^{-1}].$$

Diese Gleichung drückt die der Ampère'schen Erklärung des Magnetismus entsprechende Beziehung zwischen den Einheiten des Magnetismus und der Electricität aus.

Wendet man sie auf das electrostatische Maasssystem an und bestimmt daher die Grösse  $[e]$ , welche in diesem Falle zur Unterscheidung von der electrodynamischen Electricitätseinheit mit  $[e_s]$  zu bezeichnen ist, durch die Gleichung:

$$(4) \quad [e_s] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}],$$

worin  $[M]$  die Masseneinheit bedeutet, so erhält man zur Bestimmung der electrostatischen Magnetismuseinheit folgende Gleichung:

$$(5) \quad [m_s] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}].$$

Diese Gleichung ist es, welche zu den oben erwähnten Einwendungen Veranlassung gegeben hat, weil sie von Maxwell's Angabe abweicht, welche folgendermaassen lautet:

$$(6) \quad [m_s] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}].$$

Die Art, wie Maxwell zu seiner Gleichung gelangt ist, beruht, wie sich aus dem Zusammenhange seiner Auseinandersetzungen schliessen lässt, auf der Anwendung einer Gleichung, welche sich in Bezug auf ihre Stellung zum electrostatischen und electrodynamischen Maasssysteme anders verhält, als die Ampère'sche Gleichung. Man muss nämlich einen Unterschied machen zwischen Gleichungen, welche ausschliesslich einem dieser Maasssysteme angehören, und solchen, die auf beide Systeme anwendbar sind. Ausschliesslich electrostatisch oder electrodynamisch sind solche Gleichungen,

welche eine electrostatische oder eine electrodynamische Kraft durch die mechanische Kraftformel darstellen.

Was nun die Ampère'sche Gleichung anbetrifft, so ist sie zwar aus der Betrachtung electrodynamischer Kräfte, nämlich aus der Vergleichung der von einem Magnet und der von einem electrischen Strome ausgeübten Kräfte hervorgegangen, aber sie stellt diese Kräfte weder durch die mechanische Kraftformel, noch durch irgend eine andere Formel dar, sondern sagt nur aus, dass der Magnet und der Strom sich in Bezug auf die von ihnen ausgeübten Kräfte untereinander gleich verhalten. Sie ist also nicht als eine ausschliesslich electrodynamische Gleichung anzusehen. Man muss ihr vielmehr, da sie nur die nach Ampère zwischen Magnetismus und Electricität stattfindende Beziehung ausdrückt, sofern man überhaupt die Ampère'sche Theorie als richtig anerkennt, eine allgemeine, von dem angewandten Maasssysteme unabhängige Gültigkeit zuschreiben, und dadurch ist die Anwendung, welche ich von ihr gemacht habe, gerechtfertigt.

Maxwell's Gleichung dagegen ist dadurch entstanden, dass eine electrodynamische Kraft, nämlich die von einem Magnetpol auf einen electrischen Strom ausgeübte Kraft, durch die mechanische Kraftformel dargestellt ist. Sie trägt somit den Charakter einer ausschliesslich electrodynamischen Gleichung an sich, und ihre Anwendung zur Bestimmung der electrostatischen Magnetismuseinheit kann nicht als gerechtfertigt anerkannt werden.

Ueber die zur Unterstützung dieser Bestimmungsweise von verschiedenen englischen Autoren angeführten Gründe habe ich mich schon in meinem oben erwähnten, im Phil. Mag. publicirten Artikel ausgesprochen, und ich will das dort Gesagte hier nicht wiederholen, sondern will mich darauf beschränken, einige Punkte hervorzuheben, welche mir für die Beurtheilung der sich gegenüberstehenden Bestimmungsweisen maassgebend zu sein scheinen.

Die Maxwell'sche Bestimmung ist nicht nur ohne Rücksicht auf die Ampère'sche Erklärung des Magnetismus ausgeführt, sondern sie steht auch mit derselben im Widerspruche, wie man leicht erkennen kann, wenn man die in (6)

für [m  
gegebe  
auf be  
drücke  
aber s  
halten  
Magne  
Magne  
schafts  
wollte.

F  
Amp  
electr  
unter  
übten  
Form  
sehe  
Hel

I  
der E  
Sätze  
Elect  
in de  
2) Ei  
welch  
der I  
Sätze

(7)

Ein  
diese  
das  
Stell  
von

geha



für  $[m_s]$  gegebene Formel und zugleich die in (4) für  $[e_s]$  gegebene Formel in die Gleichung (3) einsetzt, indem dann auf beiden Seiten verschiedene Ausdrücke, und zwar Ausdrücke von verschiedenen Dimensionen entstehen. Ich muss aber sagen, dass ich es für einen entschiedenen Rückschritt halten würde, wenn man die Ampère'sche Erklärung des Magnetismus, durch welche das grosse, die Electricität, den Magnetismus und den Electromagnetismus umfassende Wissenschaftsgebiet so wesentlich vereinfacht ist, wieder aufgeben wollte.

Ferner ist zu bemerken, dass, wenn man einmal die Ampère'sche Erklärung des Magnetismus verlässt, und die electrostatische Einheit des Magnetismus auf andere Weise, unter Anwendung einer der von einem Magnetpole ausgeübten Kräfte zu bestimmen sucht, dann die Maxwell'sche Formel nicht die einzig mögliche ist. Zu dieser Bemerkung sehe ich mich besonders durch einen neuerdings von Hrn. Helmholtz veröffentlichten Aufsatz <sup>1)</sup> veranlasst.

Hr. Helmholtz spricht von den Gauss'schen Einheiten der Electricität und des Magnetismus, welche durch folgende Sätze bestimmt sind: 1) Einheit der Electricität ist diejenige Electricitätsmenge, welche auf eine gleiche Electricitätsmenge in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausübt, 2) Einheit des Magnetismus ist diejenige Magnetismusmenge, welche auf eine gleiche Magnetismusmenge in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausübt; aus welchen Sätzen sich die nachstehenden Gleichungen ergeben:

$$(7) \quad \begin{cases} [e] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}] \\ [m] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}]. \end{cases}$$

Ein Maasssystem, welches auf der gleichzeitigen Anwendung dieser beiden Gleichungen beruht, nennt Hr. Helmholtz das bisherige electrostatische System und an einer Stelle auch das electrostatisch-magnetische System von Gauss.

Ich glaube nun freilich nicht, dass Gauss die Absicht gehabt hat, diese beiden Gleichungen zur Grundlage eines

1) Helmholtz, Wied. Ann. 17. p. 42. 1882.

und desselben in sich zusammenhängenden Maasssystems zu machen, sondern bin vielmehr der Ansicht, dass er das electrische und das magnetische Maasssystem als zwei für sich bestehende Maasssysteme betrachtet hat, deren jedes eine der beiden Gleichungen zur Grundlage haben solle. Indessen will ich andererseits gern zugestehen, dass, wenn man die Ampère'sche Erklärung des Magnetismus einmal verlassen hat, man ebensogut diese beiden Gleichungen zu einem System vereinigen kann, wie die dem Maxwell'schen electrostatischen Maasssystem zu Grunde liegenden Gleichungen.

Wir haben somit, unter Zuziehung des von Hrn. Helmholtz empfohlenen Systemes drei verschiedene electrostatische Maasssysteme, welche in Bezug auf die rein electrischen Grössen vollkommen untereinander übereinstimmen, und nur in Bezug auf die Einheit des Magnetismus von einander abweichen, und es mögen der Uebersichtlichkeit wegen die drei die letztere darstellenden Formeln hier zusammengestellt werden.

	Maxwell	Helmholtz	Clausius
$[m_s]$	$[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}]$	$[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}]$	$[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$

Sofern es sich nur um die Vergleichung magnetischer Grössen untereinander handelt, können alle drei Formeln gleich gut als Einheitsformeln für den Magnetismus dienen. Vergleicht man aber magnetische Grössen mit electrischen Grössen, so entsteht die Frage, zu was für Beziehungen zwischen Magnetismus und Electricität die verschiedenen Formeln führen.

Im electrodynamischen Maasssysteme gilt zwischen den Einheiten des Magnetismus und der Electricität folgende allgemein angenommene Gleichung:

$$(8) \quad [m_d] = [e_d L T^{-1}].$$

Hiermit wollen wir die Gleichungen zusammenstellen, welche man im electrostatischen Maasssysteme, je nach den drei verschiedenen Auffassungen desselben, zwischen den Einheiten des Magnetismus und der Electricität zu bilden hat.

Nach meiner Auffassung hat man zu setzen:

$$(9) \quad [m_s] = [e, L T^{-1}].$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form, wie die im electrodynamischen Maasssysteme geltende, und man erhält somit bei dieser Auffassung eine bestimmte Beziehung zwischen Magnetismus und Electricität, welche von dem angewandten Maasssystem unabhängig ist. In den Gleichungen ist ausgedrückt, dass die Magnetismuseinheit eine Grösse von der Dimension eines Products aus der Electricitätseinheit und der Geschwindigkeitseinheit ist. Das Hinzukommen einer Geschwindigkeit als Factor drückt aus, dass der Magnetismus nicht mit ruhender, sondern mit strömender Electricität in gleiche Linie zu stellen ist, wie es der Ampère'schen Erklärung entspricht.

Nach Helmholtz' Auffassung hat man zu setzen:

$$(9_a) \quad [m_s] = [e_s].$$

Dieses ist eine ganz andere Gleichung, als die im electrodynamischen Maasssysteme geltende, und ich muss gestehen, dass ich nicht weiss, welche Vorstellung man sich vom Wesen des Magnetismus bilden soll, wenn in einem Maasssysteme die Magnetismuseinheit als eine Grösse von derselben Dimension erscheint, wie die Electricitätseinheit, und im anderen Maasssysteme als eine Grösse von der Dimension eines Productes aus der Electricitätseinheit und der Geschwindigkeitseinheit.

Nach Maxwell's Auffassung hat man zu setzen:

$$(9_b) \quad [m_s] = \frac{[e_s]}{[L T^{-1}]}.$$

Dieses ist ebenfalls eine andere Gleichung, als die im electrodynamischen Maasssystem geltende. Statt eines Productes aus der Electricitätseinheit und der Geschwindigkeitseinheit steht hier ein Bruch, welcher die Electricitätseinheit zum Zähler und die Geschwindigkeitseinheit zum Nenner hat, und es wirft sich wieder die Frage auf, welche Vorstellung vom Wesen des Magnetismus man sich aus zwei so verschiedenen Ausdrücken bilden soll.

Bonn, September 1882.

# XI. Zur Theorie der Fresnel'schen Integrale; von Dr. And. Lindstedt.

Bei kleinen Werthen des Arguments  $u$  sind zur numerischen Berechnung der sog. Fresnel'schen Integrale folgende bekannte Formeln:

$$(1) \quad \begin{cases} \int_0^u \cos x^2 dx = u - \frac{1}{2!} \cdot \frac{u^5}{5} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{u^9}{9} - \dots \\ \int_0^u \sin x^2 dx = \frac{u^3}{3} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{u^7}{7} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{u^{11}}{11} - \dots \end{cases}$$

sehr bequem und genau. Sobald aber  $u$  eine gewisse Grenze, etwa  $u = 2$ , überschreitet, werden sie sehr unpraktisch, und da die halbconvergenten Reihen, welche man erst bei beträchtlicheren Werthen von  $u$  anwenden kann, in jenen Fällen unbrauchbar sind, so will ich hier eine Methode angeben, welche eben in den Fällen mit Vortheil anzuwenden ist, wo die beiden anderen nicht taugen.

Zu diesem Zwecke betrachte ich mit Cauchy anstatt der obigen Integrale die folgenden:

$$\int_u^\infty \cos x^2 dx \text{ und } \int_u^\infty \sin x^2 dx,$$

welche sich von jenen um die Constante  $\sqrt{\pi}/8$  unterscheiden, und zerlege:

$$(2) \quad \begin{cases} \int_u^\infty \cos x^2 dx = M(u) \cos u^2 - N(u) \sin u^2 \\ \int_u^\infty \sin x^2 dx = M(u) \sin u^2 + N(u) \cos u^2. \end{cases}$$

Es wird alsdann wie bekannt:

$$(3) \quad \begin{cases} M(u) = \int_u^\infty \cos(x^2 - u^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin x dx}{\sqrt{x+u^2}} \\ N(u) = \int_u^\infty \sin(x^2 - u^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin x dx}{\sqrt{x+u^2}}. \end{cases}$$

Demnach wird zunächst:

$$\begin{aligned}
 M\left(\sqrt{u^2 + \frac{\pi}{2}}\right) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{u^2 + \frac{\pi}{2} + x}} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{u^2 + \frac{\pi}{2} + x}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{u^2 + \frac{\pi}{2} + x}} + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{u^2 + \frac{\pi}{2} + x}} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{u^2 + \pi - x}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{u^2 + \pi + x}} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{u^2 + \frac{3\pi}{2} + x}}.
 \end{aligned}$$

Indem ich jetzt:

$$(4) \quad u^2 = \beta\pi; \quad M\left(\sqrt{u^2 + \frac{\pi}{2}}\right) = M(\beta),$$

setze, so kann dieses Resultat geschrieben werden:

$$(5) \quad M(\beta) = \mu(\beta + 1) - M(\beta + 1), \quad \text{wo also:}$$

$$\mu(\beta + 1) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta + 1) - x}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta + 1) + x}} \right\},$$

bedeutet.

Der Voraussetzung nach kann  $\beta$  niemals negativ werden; entwickelt man deshalb die Parenthese unter dem Integralzeichen nach Potenzen von  $x$ , so erhält man:

$$(6) \quad \mu(\beta + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_1}{\sqrt{\pi(\beta + 1)}^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{Q_3}{\sqrt{\pi(\beta + 1)}^7} + \dots$$

wo allgemein:

$$Q_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^i \sin x \, dx,$$

gesetzt worden ist.

In entsprechender Weise erhält man für die Function  $N(u)$ :

$$(7) \quad N(\beta) = \nu(\beta + 1) - N(\beta + 1),$$

wo, dem Obigen analog:

$$(7_a) \quad \left\{ \begin{aligned} N\left(\sqrt{u^2 + \frac{\pi}{2}}\right) &= N(\beta) \\ \nu(\beta + 1) &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta + 1) - x}} + \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta + 1) + x}} \right\}, \end{aligned} \right.$$

ist. Man erhält weiter, wenn:

$$P_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^i \cos x \, dx,$$

gesetzt wird:

$$(8) \quad \nu(\beta + 1) = \frac{P_0}{\sqrt{\pi(\beta + 1)}} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{P_2}{\sqrt{\pi(\beta + 1)^3}} + \dots$$

Es bleibt jetzt nur übrig, zu zeigen, wie die Coëfficienten  $P_i$  und  $Q_i$  am zweckmässigsten berechnet werden. Man hat, wie sofort ersichtlich:

$$(9) \quad \begin{cases} Q_i = i \cdot P_{i-1} \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^i = i(i-1) P_{i-2} + P_i \quad (i = 1, 2, 3 \dots) \end{cases}$$

Sobald die  $P_i$  bekannt sind, erhält man die  $Q_i$  aus der ersten Gleichung unmittelbar. Zur Berechnung der  $P_i$  leitet man aus der zweiten Gleichung folgende Relation her:

$$\frac{P_i + i(i-1) P_{i-2}}{P_{i+2} + (i+1)(i+2) P_i} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Setzt man jetzt in bekannter Weise:

$$p_i = \frac{P_i}{P_{i-2}}, \quad \text{so erhält man:} \quad p_i = \frac{\frac{\lambda_i}{\mu_i}}{1 + p_{i+2} \cdot \frac{1}{\mu_i}},$$

$$\text{wo:} \quad \lambda_i = i(i-1) \frac{\pi^2}{4} \quad \text{und} \quad \mu_i = (i+1)(i+2) - \frac{\pi^2}{4}$$

bedeuten. Mit Hülfe von diesen Formeln werden die  $p_i$  leicht und sicher berechnet, indem man mit einem hinreichend grossen  $i$  anfängt, etwa mit  $i = 20$ , und  $p_{20} = \lambda_{20}$  annimmt. Nachdem die  $p_i$  berechnet worden sind, so hat man, da  $P_0 = 1$ :

$$P_2 = p_2; \quad P_4 = p_2 p_4; \quad P_6 = p_2 p_4 p_6 \text{ u. s. w.}$$

In dieser Weise habe ich erhalten:

$\log P_2 = 9,669\,689\,7-10$	$\log Q_3 = 0,146\,811\,0$
$\log P_4 = 9,680\,566\,5-10$	$\log Q_5 = 0,379\,536\,5$
$\log P_6 = 9,808\,923\,8-10$	$\log Q_7 = 0,654\,021\,8$
$\log P_8 = 9,998\,872\,3-10$	$\log Q_9 = 0,953\,114\,8$
$\log P_{10} = 0,226\,997\,2$	$\log Q_{11} = 1,268\,389\,9$
$\log P_{12} = 0,481\,16$	$\log Q_{13} = 1,595\,10$
$\log P_{14} = 0,754\,22$	$\log Q_{15} = 1,930\,31$
$\log P_{16} = 1,041\,63$	$\log Q_{17} = 2,272\,04.$

Die oben benutzten Recursionsformeln zeigen, dass das Verhältniss zweier aufeinander folgender  $P$  und  $Q$  sich dem Werthe  $\pi^2/4$  nähert. Es folgt hieraus, dass die Reihen (6) und (8) schneller convergiren als eine geometrische Reihe mit der Rationszahl  $1/4(\beta + 1)^2$ . Ich gebe hier die numerischen Werthe der Coëfficienten dieser Reihen, wobei ich so viele Glieder berücksichtige, als zur Bestimmung von sieben Decimalstellen nöthig sind. Sobald  $\beta$  nicht gar zu klein ist, sieht man, dass die Zahl der hierzu erforderlichen Glieder bedeutend reducirt wird. Es wird, indem der Kürze wegen  $y$  für  $(1 + \beta)^{\frac{1}{2}}$  geschrieben wird:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mu(y^2) = 0,089\,793\,6 \cdot y^{-3} + & \nu(y^2) = 0,564\,189\,6 \cdot y^{-1} + \\ & + 0,007\,973\,3 \cdot y^{-7} + \\ & + 0,001\,087\,2 \cdot y^{-11} + \\ & + 0,000\,176\,4 \cdot y^{-15} + \\ & + 0,000\,031\,5 \cdot y^{-19} + \\ & + 0,000\,006\,0 \cdot y^{-23} + \\ & + 0,000\,001\,2 \cdot y^{-27} + \\ & + 0,000\,000\,2 \cdot y^{-31} + \\ & + 0,000\,000\,1 \cdot y^{-35} + \\ & + \dots \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} + 0,010\,019\,1 \cdot y^{-5} + \\ + 0,000\,759\,0 \cdot y^{-9} + \\ + 0,000\,085\,3 \cdot y^{-13} + \\ + 0,000\,011\,6 \cdot y^{-17} + \\ + 0,000\,001\,8 \cdot y^{-21} + \\ + 0,000\,000\,3 \cdot y^{-25} + \\ + 0,000\,000\,1 \cdot y^{-29} + \\ + \dots \end{array}$$

Die Bequemlichkeit dieser Formeln leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass  $y$  immer grösser als Eins, und nur in wenigen Fällen nahezu gleich Eins ist.

Wenn  $\beta$  sehr gross wird, kann man  $M(\beta + 1)$  und  $N(\beta + 1)$  direct berechnen. Führt man diese Berechnung für  $\beta$ -Werthe zwischen  $\beta$  und  $\beta + 1$  aus, so zeigen die Formeln (5) und (7), dass man, um alle anderen Werthe von  $M(\beta)$  und  $N(\beta)$  zu erhalten, nur die Functionen  $\mu(\beta + 1)$  und  $\nu(\beta + 1)$  zu ermitteln hat, was nach den zuletzt gegebenen numerischen Entwicklungen sehr bequem geschehen kann.

Durch theilweise Integration leitet man leicht die folgenden bekannten Gleichungen her:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(u) = \frac{1}{4u^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4^3 u^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4^5 u^{11}} - \dots \\ N(u) = \frac{1}{2u} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot u^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4^2 \cdot u^5} - \dots \end{array} \right.$$

Diese Reihen convergiren allerdings nicht, aber man kann beweisen, dass der Fehler, der dadurch begangen wird,



dass eine gewisse Anzahl von Gliedern berücksichtigt wird, immer kleiner sein muss als der Betrag des darauf folgenden nächsten Gliedes. Wenn  $u$  gross ist, gewähren deshalb diese Formeln grossen Nutzen.

Bei der Berechnung der folgenden Tafel der Functionen  $M(u)$  und  $N(u)$  bin ich demgemäss, da meine Absicht war, alles siebenstellig zu rechnen, um darauf durch Abkürzung die 6. Decimalstelle sicher zu erhalten, von  $\beta = 8$  ausgegangen, indem ich für die Werthe  $\beta = 8,0, 8,1, 8,2 \dots 8,9$  die Functionen:

$$\begin{aligned} M(\beta) &= M\left(\sqrt{\pi\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}\right) \\ N(\beta) &= N\left(\sqrt{\pi\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}\right) \end{aligned} \quad (\text{Vgl. 4 und 7}_a)$$

nach den Formeln (11) unter Berücksichtigung dreier Glieder berechnet habe. Der Werth  $\beta = 8$  gibt für  $u$  in (11) den Werth  $u = \sqrt{(17/2)\pi} = 5,17$  und für diesen  $u$ -Werth machen sich die 4. Glieder erst in der 8. Decimale merkbar. Hierauf sind für alle zwischen 0 und 8 liegenden Werthe von  $\beta$  nach (10) die Functionen  $\mu(1 + \beta)$  und  $\nu(1 + \beta)$  berechnet, worauf nach (5) und (7) sich die Werthe von  $M(\beta)$  und  $N(\beta)$ , d. h. von  $M\left(\sqrt{\pi\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}\right)$  und  $N\left(\sqrt{\pi\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}\right)$  successive ergeben.

Obwohl Tafeln für die numerischen Werthe der Fresnel'schen Integrale sowohl als auch der Functionen  $M(u)$  und  $N(u)$  schon in mehreren Werken vorkommen, halte ich es doch nicht für überflüssig, die folgenden Tafeln zu veröffentlichen. Theils sind Tafeln in dieser Ausdehnung wohl nicht vorhanden, theils ist hier das Argument ein anderes als das gewöhnliche. Es verdient noch darauf hingewiesen zu werden, dass die hier benutzte Form des Arguments auch bei der theoretischen Behandlung hierher gehöriger physikalischer Fragen nicht ohne Vorzug ist, was aber hier nicht gezeigt werden soll.

Was die Ausdehnung der folgenden Tafel betrifft, so habe ich mich auf das Intervall:  $\beta = 0$  bis  $\beta = 8,9$  beschränkt, theils, weil diese Werthe am häufigsten gebraucht werden, theils weil die anderen Werthe sich sehr schnell und genau mit Hülfe der Gleichungen (1) und (11) berechnen lassen.

M(u)

0,077 381

0,064 375

0,054 608

0,047 048

0,041 055

0,036 210

0,032 230

0,028 914

0,026 115

0,023 731

0,021 680

0,019 911

0,018 360

0,017 000

0,015 790

0,014 720

0,013 760

0,012 900

0,012 120

0,011 420

0,010 780

0,010 200

0,009 670

0,009 130

0,008 730

0,008 320

0,007 900

0,007 500

0,007 200

0,006 900

0,006 600

0,006 400

0,006 100

0,005 900

0,005 600

0,005 400

0,005 200

0,005 100

0,004 900

0,004 700

0,004 500

0,004 300

0,004 100

0,004 000

$$u = V(\beta + \frac{1}{2})\pi.$$

$M(u)$	Diff.	$N(u)$	Diff.	$\beta$	$M(u)$	Diff.	$N(u)$	Diff.
0,077 881	-13006	0,350 794	-22161	4,5	0,003 958	-114	0,125 786	-1226
0,064 375	-9767	0,328 631	-18621	4,6	0,003 844	-108	0,124 560	-1190
0,054 608	-7560	0,310 010	-15920	4,7	0,003 736	-103	0,123 370	-1158
0,047 048	-5993	0,294 090	-13805	4,8	0,003 633	-99	0,122 212	-1125
0,041 055	-4845	0,280 285	-12111	4,9	0,003 534	-95	0,121 087	-1095
0,036 210	-3980	0,268 174	-10731	5,0	0,003 439	-90	0,119 992	-1066
0,032 230	-3316	0,257 443	-9589	5,1	0,003 349	-87	0,118 926	-1039
0,028 914	-2795	0,247 854	-8632	5,2	0,003 262	-83	0,117 887	-1012
0,026 119	-2382	0,239 222	-7822	5,3	0,003 179	-79	0,116 875	-986
0,023 737	-2048	0,231 400	-7127	5,4	0,003 100	-76	0,115 889	-962
0,021 689	-1775	0,224 273	-6529	5,5	0,003 024	-73	0,114 927	-938
0,019 914	-1551	0,217 744	-6007	5,6	0,002 951	-70	0,113 989	-916
0,018 363	-1363	0,211 737	-5550	5,7	0,002 881	-68	0,113 073	-896
0,017 000	-1206	0,206 187	-5147	5,8	0,002 813	-65	0,112 179	-874
0,015 794	-1072	0,201 040	-4791	5,9	0,002 748	-62	0,111 305	-853
0,014 722	-958	0,196 249	-4471	6,0	0,002 686	-60	0,110 452	-835
0,013 764	-860	0,191 778	-4187	6,1	0,002 626	-58	0,109 617	-815
0,012 904	-776	0,187 591	-3930	6,2	0,002 568	-56	0,108 802	-798
0,012 128	-702	0,183 661	-3698	6,3	0,002 512	-54	0,108 004	-781
0,011 426	-638	0,179 963	-3488	6,4	0,002 458	-52	0,107 223	-764
0,010 788	-582	0,176 475	-3296	6,5	0,002 406	-50	0,106 459	-748
0,010 206	-531	0,173 179	-3122	6,6	0,002 356	-49	0,105 711	-732
0,009 675	-488	0,170 057	-2961	6,7	0,002 307	-46	0,104 979	-717
0,009 187	-449	0,167 096	-2815	6,8	0,002 261	-46	0,104 262	-704
0,008 738	-414	0,164 281	-2679	6,9	0,002 215	-43	0,103 558	-689
0,008 324	-382	0,161 602	-2554	7,0	0,002 172	-43	0,102 869	-675
0,007 942	-355	0,159 048	-2439	7,1	0,002 129	-41	0,102 194	-662
0,007 587	-329	0,156 609	-2331	7,2	0,002 088	-40	0,101 532	-650
0,007 258	-306	0,154 278	-2232	7,3	0,002 048	-38	0,100 882	-638
0,006 952	-286	0,152 046	-2138	7,4	0,002 010	-37	0,100 244	-625
0,006 666	-266	0,149 908	-2052	7,5	0,001 973	-36	0,099 619	-614
0,006 400	-250	0,147 856	-1971	7,6	0,001 937	-35	0,099 005	-603
0,006 150	-234	0,145 885	-1894	7,7	0,001 902	-35	0,098 402	-592
0,005 916	-220	0,143 991	-1824	7,8	0,001 867	-32	0,097 810	-581
0,005 696	-206	0,142 167	-1757	7,9	0,001 835	-33	0,097 229	-572
0,005 490	-194	0,140 410	-1694	8,0	0,001 802	-31	0,096 657	-561
0,005 296	-184	0,138 716	-1634	8,1	0,001 771	-30	0,096 096	-552
0,005 112	-173	0,137 082	-1579	8,2	0,001 741	-29	0,095 544	-542
0,004 939	-163	0,135 503	-1526	8,3	0,001 712	-29	0,095 002	-533
0,004 776	-155	0,133 977	-1476	8,4	0,001 683	-28	0,094 469	-525
0,004 621	-147	0,132 501	-1428	8,5	0,001 655	-27	0,093 944	-515
0,004 474	-139	0,131 073	-1384	8,6	0,001 628	-26	0,093 429	-508
0,004 335	-132	0,129 689	-1341	8,7	0,001 602	-26	0,092 921	-499
0,004 203	-125	0,128 348	-1300	8,8	0,001 576	-25	0,092 422	-491
0,004 078	-120	0,127 048	-1262	8,9	0,001 551		0,091 931	

Dorpat, im August 1882.

## XII. Ueber die Theorie der elastischen Nachwirkung; von G. J. Michaëlis.

Hr. Warburg hat das Gleichgewicht eines Systems beliebig gestalteter, gleicher, starrer Molecüle untersucht, deren Schwerpunkte im natürlichen Zustande des Systems gleichförmig angeordnet sind. Er hat die Spannungen berechnet für den Fall, dass die Deformation gegeben ist, welche das System erfahren hat, und Resultate gewonnen, welche eine qualitative Erklärung der elastischen Nachwirkung enthalten.<sup>1)</sup>

Es sei mir gestattet, mitzutheilen, wie verschiedene, von Hrn. Braun beobachtete Erscheinungen<sup>2)</sup> aus dieser Theorie abgeleitet werden können, aber auch wie dieselbe durch eine Nebenannahme besser mit der Erfahrung im Einklang zu bringen ist.

Nach den Untersuchungen des Hrn. Warburg würden die Molecüle nur im Gleichgewichte sein, wenn ihre Hauptträgheitsachsen die Richtungen der Haupttaxen des Elasticitätsellipsoids hätten. Das Drehungsmoment, welches ein Molecül in die Gleichgewichtslage zu versetzen erstrebt ist, wäre der Grösse der Deformation direct proportional, diese Lage selbst jedoch wäre nur von dem Verhältniss der Zahlen  $u_x$ ,  $u_y$  u. s. w. abhängig.

Bei den sorgfältigen Beobachtungen aber, welche Hr. F. Kohlrausch<sup>3)</sup>, über die elastische Nachwirkung angestellt hat, ergab sich, dass *ceteris paribus* die Intensität der Nachwirkung immer der Verschiebung nahezu proportional war. Bei einer constanten Deformation näherten sich die dazu gebotenen Kräfte allmählich einem gewissen Grenzwerte. Nach Aufhebung der äusseren Kräfte gelangte der Körper wieder langsam in seine natürliche Lage zurück; die nämliche empirische Formel stellte in beiden Fällen den Verlauf der Erscheinung dar.

Ist also wirklich die Ursache der Nachwirkung der Drehung der Molecüle zuzuschreiben, so müssen auch Kräfte vorausgesetzt werden, welche die Molecüle in ihre ursprüngliche Richtungen zurückzutreiben versuchen.

Solche zurücktreibende Kräfte wollen wir in der Rechnung benutzen, ohne auf Betrachtungen über die Entstehungsweise einzugehen. Nur weisen wir darauf hin, dass

1) Warburg, Wied. Annalen 4. p. 232–249. 1878.

2) Braun, Pogg. Ann. 159. p. 337–389. 1876.

3) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 119. p. 337. 1863. 128. p. 1. 1866. 158. p. 337. 1876.

auch  
netism  
ihrer  
gefühl  
selben  
indem  
aber s  
vom r  
liche

V  
das b  
nächs  
die H  
der A  
I  
dinat  
heits

(1) f

wo m  
wir  
stabe  
vork  
Mole  
beim  
dem  
Schw  
die  
nate

(2)

$\bar{x}_y =$   
han  
schw  
wir  
auc

p. 8

auch Hr. W. Weber in seiner Theorie des inducirten Magnetismus ähnliche Kräfte, welche die Molecularmagnete in ihrer natürlichen Richtung festzuhalten erstrebt sind, eingeführt hat, und dass Hr. Chwolson eine Erklärung derselben gegeben hat.<sup>1)</sup> Wohl ist der Fall hier ein anderer, indem die Schwerpunkte der Molecüle verschoben werden, aber stellen wir uns die Deformation vor als unendlich wenig vom natürlichen Zustande verschieden, so sind vielleicht ähnliche Betrachtungen auch hier gültig.

Wenden wir jetzt die Theorie des Hrn. Warburg auf das bekannte Problem von St. Venant an, indem wir zunächst annehmen, dass in der stabilen Gleichgewichtslage, die Hauptträgheitsaxen der Molecüle wirklich die Richtungen der Axen des Elasticitätsellipsoids haben.

Durch den Schwerpunkt jedes Molecüls werde ein Coordinatensystem  $(x_1, y_1, z_1)$  gelegt, deren Axen die Hauptträgheitsaxen sind.

Es werde geschrieben:

$$(1) \int x_1^2 dm = \kappa^2 m; \quad \int y_1^2 dm = \lambda^2 m; \quad \int z_1^2 dm = \mu^2 m;$$

wo  $m$  die Masse des Molecüls bedeutet. Ferner bezeichnen wir die verschiedenen Grössen mit den nämlichen Buchstaben, welche in der genannten Abhandlung von Warburg vorkommen. Wir setzen voraus, dass die Schwerpunkte der Molecüle eines Cylinders die Verschiebungen erfahren, die beim St. Venant'schen Problem gefunden werden.<sup>2)</sup> Von dem im Körper festen Coordinatensystem sei die  $z$ -Axe die Schwerpunktslinie des Cylinders, die  $x$ - und  $y$ -Axen seien die Hauptaxen der festgelegten Endfläche. Zum Coordinatenübergang habe man die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} x = x_0 + a x_1 + b y_1 + c z_1 \\ y = y_0 + a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 \\ z = z_0 + a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 \end{cases}$$

Indem  $u_y + v_x = 0$  ist, verschwinden die Spannungen  $\mathfrak{X}_y = \mathfrak{Y}_x$ , wie aus den Gleichungen (4) und (11) in der Abhandlung des Hrn. Warburg folgt;  $\mathfrak{X}_x$  und  $\mathfrak{Y}_y$  aber verschwinden nicht, es müssen daher auf die Mantelfläche Kräfte wirken, wenn die Deformation bestehen bleiben soll, was auch in der citirten Abhandlung mitgetheilt ist.

Will man die Spannungen berechnen, so müssen in jedem

1) Chwolson, Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 53. 1876.

2) Siehe z. B. Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper p. 85. 1862.

Punkte des Körpers die Richtungen der Axen des Elasticitätsellipsoids bekannt sein. Das Ellipsoid reducirt sich hier auf eine Ellipse. Die Normale der Ebene dieser Ellipse ist senkrecht auf die  $z$ -Axe; der Winkel, welcher dieselbe mit der  $x$ -Axe bildet, wird bestimmt durch die Gleichung:

$$(3) \quad \operatorname{tg} p = -\frac{X_z}{Y_z}.$$

Die Hauptspannungen wollen wir mit  $T_1$  und  $T_2$  bezeichnen; dieselben liegen in der Ebene der Ellipse und nehmen die Werthe an:

$$(4) \quad T_1 = \frac{Z_z}{2} + \sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + \frac{Z_z^2}{4}}, \quad T_2 = \frac{Z_z}{2} - \sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + \frac{Z_z^2}{4}}.$$

Die Cosinus der Winkel zwischen den Richtungen der Hauptspannungen und der Coordinatenaxen sind durch die Formeln gegeben:

$$(5) \quad \begin{cases} \cos p' = \frac{X_z}{\sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + T^2}}, & \cos q' = \frac{Y_z}{\sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + T^2}}, \\ \cos r' = \frac{T}{\sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + T^2}}, \end{cases}$$

wenn man darin  $T_1$  und  $T_2$  nacheinander an Stelle von  $T$  setzt.<sup>1)</sup>

Wir nehmen zuerst an, dass:

(6)  $u = -Fax + \beta_0 yz$ ,  $v = -Fay - \beta_0 xz$ ,  $w = az$ , wo statt der Buchstaben  $\mu$ ,  $a$  und  $b_0$  im citirten Werke von Clebsch,  $F$ ,  $\alpha$  und  $\beta_0$  geschrieben ist. Diese Gleichungen werden erhalten, wenn der Querschnitt ein Kreis ist, und die Constanten, welche sich auf die Biegung beziehen, verschwinden. Man findet demnach:

$$(7) \quad X_x = Y_y = 0; \quad Z_x = E\alpha; \quad X_z = \frac{E\beta_0}{2(1+F)}y; \quad Y_z = -\frac{E\beta_0}{2(1+F)}x.$$

$E$  ist der Elasticitätsmodul.

Aus (3) folgt:  $\operatorname{tg} p = \frac{y}{x}$ .

Setzt man voraus:  $x^2 > \lambda^2 > \mu^2$ ,

so wird  $b_2 = 0$ , wenn die Molecüle in der stabilen Gleichgewichtslage gedreht sind, indem die  $y_1$ -Axe jedes Theilchens senkrecht auf die Cylinderaxe gerichtet ist. Ferner wird  $y/r = b_1$  und  $x/r = b$ , wenn  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  gesetzt ist.

1) Clebsch, l. c. p. 130.

Die Druckcomponenten, welche von den Richtungen der Molecüle bedingt sind, werden daher:

$$(8) \quad \begin{cases} Z_s = -nN_0 + nf^2(x^2a_2^2 + \mu^2c_2^2), \\ X_s = nf^2(x^2aa_2 + \mu^2cc_2), \\ Y_s = nf^2(x^2a_1a_2 + \mu^2c_1c_2), \end{cases}$$

wo  $N_0$  und  $f^2$  constante Grössen sind, und  $n$  die Zahl der Molecüle in der Raumeinheit bedeutet. Aus den Druckcomponenten  $X_s$  und  $Y_s$  ergibt sich bekanntlich in der freien Endfläche des Cylinders ein Drehungsmoment:

$$(9) \quad M_s = \frac{E\beta_0}{4(1+F)} \pi R^4,$$

wenn  $R$  den Radius des Querschnitts vorstellt. Die Componenten  $X_s$  und  $Y_s$  ergeben das Moment:

$$M'_s = \int (X_s y - Y_s x) dq = f^2 n x^2 \int \left\{ a_2 r (ab_1 - a_1 b) \right\} dq \\ + f^2 n \mu^2 \int \left\{ c_2 r (cb_1 - c_1 b) \right\} dq.$$

Es ist  $dq$  das Flächenelement, und da  $ab_1 - a_1 b = c_2$  und  $cb_1 - c_1 b = -a_2$  ist, so findet man:

$$(10) \quad M'_s = f^2 n (x^2 - \mu^2) \int a_2 c_2 r dq.$$

In der stabilen Gleichgewichtslage der Molecüle sind die Cosinus  $a_2$  und  $c_2$  aus den Gleichungen (5) zu berechnen; daher ist:

$$a_2 c_2 = \frac{T_1 T_2}{V(X_s^2 + Y_s^2 + T_1^2)(X_s^2 + Y_s^2 + T_2^2)},$$

oder, wenn die Werthe von  $T_1$  und  $T_2$  aus (4) eingeführt werden:

$$a_2 c_2 = -\sqrt{\frac{X_s^2 + Y_s^2}{4(X_s^2 + Y_s^2) + Z_s^2}},$$

Substituirt man jetzt  $X_s$  und  $Y_s$  aus (7), so findet die Gleichung statt:

$$(11) \quad M'_s = -\frac{f^2 n (x^2 - \mu^2) \beta_0}{2(1+F)} \int \left\{ \sqrt{\frac{1}{\frac{\beta_0^2}{(1+F)^2} r^2 + a^2}} \right\} r^2 dq.$$

Die Integration ist leicht auszuführen, aber aus der Formel (11) ersieht man sofort, dass  $M'_s$  ein Maximum ist, wenn die Torsion nicht von einer Verschiebung nach der Cylinderaxe begleitet ist, also wenn  $\alpha$  verschwindet. Auch ist ersichtlich, dass das Zeichen von  $\alpha$  auf die Grösse des Moments ohne Einfluss ist.

Es hat sich bei den Versuchen von Hrn. Braun<sup>1)</sup> herausgestellt, dass eine schon bestehende Torsionsnachwirkung durch eine elastische Verschiebung nach der Cylinderaxe stets verkleinert wird, mag dieselbe eine Verlängerung oder Verkürzung sein. Diese Beobachtung wird durch die Theorie vollkommen erklärt, wenn man annimmt, dass die Torsion und die Längsspannung nicht gleichzeitig, sondern kurz nacheinander eintreten, was nach der Theorie für die Gleichgewichtslage der Molecüle gleichgültig ist.

Der Beobachtung jedoch des Hrn. Braun, dass eine Längsverschiebung, die gleichzeitig mit der Torsion stattfindet, eine Vergrößerung der Torsionsnachwirkung hervorbringt, widerspricht die mitgetheilte Theorie. Es wurde indess vorausgesetzt, die Molecüle könnten sich ohne Widerstand um ihre Schwerpunkte drehen. Ein solcher Widerstand gegen Verdrehungen ist aber aus vielen Erscheinungen abzuleiten; alle Einflüsse, durch welche die Molecüle beweglicher werden, verringern diesen Widerstand, und nach Hrn. G. Wiedemann ist die Beobachtung des Hrn. Braun eine Folge dieser sog. „Erschütterungswirkungen“.<sup>2)</sup>

Betrachten wir jetzt die Biegung in der  $xz$ -Ebene und setzen demnach:

$$(12) \quad \begin{cases} X_z = \frac{E\beta_1}{2(1+F)} \left[ -\frac{Fx^2 - (2-F)y^2}{2} + \frac{\partial P}{\partial x} \right] \\ Y_z = \frac{E\beta_1}{2(1+F)} \left[ - (F+2)xy + \frac{\partial P}{\partial y} \right] \\ Z_x = Ex(\alpha_1 + \beta_1 z); \end{cases}$$

$\alpha$  und  $\beta$  sind willkürliche Constanten,  $P$  ist eine Function, welche von der Querschnittsform bedingt ist. Der Querschnitt habe eine Gestalt, welche gegen die Hauptaxen symmetrisch ist; demgemäss ist  $P$  eine ungerade Function für  $x$  und eine gerade Function für  $y$ . Es wird daher  $X_z$  gerade für  $x$  und  $y$ ,  $Y_z$  ungerade für beide. Die Gleichungen (8) gelten auch hier. Die Kraft und das Drehungsmoment, die auf die freie Endfläche des Cylinders angreifen müssen, um die Deformation bestehen bleiben zu lassen, können daraus berechnet werden. Aus den Formeln (5) folgt, dass wenn die Molecüle in die Gleichgewichtslage versetzt sind,  $a$  und  $c$ ,  $a_2$  und  $c_2$  gerade Functionen für  $y$ , dagegen  $a_1$  und  $c_1$  ungerade für  $y$  sind. Hieraus findet man, wenn die Componenten der auf der freien Endfläche wirkenden Kraft  $X$ ,

1) Braun, Pogg. Ann. 159. p. 374. 1876.

2) G. Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 509. 1879.



$Y$ ,  $Z$  genannt werden, dass  $Y = \int \mathfrak{Y}_z dq = 0$  ist. Dagegen können  $X = \int \mathfrak{X}_z dq$  und  $Z = \int \mathfrak{Z}_z dq$  nicht verschwinden. Es seien ferner  $M'_x$ ,  $M'_y$  und  $M'_z$  die Componenten des Drehungsmomentes. Dann ist:

$$M'_x = \int (\mathfrak{Y}_z l - \mathfrak{Z}_z y) dq = 0.$$

Es bezeichnet  $l$  die Länge des Cylinders. Das Integral verschwindet, denn  $\mathfrak{Y}_z l$  und  $\mathfrak{Z}_z y$  sind ungerade für  $y$ .

$$M'_y = \int (\mathfrak{Z}_z x - \mathfrak{X}_z l) dq \text{ verschwindet nicht.}$$

$$M'_z = \int (\mathfrak{X}_z y - \mathfrak{Y}_z x) dq = 0.$$

Diese Untersuchung lehrt, dass eine Biegung in einer Hauptebene keine Biegungsnachwirkung in der anderen Hauptebene hervorbringt, ein Resultat, dass auch Hr. Braun bei seinen Experimenten erhalten hat. Die Biegung hat ebensovienig eine Torsionsnachwirkung im Gefolge, wohl aber eine Nachwirkung nach der Axe des Cylinders. Dass eine Nachwirkung in einer Hauptebene durch eine Nachwirkung in der anderen Hauptebene geändert werden muss, ist aus den obigen Formeln leicht zu übersehen.

Werden die Querdimensionen des Cylinders als unendlich klein gegen ihre Länge betrachtet, so kann man in (12)  $X_z$  und  $Y_z$  gegen  $Z_z$  verschwinden lassen. Bei der Combination der Torsionsverschiebung, welche in den Gleichungen (6) defnirt wurde, und einer Biegung, findet man demnach die Gleichung (10) wieder. Allerdings ist dieselbe hier nicht so leicht wie dort zu integriren. In jedem Punkte ist jedoch  $a_z c_z$  dem absoluten Werthe nach ein Maximum, wenn diese Cosinus einander entgegengesetzt gleich werden, also bei der reinen Torsion. Die Torsionsnachwirkung wird daher auch durch die Biegung verringert, ein mit den Versuchen des Hrn. Braun übereinstimmendes Resultat.

Wir wollen jetzt den Einfluss einer zurückführenden Kraft bei der Dehnung und der Torsion untersuchen. Ist  $p$  die Ablenkung der  $x$ -Axe eines Molecüls aus der ursprünglichen Richtung, so kann das Drehungsmoment, das die Axe in die alte Lage zurückzudrängen bestrebt ist, gleich  $Q \sin p$  gesetzt werden. Wir nehmen an, es sei  $Q$  während der Bewegung constant, was bei unendlich kleinen Ablenkungen nahezu richtig sein soll.

Lässt man in einem Punkte des Cylinders das Coordinatensystem  $(x, y, z)$  mit den Hauptaxen des Elasticitätsellipsoids zusammenfallen, so leitet man aus der schon mehrmals citirten Abhandlung Warburgs (p. 237) leicht nach-

stehende Componenten des Drehungsmomentes nach den  $x_1$ ,  $y_1$  und  $z_1$  des betreffenden Molecüles ab:

$$(13) \quad \begin{cases} K_1 = 2f^2(\mu^2 - \lambda^2)(bcu_x + b_1c_1v_y + b_2c_2w_z) \\ K_2 = 2f^2(x^2 - \mu^2)(acu_x + a_1c_1v_y + a_2c_2w_z) \\ K_3 = 2f^2(\lambda^2 - x^2)(abu_x + a_1b_1v_y + a_2b_2w_z) \end{cases}$$

Wir setzen noch voraus, dass zwei Trägheitsmomente der Molecüle einander gleich seien, z. B.  $\lambda^2 = \mu^2$ . Zuerst betrachten wir eine Längsverschiebung nach der Axe des Cylinders; demgemäss schreiben wir:

$$u_x = -Fa, \quad v_y = -Fa, \quad w_z = a.$$

Hiernach ergibt sich für das Drehungsmoment, das wir durch  $K$  bezeichnen, der Ausdruck:

$$K = 2f^2(x^2 - \lambda^2)\alpha(1 + F)a_2\sqrt{1 - a_2^2},$$

oder auch, indem  $a_2$  der Cosinus des Winkels  $\varphi$  ist, den die  $x_1$ -Axe des Molecüls mit der  $z$ -Axe bildet:

$$K = f^2\alpha(x^2 - \lambda^2)(1 + F)\sin 2\varphi.$$

Setzt man noch den Coëfficienten von  $\sin 2\varphi = A$ , so findet in der Gleichgewichtslage die Gleichung statt:

$$(14) \quad A \sin 2\varphi = Q \sin p.$$

Es sei  $\varphi_1$  die Grösse des Winkels  $\varphi$  in der natürlichen Lage des Molecüls, dann ergibt sich:

$$A \sin 2\varphi = Q \sin(\varphi_1 - \varphi). \quad \text{Hieraus:}$$

$$\cos \varphi_1 = -\frac{2A}{Q} \sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{4A^2}{Q^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}.$$

Wir wollen die Beschränkung machen, dass  $A/Q$  eine sehr kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Dann ist:

$$(15) \quad \cos \varphi_1 = -\frac{2A}{Q} \sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos \varphi.$$

Alle Molecüle, deren  $x_1$ -Axen ursprünglich zwischen den Winkeln  $\varphi_1$  und  $\varphi_1 + d\varphi_1$  mit der  $z$ -Axe enthalten sind, bilden nach der Deformation mit dieser Axe Winkel, welche zwischen  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  liegen. Die Zahl dieser Molecüle ist:  $n/2 \cdot \sin \varphi_1 d\varphi_1$  oder  $-n/2 \cdot d(\cos \varphi_1)$ .

Daraus, und aus den Gleichungen (8), geht hervor, dass die Druckcomponenten nach der  $z$ -Axe, welche von der Richtung der Molecüle abhängig ist, den Werth erhält:

$$3_z = -nN_0 - \frac{f^2}{2}n \int_1^{-1} \{ (x^2 - \lambda^2) \cos^2 \varphi + \lambda^2 \} d \cos \varphi_1.$$

Substituirt man den Werth von  $d \cos \varphi_1$ , der aus (15) zu ermitteln ist, und integrirt man, so ergibt sich:

$$(16) \quad \mathcal{B}_z = -nN_0 + \frac{1}{3}f^2n(x^2 + 2\lambda^2) + \frac{8}{15}f^2n(x^2 - \lambda^2)\frac{A}{Q}.$$

In der natürlichen Lage der Molecüle ist:

$$\mathcal{B}_z^0 = -nN_0 + \frac{1}{3}f^2n(x^2 + 2\lambda^2)$$

Es muss also, wenn die Molecüle aus der natürlichen in die stabile Gleichgewichtslage übergehen, die Zugkraft  $Z_z$  nachlassen, und die ganze Aenderung dieser Kraft ist:

$$(17) \quad \mathcal{B}_z - \mathcal{B}_z^0 = \frac{8}{15}f^2n(x^2 - \lambda^2)\frac{A}{Q} = \frac{8}{15}f^4(x^2 - \lambda^2)^2n\frac{Z_z(1+F)}{EQ}.$$

Betrachten wir noch die Torsion des Cylinders. Die Hauptspannungen  $T_1$  und  $T_2$  werden einander gleich mit dem entgegengesetzten Zeichen. Berücksichtigt man die Gleichungen (7) und (4) so findet man:

$$T_1 = \frac{E\beta_0}{2(1+F)}r, \quad T_2 = -\frac{E\beta_0}{2(1+F)}r.$$

Lässt man die  $x$ - und  $z$ -Aren mit den Richtungen dieser Spannungen zusammenfallen, so erhält man:

$$u_x = \frac{1}{2}\beta_0r, \quad w_z = -\frac{1}{2}\beta_0r, \quad v_y = 0.$$

Die Componenten des Drehungsmomentes nach den  $y_1$ - und  $z_1$ -Aren eines Molecüls werden demnach:

$$K_2 = f^2(x^2 - \lambda^2)\beta_0r(ac - a_2c_2)$$

$$K_3 = f^2(\lambda^2 - x^2)\beta_0r(ab - a_2b_2).$$

Daraus ergibt sich ein Drehungsmoment in der Ebene, die durch die  $x_1$ - und  $x$ -Axe gelegt werden kann:

$$K'_2 = \frac{1}{2}f^2(x^2 - \lambda^2)\beta_0r \sin 2(x_1x) = B \sin 2(x_1x).$$

Man findet ebenfalls ein Moment in der  $(x_1z)$  Ebene:

$$K'_3 = \frac{1}{2}f^2(\lambda^2 - x^2)\beta_0r \sin 2(x_1z) = -B \sin 2(x_1z).$$

Die  $x_1$ -Axe bewegt sich in diesen beiden Ebenen zugleich. In der Gleichgewichtslage des Molecüls finden offenbar die Bedingungsbedingungen statt:

$$B \sin 2(x_1x) = Q \sin p_1 \quad \text{und} \quad -B \sin 2(x_1z) = Q \sin p_2,$$

wo  $p_1$  und  $p_2$  die Ablenkungen aus der natürlichen Lage in den betreffenden Ebenen bezeichnen.

Aus diesen Gleichungen können wieder die Druckcomponenten wie oben aus (14) abgeleitet werden. Es ist daher:

$$\mathcal{X}_x = -nN_0 + \frac{1}{3}f^2n(x^2 + 2\lambda^2) + \frac{8}{15}nf^2(x^2 - \lambda^2)\frac{B}{Q}, \quad \text{und:}$$

$$\mathcal{B}_z = -nN_0 + \frac{1}{3}f^2n(x^2 + 2\lambda^2) - \frac{8}{15}nf^2(x^2 - \lambda^2)\frac{B}{Q}.$$

Die Druckcomponente senkrecht auf den Radiusvector des betrachteten Punktes erhält den Werth:

$$(\beta_z - \beta_z^0) \cos 45^\circ = \frac{1}{15} n f^4 (x^2 - \lambda^2)^3 \frac{\beta_0 r}{Q} \sqrt{2}.$$

Mithin ist das im freien Querschnitt von der Richtung der Molecüle abhängige Drehungsmoment:

$$M_z' = - \frac{1}{15} n f^4 (x^2 - \lambda^2)^3 \frac{\beta_0 r}{Q} \int r^2 dq,$$

oder, wenn die Integration ausgeführt wird, und man  $\beta_0$  aus der Gleichung (9) substituirt:

$$(18) \quad M_z' = - \frac{8}{15} n f^4 (x^2 - \lambda^2)^2 (1 + F) \frac{M_z}{EQ} \sqrt{2}.$$

Die Grösse  $(\beta_z - \beta_z^0)/Z_z$  in der Gleichung (17) ist kleiner als  $M_z'/M_z$  in (18); daraus kann gefolgert werden, dass unter denselben Umständen die Intensität der Nachwirkung bei der Torsion grösser ist, als bei der Dehnung, ein Ergebniss, dass durch die Versuche des Hrn. F. Kohlrausch mit derselben Sorte Kautschuk bestätigt wird.<sup>1)</sup>

Was endlich den Widerstand betrifft, den die Molecüle bei einer Drehung erfahren, so kann derselbe, wie Hr. G. Wiedemann hervorgehoben hat, annähernd durch die bildliche Vorstellung dargestellt werden, die Molecüle seien in einer zähen Masse eingebettet, die sie bei der Einwirkung geringer Kräfte in ihrer Lage festhielt.<sup>2)</sup> Wie man sich diesen Widerstand auch vorstellen möge, so wird derselbe immerhin den Erfolg haben müssen, dass ein Drehungsmoment nur Bewegung hervorbringen kann, wenn dasselbe eine gewisse Grenze überschreitet. Nennt man das Drehungsmoment bei dieser Grenze  $Q_1$ , so geht in dem Gleichgewichtszustand die Gl. (14) über in:

$$(19) \quad A \sin 2\varphi = Q \sin p + Q_1.$$

Wirken die Zugkräfte nicht mehr, so versucht das Drehungsmoment  $Q \sin p$  das Molecül zurückzudrehen; es kann indess nur Bewegung hervorbringen, wenn es grösser ist als  $Q_1$ . Ist jedoch  $Q \sin p < Q_1$ , so ist die Ablenkung der Axe des Molecüls aus der natürlichen Lage permanent. Es sei  $\psi$  der grösste Winkel, den die Axe noch mit der ursprünglichen Richtung bilden kann, ohne zurückbewegt zu werden; daher ist  $\sin \psi = Q_1/Q$ , und aus (19) folgt dann:  $A \sin 2\varphi = 2Q_1$ .

Wenn die Deformation einen solchen kleinen Werth hat, dass  $A$  zwischen  $Q_1$  und  $2Q_1$  enthalten ist, so kann demnach kein einziges Molecül den Grenzwinkel erreichen. Die ganze

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. 158. p. 358. 1876.

2) Wiedemann, Pogg. Ann. 106. p. 190. 1859.

Ablenkung ist dann permanent. Ist aber  $A > 2Q_1$ , so gibt es eine Zahl von Moleculen, welche den Grenzwinkel überschreiten, und welche nach Hebung der Zugkräfte die permanente Ablenkung  $\psi$  behalten. Eine ähnliche Betrachtung hat Hr. Chwolson über den permanenten Magnetismus im Stahle angestellt.<sup>1)</sup>

Die Spannungsänderung bei der Dehnung kann hiernach aus (19) abgeleitet werden.

Werden die zweiten und höheren Potenzen der Grössen  $A/Q$  und  $Q_1/Q$  vernachlässigt, so ist:

$$\cos \varphi_1 = -\frac{2A}{Q} \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{Q_1}{Q} \sin \varphi + \cos \varphi,$$

für alle Werthe von  $\varphi_1$ , die zwischen  $\delta$  und  $90 - \delta$  und auch zwischen  $90 + \delta$  und  $180 - \delta$  enthalten sind, wenn  $\delta$  bestimmt wird aus der Gleichung:  $A \sin 2\delta = Q_1$ . Dagegen ist für alle anderen Werthe:  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi$ .

Es ergibt sich daraus:

$$\beta_z = -nN_0 + \frac{1}{2}f^2n(x^2 + 2\lambda^2) + f^2n \int_{\delta}^{90-\delta} (x^2 - \lambda^2) \cos^2 \varphi \sin \varphi_1 d\varphi_1.$$

Also:

$$\beta_z - \beta_z^0 = -f^2n(x^2 - \lambda^2) \int_{\delta}^{90-\delta} \cos^2 \varphi \left( -\frac{4A}{Q} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{2A}{Q} \sin^3 \varphi + \frac{Q_1}{Q} \cos \varphi \right) d\varphi.$$

Setzt man  $A = 1,1 Q_1$ , so ist  $\delta = 32^\circ 41'$  und:

$$\beta_z - \beta_z^0 = 0,039 f^2 n (x^2 - \lambda^2) \frac{Q_1}{Q}$$

für $A = 1,2 Q_1$	„	= 0,103	„	„	„
„ $A = 1,3 Q_1$	„	= 0,183	„	„	„
„ $A = 1,4 Q_1$	„	= 0,269	„	„	„
„ $A = 1,5 Q_1$	„	= 0,359	„	„	„
„ $A = 2 Q_1$	„	= 0,848	„	„	„

Man sieht hieraus, dass mit der Grösse der Dehnung die Werthe von  $\beta_z - \beta_z^0$ , welche ein Maass sind für die permanente Ablenkung der Moleculé, schnell wachsen.

Falls der Widerstand, also  $Q_1$ , durch die Erschütterungswirkung kleiner wird, so kann dabei die permanente Ablenkung anfänglich wachsen. Es werde z. B. der Körper wiederholt durch die nämliche Kraft gedehnt, und es sei das erste mal  $A = 1,2 Q_1$ , so findet man für die permanente Spannungsänderung:  $0,086 f^2 n (x^2 - \lambda^2) A/Q$ ; ein anderes mal habe  $Q_1$  einen geringeren Werth angenommen, wodurch  $A = 2 Q_1$  geworden ist; dann wird die Aenderung:  $0,424 f^2 n (x^2 - \lambda^2) A/Q$ .

1) Chwolson, Pogg. Ann. Ergzbd. 7. p. 872. 1876.

Die permanente Ablenkung der Molecüle nähert sich dabei einem gewissen Grenzwerte. Dasselbe muss bei der Torsion stattfinden, und es ist von Hrn. G. Wiedemann beobachtet worden. Ein Draht wurde durch aufsteigende Gewichte tordirt; das erste mal erhielt man durch das Gewicht 140 eine permanente Torsion von 245 Theilen einer Scala; nachdem der Draht noch sechzehnmal durch das Gewicht 140 tordirt war, blieb die permanente Torsion stets 372.<sup>1)</sup> Es muss indess beachtet werden, dass wahrscheinlich diese permanente Torsion nur theilweise der Richtungsänderung der Molecüle zuzuschreiben ist. Betrachten wir die citirten Versuche mit einem Messingdrahte genauer; stets wurde die augenblicklich eintretende temporäre Torsion und die endliche temporäre Torsion beobachtet, welche nach langer Zeit eintraf. Die erstere wurde in Theilen der Scala mit  $T$ , die zweite mit  $T_1$  bezeichnet. Ich entnehme der genannten Abhandlung folgende Tabelle:

Gewichte:	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$T_1 - T$ :	0	0	0	0	1	1	2,5	4	13	13	33	95

Ebenso wurde beim Heben der Gewichte die zuerst eintretende Torsion  $P$  und die endliche permanente Torsion  $P_1$  gemessen. Es wurde gefunden:

Gewichte:	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$P - P_1$ :	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	1,5	2,8	8

Die Grössen  $T_1 - T$  und  $P - P_1$  wurden durch elastische Nachwirkung, daher durch die Drehung der Molecüle hervorgebracht.

Nach der Angabe des Hrn. Wiedemann waren  $T$  und  $P$  nicht genau festzustellen, wie auch aus der Reihenfolge der Zahlen für  $T_1 - T$  wohl merkbar ist. Es ist jedoch ersichtlich, dass diese Zahlen mit den tordirenden Gewichten schnell wachsen und besonders, dass die Werthe von  $T_1 - T$  viel grösser sind, als die Werthe von  $P - P_1$ . Indem nach der Hebung der Kraft 110 kaum eine Zurückdrehung beobachtet wurde, war die Nachwirkung während der Torsion durch das Gewicht 70 schon wahrzunehmen. Hier war demnach die ganze Ablenkung nahezu permanent; nur nach der Einwirkung grösserer Kräfte bewegten sich die Molecüle theilweise der alten Lage wieder zu, was auch aus der Theorie abgeleitet wurde.

Arnheim, October 1882.

1) G. Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 490. 1879.

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

## NEUE FOLGE. BAND XVII.

**I. Absolute Messungen mittels bifilarer Aufhängung, insbesondere zwei Methoden zur Bestimmung der erdmagnetischen Horizontalintensität ohne Zeitmessung; von F. Kohlrausch.**

(Der k. Ges. der Wiss. zu Göttingen im Auszuge mitgetheilt am 4. Juni 1881 und am 4. März 1882.)

(Hierzu Taf. V Fig. 1—4a.)

1. Kritisches.

Dass die von Harris<sup>1)</sup> vorgeschlagene Aufhängung eines Körpers an zwei Fäden durch die leicht übersichtlichen Verhältnisse dieser Anordnung ein ausgezeichnet einfaches Hilfsmittel für die einfache Messung eines Drehungsmomentes bietet, ist bekannt. Trotzdem hat die Bifilarsuspension für absolute Messungen sehr wenig Anwendung gefunden. Denn die Beobachter, insbesondere diejenigen, welche sich mit dem Erdmagnetismus beschäftigten, waren der Ansicht, dass die Constanten der bifilaren Aufhängung für genaue Messungen nicht hinreichend scharf ermittelt werden können.<sup>2)</sup>

1) Snow Harris, Phil. Trans. Jahrgang 1836, p. 417.

2) Stähelin in seiner umfangreichen Schrift, die Messung von Kräften mittelst der Bifilarsuspension, Basel 1852, p. 136, sagt: Die äusserst geringen Abstände lassen sich nicht ohne grosse Schwierigkeit so messen, dass die begangenen Fehler nicht erhebliche Bruchtheile derselben ausmachten. Es muss daher statt des directen Weges der Messung ein indirecter eingeschlagen werden . . .

Lamont, Handb. d. Magnetismus, 1867, p. 349: Man hat deshalb von der Bifilarsuspension grossen Nutzen erwartet; die wirkliche Anwendung ist aber bisher insbesondere dadurch wesentlich beschränkt worden, dass keine hinreichend biegsamen Fäden zu finden sind. — Maxwell, Treatise on Electr. and Magn. 1873. 2. p. 102: and is not so accurate for absolute measurements. — Auch W. Weber bei Gelegenheit der



Dies muss allerdings zugegeben werden für eine Aufhängung, bei welcher die Fadenabstände nicht sehr gross sind gegen die Fadendicke, sowie z. B. bei dem Gauss'schen Bifilarmagnetometer<sup>1)</sup>, welches von dem transversal gestellten Magnet eine grosse Empfindlichkeit gegenüber den erdmagnetischen Variationen, mindestens doch von einem Scalentheile auf eine Aenderung um  $\frac{1}{1000}$  beansprucht.

Nun aber halten die absoluten Messungen bis jetzt keineswegs einen Vergleich mit dieser Empfindlichkeit des Bifilarvariometers aus. Unterwerfen wir z. B. die erdmagnetische Intensitätsbestimmung einer Kritik, so ist, wie ich glaube, noch von keiner ausgeführten Messung dieser Grösse der bindende Nachweis geliefert worden, dass ihre Genauigkeit  $\frac{1}{1000}$  erreicht hat. Und dazu müssen bei Beobachtungen, welche nach dem Zusammenwirken der vielen hier geforderten Einzelmessungen eine Fehlergrenze von  $\frac{1}{1000}$  mindestens wahrscheinlich machen, die äussersten Hilfsmittel mit grosser Sorgfalt vereinigt werden.

Wer z. B. mit der Messung eines Trägheitsmoments sich selbst beschäftigt oder die Literatur über diesen Gegenstand kritisch betrachtet, findet trotz aller Sorgfalt und bei den geübtesten Beobachtern unerklärliche, aber unleugbare Unsicherheiten dieser Grösse allein schon bis zu dem obigen Betrag.<sup>2)</sup> Die Schwankungen der Temperatur und der Inten-

ersten Anwendung der Bifilarsuspension zur absoluten Strommessung sagt: Die Directions-kraft kann zwar aus der Länge der Aufhängungsdrähte, ihrem Abstände und aus dem von ihnen getragenen Gewichte (insofern nicht ihre eigene Elasticität etwa berücksichtigt werden muss) berechnet werden, doch findet man dieselben genauer durch die in der „Intensitas“ zur Bestimmung des Trägheitsmomentes vorgeschriebenen Versuche. Result. magn. Verein. 1840. p. 93.

1) Wild hat eine sinnreiche Methode vorgeschlagen, die Empfindlichkeit des Bifilarmagnetometers zur absoluten Messung des Erdmagnetismus zu benutzen und dabei zugleich den Inductionscoefficienten der Magnete zu bestimmen. Ueber die Ausmittlung der bifilaren Directions-kraft äussert Wild sich aber im Sinne der obigen Citate. Mélanges St. Pétersb. 1880 p. 174.

2) Vgl. z. B. Wild, Ann. de St. Pétersb. 1878, p. 54, welcher das Trägheitsmoment des in Paulowsk gebrauchten Schwingungsstabes zu  $7\,160\,220 \pm 5910$  angibt.

sität während der lange dauernden Beobachtungen, die Mitbewegung der Luft um Magnetstab und belastende Gewichte, die kleinen Schwankungen dieser Gewichte, die Schwierigkeit ihrer Abstandsmessung, oder, wenn zur Belastung ein Ring gebraucht wird, die nicht zu verbürgende vollkommene Homogenität der Substanz, endlich der Magnetismus oder Diamagnetismus der Belastung, lauter schwierig zu beurtheilende kleine Einflüsse, mögen genannt werden, um die Unsicherheit des Resultates zu erklären. Und um nur zu einem solchen Grad von Genauigkeit zu gelangen, ist ein höchst umständliches Verfahren nothwendig.

Ausser dem Trägheitsmoment aber verlangt die Gauss'sche Methode der Intensitätsbestimmung noch die Ermittelung des Inductionscoefficienten für den Stab; der von Joule ausgedachte sinnreiche Kunstgriff, um durch die Wechselwirkung zweier Magnete die Induction auszuschliessen, bringt andere Verwickelungen mit sich.

Auch dass die beiden Theile der Messung, die Schwingungs- und die Ablenkungsbeobachtung, nicht gleichzeitig vorgenommen werden können, und dass deswegen die Bestimmung der Temperaturschwankungen und ihres Einflusses auf den Magnet sowie der Intensitätsvariationen verlangt wird, ist von den Beobachtern oft beklagt worden.

Ueber die von Wild vorgeschlagene Anwendung bifilar aufgehängener Magnete bei der Intensitätsbestimmung (vgl. die Note auf vor. S.) lässt sich vor deren praktischer Ausführung ein sicheres Urtheil nicht abgeben. Allerdings gewährt dieses Verfahren den Vortheil, dass nach derselben Methode auch der Inductions- und der Temperaturcoefficient der Magnete bestimmt werden kann, und dass wenigstens bei der schliesslichen Messung Schwingungsbeobachtungen erspart bleiben. Die vorbereitenden Messungen aber dürften auch hier manchen schwierigen Punkt enthalten, und vielleicht gestaltet sich das Verfahren in der praktischen Ausführung instrumentell weniger einfach als das Gauss'sche.

Auch die auf W. Weber's Veranlassung vor zwölf Jahren<sup>1)</sup> von mir ausgeführte Ersetzung des Magnets durch

1) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1869. p. 36; Pogg. Ann. 138. p. 1. 1869.

einen electrischen Strom ist, obwohl sie bei der Gleichzeitigkeit der entscheidenden Messungen Temperatur- und Intensitätsvariationen von selbst unschädlich macht, in der damaligen Form mehr von theoretischem Interesse als praktischem Nutzen gewesen. Zunächst waren die Instrumente unbehülflich gross. Ausserdem aber lagen in den Messungen einige grössere Schwierigkeiten, unter denen die genaue Messung der Windungsfläche eines Solenoides und die Bestimmung von dessen Trägheitsmoment voranstehen. Auch die elastische Nachwirkung der dickdrähtigen Aufhängung des Solenoides verlangte besondere Hilfsmittel der Elimination.

Bei dieser Sachlage dürfte offenbar der Frage näher zu treten sein, ob man nicht die Schwierigkeiten einer genauen Ausmessung der bifilaren Aufhängung gegenüber den oben zusammengestellten Schwierigkeiten der gebräuchlichen Intensitätsbestimmung bisher überschätzt hat. Wenn nämlich dies der Fall sein sollte, so ergeben sich offenbar Messungsmethoden für die erdmagnetische Intensität, die an Einfachheit die sonstigen weit überragen. Selbst den Fall gesetzt, dass das Gauss'sche oder das Wild'sche oder das erwähnte galvanische Verfahren unter Anwendung der äussersten Hilfsmittel zu einem höheren Grade von Genauigkeit zu treiben sein sollte — was aber erst nachgewiesen werden müsste —, so würde doch die Einfachheit des neuen Verfahrens demselben eine berechtigte Stellung unter den erdmagnetischen Messungsmethoden sichern.

Die Bifilarmethode lässt sich in zwei Gestalten ausführen. In jedem Falle besteht das Verfahren darin, dass ein bifilar und transversal aufgehängter magnetischer Körper während seiner eigenen Ablenkung durch den Erdmagnet auf eine Bussole ablenkend einwirkt. Im einen Falle wird ein Stahlmagnet gebraucht (bifilarmagnetische Methode), im anderen ein in der Form des Weber'schen Bifilarmagnetometers aufgehängter Stromkreis (bifilargalvanische Methode).

Beide Methoden verlangen ausser der Abmessung der bifilaren Aufhängung nur die Messung der beiden Ablenkungswinkel und der Abstände der Bussole von dem Bifilarapparat. Eine Zeitmessung wird nirgends gefordert.

Ich glaube, dass besonders das bifilarmagnetische Verfahren sich durch seine grosse Einfachheit in den Instrumenten und durch das Fehlen jeder Schwierigkeit in der Ausführung empfiehlt.

Die Instrumente sind aus der Werkstatt von Hrn. Eugen Hartmann in Würzburg hervorgegangen.

2. Ueber die Gestalt eines elastischen ursprünglich verticalen Cylinders, der, oben eingeklemmt, unten durch ein Gewicht  $k$  gespannt und zugleich durch eine horizontale Kraft  $k'$  gebogen wird.

Um die Steifheit der Aufhängedrähte bei der bifilaren Directionskraft berücksichtigen zu können, möge der hier in Betracht kommende Fall eines gespannten und gebogenen elastischen Stabes vorausgeschickt werden.

Der Stab sei ursprünglich ein verticaler Cylinder, und es liege eine Hauptträgheitsaxe des Querschnitts in der Biegungebene. Diese Ebene enthalte ein rechtwinkliges Coordinatensystem  $h, s$ ;  $h$  von dem oberen festen Ende der Stabaxe nach unten,  $s$  nach der Seite der Biegung gerechnet.

Wir vernachlässigen das Eigengewicht des Stabes und nehmen seine Biegung so klein an, dass wir die Krümmung der Stabaxe gleich dem zweiten Differentialquotienten  $d^2s/dh^2$  setzen können. An einem Querschnitt, dessen Axenpunkt die Coordinaten  $h$  und  $s$  hat (wir wollen  $h$  und  $s$  kurz die Coordinaten des Querschnitts nennen), wirkt alsdann ein elastisches Drehungsmoment, welches den Stab der Verticalen anzunähern strebt, gleich:

$$E\kappa \frac{d^2s}{dh^2},$$

wo  $E$  den Elasticitätsmodul,  $\kappa$  das Trägheitsmoment des Querschnitts, bezogen auf seine zur Biegungebene senkrechte Mittellinie bedeutet.

Am untersten Querschnitt greife die verticale Kraft  $h$ , die horizontale  $k'$  an.  $h_1$  und  $s_1$  seien die Coordinaten des untersten Querschnitts.

Das von diesen Kräften an einem Querschnitt  $h, s$  ausgeübte Drehungsmoment nach der Verticalen zu ist:

$$h(s_1 - s) - k'(h_1 - h).$$

Nun werde aber noch angenommen, dass der unterste Querschnitt horizontal bleiben muss, d. h. das für  $h = h_1$   $ds/dh = 0$  sei. Diese Bedingung erfordert die Einführung noch eines Drehungsmomentes am untersten Querschnitt, dessen Grösse sich folgendermassen ergibt. Denkt man sich den Stab ganz frei, so sind für das Gleichgewicht der äusseren Kräfte offenbar am obersten Querschnitt zunächst noch die Kräfte  $-k$  und  $-k'$  anzubringen. Dann unterliegt der Stab aber noch dem Drehungsmoment der äusseren Kräfte, welches sich aus den beiden Kräftepaaren  $ks_1$  und  $-k'h_1$  zusammengesetzt. Diesem Moment muss durch ein gleiches entgegengesetztes Moment das Gleichgewicht gehalten werden, von welchem offenbar die eine Hälfte am obersten, die andere am untersten Querschnitt anzubringen ist, also je:

$$\frac{1}{2}(k'h_1 - ks_1).$$

Nun dürfen wir die Kräfte am obersten Querschnitt wieder durch die Festigkeit der Einklemmung ersetzt denken.

Das Gleichgewicht erfordert also für den Querschnitt  $h$ ,  $s$  die Bedingung:

$$0 = Ez \frac{d^2 s}{dh^2} + k(s_1 - s) - k'(h_1 - h) + \frac{1}{2}(k'h_1 - ks_1),$$

$$\text{oder:} \quad 0 = Ez \frac{d^2 s}{dh^2} - k\left(s - \frac{s_1}{2}\right) + k'\left(h - \frac{h_1}{2}\right).$$

Führt man neue Coordinaten  $x, y$  ein, welche von der Mitte zwischen dem oberen und dem unteren Endpunkt an gerechnet werden:

$$y = s - \frac{s_1}{2} = s - y_1, \quad x = h - \frac{h_1}{2} = h - x_1,$$

und setzt:

$$\frac{k}{Ez} = a^2, \quad \frac{k'}{Ez} = b^2,$$

so wird diese Gleichung:

$$0 = \frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y + b^2 x,$$

deren Integration in gewöhnlicher Weise ergibt:

$$y = \frac{b^2}{a^2} x + Ce^{ax} + C'e^{-ax},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} + Ca e^{ax} - C' a e^{-ax}.$$

Nun soll für  $x = \pm x_1$   $dy/dx = 0$  sein, woraus:

$$C' = -C = \frac{b^2}{a^3} \frac{1}{e^{ax_1} + e^{-ax_1}} \quad \text{also:}$$

$$y = \frac{b^2}{a^3} \left( x - \frac{1}{a} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax_1} + e^{-ax_1}} \right) = \frac{k'}{k} \left( x - \frac{1}{a} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax_1} + e^{-ax_1}} \right)$$

$$\text{oder auch: } s - \frac{s_1}{2} = \frac{k'}{k} \left( h - \frac{h_1}{2} - \frac{1}{a} \frac{e^{a(h - \frac{h_1}{2})} - e^{-a(h - \frac{h_1}{2})}}{e^{\frac{ah_1}{2}} + e^{-\frac{ah_1}{2}}} \right).$$

Die Curve des Stabes zeigt sich, wie zu erwarten war, symmetrisch um ihren Mittelpunkt gestaltet, denn der Ausdruck  $y$  ändert, wenn man  $x$  durch  $-x$  ersetzt, nur sein Gesamtvorzeichen.

Ferner sieht man sofort, dass, wenn  $a$  oder  $x_1$  gross ist, d. h. wenn die Spannung gross, oder der Stab dünn oder lang ist, dass alsdann in der Nachbarschaft der Mitte:

$$y = \frac{k'}{k} x$$

wird, d. h. dass daselbst der Stab dieselbe gerade Richtung hat, wie wenn er ohne eigene Steifheit nur durch die Verticalspannung  $k$  und die Seitenkraft  $k'$  angegriffen würde.

Erst von den Punkten an, für welche  $e^{ax} - e^{-ax}$  gegen  $e^{ax_1} + e^{-ax_1}$  beträchtlich zu werden anfängt, tritt nach den Enden zu eine Krümmung des Stabes ein, und zwar an beiden Enden in gleicher Weise. Betrachten wir das positive Ende. Da wir für einen längeren Stab  $e^{-ax}$  und  $e^{-ax_1}$  gegen  $e^{ax}$  und  $e^{ax_1}$  vernachlässigen dürfen, so kann man statt dessen auch sagen, der Stab krümmt sich erst von da an, wo  $e^{a(x-x_1)}$  beträchtlich wird, und kann schreiben:

$$y = \frac{k'}{k} \left( x - \frac{1}{a} e^{a(x-x_1)} \right),$$

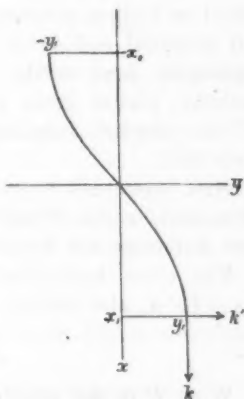


Fig. 1.

was für den Endpunkt  $x = x_1$  übergeht in:

$$y_1 = \frac{k'}{k} \left( x_1 - \frac{1}{a} \right).$$

Jeder Endpunkt ist also wegen der Steifheit gegen die Mitte um so viel weniger verschoben, als ohne Steifheit, wie einer Verkürzung der Stabhöhe um  $1/a = \sqrt{Ex/k}$  entspricht.

Man gelangt also zu einem für unsere Zwecke sehr einfachen Resultat:

Ein langer oder dünner Stab (Draht) mit dem oberen Ende vertical eingeklemmt, dessen unteres Ende ebenfalls vertical zu bleiben gezwungen ist, werde durch eine Verticalkraft gespannt und durch eine Seitenkraft am oberen Ende ausgebogen, dann erfährt er an letzterem Orte eine Verschiebung, ebenso gross wie ein nicht eingeklemmter oder wie ein absolut biegsamer Stab, welcher um  $2\sqrt{Ex/k}$  kürzer ist.<sup>1)</sup>

Hier bezeichnet  $k$  das spannende Gewicht,  $E$  den Elasticitätsmodul,  $\alpha$  das Trägheitsmoment des Querschnitts bezogen auf seine zur Biegungsebene senkrechte Mittellinie.

Für einen kreiscylindrischen Stab vom Halbmesser  $\varrho$  ist  $\alpha = \frac{1}{4}\varrho^4\pi$ , also beträgt die Correction der Länge:

$$\varrho^2 \sqrt{\frac{E\pi}{k}}.$$

Wird  $E$  in der gebräuchlichen Einheit  $\frac{\text{Kg-Gewicht}}{\text{qmm}}$ ,  $\varrho$  in mm;  $k$  in Kg-Gewichten eingesetzt, so erhält man die Correction in mm. Vgl. § 3 II.

### 3. Vollständige Theorie der bifilaren Aufhängung.

Da ich keine Zusammenstellung aller für uns nothwendigen Gesichtspunkte bei der Berechnung einer bifilaren Directionskraft in der Literatur finde, so möge eine solche hier Platz finden.

I. Das Drehungsmoment der Schwere. — Wir werden freilich für unser Instrument den einfachsten und bekannten Fall langer, gleicher und gleich gespannter Fäden nehmen; trotzdem muss untersucht werden, welche Abwei-

1) Bei einem Stabe, dessen unteres Ende frei ist, fällt der Factor 2 weg.



chungen von diesen Verhältnissen, die ja praktisch nicht vollkommen zu erreichen sind, man noch zulassen darf.

Um eine vollständige Entwicklung des Schweremoments zu geben, folgen wir der von Maxwell gegebenen eleganten Entwicklung, lassen jedoch eine von Maxwell gemachte Beschränkung fallen.<sup>1)</sup>

Das Papier stelle eine horizontale Ebene war; in der Zeichnung bedeuten:

$\lambda$  und  $\lambda'$  die Projectionen der beiden Fäden, also

$e_1$  und  $e_2$  die Projectionen der oberen und der unteren Verbindungslinien ihrer Enden,

$\alpha$  den horizontalen Ablenkungswinkel der unteren Verbindungslinie aus der Ruhelage.

Nun müssen  $\lambda$  und  $\lambda'$  offenbar parallel sein, denn die horizontalen Componenten der Fadenspannungen sollen ein Kräftepaar geben. Diese horizontalen Componenten sind also ferner einander gleich.

Nennt man:

$h$  und  $h'$  die Verticalhöhen zwischen den Anknüpfungspunkten eines Fadens,

$p$  und  $p'$  die verticalen Spannungscomponenten, so sind die horizontalen Componenten gegeben durch die gleichen Ausdrücke:

$$p \frac{\lambda}{h} \text{ oder } p' \frac{\lambda'}{h'}.$$

Der Arm  $r$  des Kräftepaares wird gefunden aus der Dreiecksgleichung:

$$\frac{r}{e_2} : \sin \alpha = e_1 : (\lambda + \lambda'), \quad r = \frac{e_1 e_2}{\lambda + \lambda'} \sin \alpha.$$

1) Maxwell, Treatise on Electricity 2. p. 107, setzt voraus, dass der verticale Abstand der beiden Anknüpfungspunkte eines Fadens für beide Fäden gleich gross ist. Diese Annahme ist eigentlich sogar unmöglich (ausser wenn beide Fäden gleich gespannt sind); denn durch die Ablenkung werden beide Höhen, selbst wenn sie vorher gleich waren, ungleich gross.



Fig. 2.

Hiernach findet man das biflare Drehungsmoment der Schwere leicht

$$= \frac{e_1 e_2}{\frac{h}{p} + \frac{h'}{p'}} \sin \alpha.$$

Im allgemeinen sind die Grössen  $e_1 e_2 h h' p p'$  selbst noch von dem Ablenkungswinkel abhängig, sodass diese Abhängigkeit wie bekannt den Ausdruck für das Drehungsmoment zu einem verwickelten macht. Für unseren Fall jedoch lassen sich die Verhältnisse sehr vereinfachen.

Wir setzen voraus, das Biflarinstrument sei wie gewöhnlich so eingerichtet, dass je die unteren sowohl wie die oberen Anknüpfungspunkte der Fäden nahezu in derselben Horizontalen liegen, und dass die Spannungen beider Fäden nur wenig verschieden seien, d. h. dass der Schwerpunkt des aufgehängenen Körpers nahe in der Mittellinie der Fäden liege. Es bedeute nun  $H$  die mittlere Verticalhöhe und  $P$  die Summe der Verticalspannungen beider Fäden. Setzt man:

$$h = H(1 + \varepsilon) \quad p = \frac{P}{2}(1 + \delta)$$

$$h' = H(1 - \varepsilon) \quad p' = \frac{P}{2}(1 - \delta),$$

so wird: 
$$\frac{h}{p} + \frac{h'}{p'} = \frac{4H}{P} \frac{1 - \delta^2}{1 - \delta^2},$$

also das Drehungsmoment der Schwere:

$$= P \frac{e_1 e_2}{4H} \frac{1 - \delta^2}{1 - \delta^2} \sin \alpha.$$

Beschränkt man sich auf kleine Ablenkungswinkel, und ist die Fadenlänge gross gegen den Fadenabstand, so kann man offenbar alle Grössen ausser  $\sin \alpha$  als constante behandeln. Wenn man jetzt:

$$P \frac{e_1 e_2}{4H} \frac{1 - \delta^2}{1 - \delta^2} = D_1$$

setzt, so wird das Schweremoment

$$= D_1 \sin \alpha.$$

Hält man, was keine Schwierigkeit bietet, die beiden Fadenspannungen so weit gleich, dass die Abweichung  $\delta$  höchstens 1 Proc. beträgt, so beeinflusst der Zähler  $1 - \delta^2$

den Factor  $D_1$  nur um  $\frac{1}{10000}$ , was im Resultate für die erdmagnetische Intensität nur  $\frac{1}{20000}$  des Ganzen gibt und praktisch vernachlässigt (oder auch in Rechnung gesetzt) werden kann. Der relative Unterschied  $\varepsilon$  der Fadenlänge kann jedenfalls so klein gemacht werden, dass der Nenner  $1 - \delta\varepsilon$  vollkommen gleich 1 gesetzt werden darf.

Dann hat man also den bekannten Ausdruck:

$$D_1 = \frac{P e_1 e_2}{4H}.$$

Meistens wird man für  $e_1$  und  $e_2$  einfach die Abstände der oberen und der unteren Befestigungspunkte der Fäden und, wenn beide nahe gleich sind, was sich am meisten empfiehlt, für  $H$  die mittlere Fadenlänge  $l$  nehmen dürfen.

Ebenso wird  $P$  merklich genau durch das Gewicht des aufgehängenen Körpers gegeben sein, vermehrt um das halbe Gewicht beider Fäden zusammengenommen.<sup>1)</sup> Letzteres leuchtet sofort ein, wenn man die Fäden als abgelenkte Stangen ansieht, deren Gewicht ja in ihrem Mittelpunkt concentrirt angenommen werden kann. Eine solche Stange drückt mit ihrem Endpunkte horizontal halb so stark, als wenn in letzterem das ganze Gewicht der Stange vereinigt wäre.

II. Biegungselasticität. Die Steifheit der Drähte äussert sich darin, dass in der Nachbarschaft der Anknüpfungspunkte die abgelenkten Drähte nicht geradlinig sind, da die ersten Drahtelemente ihre verticale Richtung beibehalten. Hierauf lässt sich die Betrachtung von § 2 anwenden, denn das Drehungsmoment, welches den Bifilarkörper ablenkt, wirkt auf das untere Ende des gespannten Drahtes als eine seitliche Kraft. Die dadurch erfolgende Verschiebung des Drahtendes ist kleiner, als diejenige eines absolut biegsamen Fadens, und zwar um soviel kleiner, als ob der Draht verkürzt würde um (p. 744):

$$q^2 \sqrt{\frac{2\pi E}{P}} \text{ oder auch: } \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{2E}{\pi P}}.$$

1) Im „absoluten Maasssystem“ natürlich das Gewicht als Masse (Gramm u. s. w.) mal Schwerbeschleunigung einzusetzen.

Hier bedeutet  $\rho$ ,  $E$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  Halbmesser, Elasticitätsmodul, Masse der Längeneinheit, spezifisches Gewicht des Drahtes,  $P$  das ganze Gewicht des Bifilarkörpers.

Natürlich ist ein consequentes Maasssystem anzuwenden. Drücken wir  $\rho$  in cm,  $P$  in Grammgewichten (also ohne den Factor  $g$ ),  $E$  in Gr.-Gew./qcm aus, so erhalten wir die Verkürzung in cm.

Es wäre also z. B. für:

Eisen	Kupfer	Silber	Messing
$E = 200 \cdot 10^7$	$124 \cdot 10^7$	$74 \cdot 10^7$	$90 \cdot 10^7$
Gr.-Gew./qcm.			

Wöge der Bifilarkörper 100 g, so würde die Correction an einem 0,01 cm ( $\rho = 0,005$ ) dicken Drahte betragen:

0,28	0,22	0,17	0,19
cm.			

An den später beschriebenen Instrumenten ist die Correction sogar noch kleiner, sodass eine rohe Bestimmung ausreicht.

Man kann die Correction auch empirisch bestimmen oder controliren, indem man ein Drahtstückchen am einen Ende horizontal einklemmt und am freien Ende mit einem Gewichtchen  $\gamma$  belastet. Findet man dabei eine Senkung um die Höhe  $\delta$ , so ist, wenn  $\lambda$  die freie Länge vorstellt:

$$\rho^2 \sqrt{2\pi E} = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{\gamma \lambda^3}{\delta}.$$

III. Das Drehungsmoment der Torsionselasticität. — Wir halten den wirklichen Fall kleiner Ablenkungswinkel, welche mit ihrem Sinus vertauscht werden können, fest. Alsdann äussert sich die Torsion darin, dass man zu dem Factor  $D_1$ , welcher mit dem Sinus multiplicirt das Drehungsmoment der Schwere gab, eine Grösse  $D_2$ , die von der Natur und den Dimensionen der Fäden abhängt, hinzufügen muss.

Man kann diese Correction empirisch oder aus den Dimensionen der Fäden ermitteln.

Es sei wieder  $\rho$  der Halbmesser,  $E$  der Elasticitätsmodul, und  $l$  die Länge eines Drahtes. Der Torsionsmodul kann für unsere Zwecke hinreichend genau gleich  $\frac{2}{5} E$  gesetzt werden. Die Directionskraft der Torsion ist dann

bekanntlich, wenn  $g$  die Schwerebeschleunigung bedeutet,  $= \rho^4 \pi E g / 5L$ . Für beide Drähte zusammengenommen also erhalten wir:

$$D_2 = \frac{2\pi \rho^4 E g}{5l} \quad \text{oder auch: } \frac{2}{5\pi} \frac{\mu^2 E g}{\sigma^2 l},$$

wenn  $\mu$  die Masse der Längeneinheit und  $\sigma$  das spezifische Gewicht des Drahtes bedeutet.

Für  $E$  die früheren Zahlen (vor. S.) gesetzt,  $\rho$ ,  $l$  und  $g = 981$  in cm gemessen, erhält man  $D_2$  in  $[\text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2}]$ .

Drähte von 250 cm Länge und 0,01 cm Durchmesser<sup>1)</sup> geben z. B. für:

Eisen	Kupfer	Silber	Messing	
$D_2 = 6,3$	3,9	2,3	2,8	$[\text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2}]$

und für [mm, mg] 100 000 mal so grosse Zahlen.

Da das Schweremoment der Bifilarsuspension in unserem Falle 10000 [cm, g] übersteigt, so wird keine genaue Bestimmung von  $D_2$  verlangt.

Empirisch kann  $D_2$  folgendermassen bestimmt werden. Man belastet einen Aufhängedraht vor seiner Befestigung am Bifilarkörper, oder auch ein anderes Stück derselben Drahtsorte von gleicher Länge mit einem Gewichte von bekanntem Trägheitsmoment  $K$  und bestimmt dessen Torsionsschwingungsdauer  $t$ . (Ein gewöhnliches massives cylindrisches Gewicht aus einem Gewichtssatze genügt. Dasselbe hat das Trägheitsmoment  $K = \frac{1}{2} p r^2$ , wo  $p$  die Masse,  $r$  den Halbmesser bedeutet.) Dann ist:

$$D_2 = 2K \frac{t^2}{\pi^2}.$$

IV. Vollständiger Ausdruck für die bifilare Directions-kraft. — Es sei an zwei nahe gleich gespannten Drähten (vgl. p. 746) von nahe gleicher Länge ein Körper von der Masse  $m$  bifilar aufgehängt. In  $m$  sei die halbe Masse der Aufhängedrähte inbegriffen. Der obere und der untere (horizontale) Fadenabstand sei  $e_1$  und  $e_2$ .  $\rho$  be-

1) Für ein Paar von Drähten vom Durchmesser  $d$  cm und der Länge  $l$  cm wird also das Torsionsmoment durch Multiplication obiger Zahlen mit  $(d/0,01)^4 \cdot 250/l$  erhalten.

deute den Halbmesser,  $E$  den Elasticitätsmodul der Drähte (p. 748).

Wir ziehen zunächst von der gemessenen mittleren Drahtlänge den Ausdruck  $\rho^2 \sqrt{2\pi E/m}$  ab.  $l$  heisse die so corrigirte Länge.<sup>1)</sup>  $g$  bedeute die Schwerbeschleunigung.

Dann ist die Directionskraft der bifilaren Aufhängung, welche mit dem Sinus des Ablenkungswinkels multiplicirt das Drehungsmoment ergibt:

$$D = gm \frac{e_1 e_2}{4l} + \frac{2\pi \rho^4 E g}{5 l}.$$

#### 4. Die bifilargalvanische Methode der erdmagnetischen Intensitätsbestimmung. Allgemeines.

Im Jahre 1868 habe ich auf Veranlassung von W. Weber die erdmagnetische Horizontalcomponente in folgender Weise gemessen.<sup>2)</sup> Ein electricischer Strom durchlief gleichzeitig eine grosse Tangentenbussole und ein Weber'sches Bifilargalvanometer von grossen Dimensionen. Der an letzterem Instrument eintretende Ausschlag misst das Product aus Stromfläche, Stromstärke und Erdmagnetismus, während die Ablenkung der Tangentenbussole von bekannten Dimensionen den Quotienten aus Stromstärke und Erdmagnetismus liefert. Um die letztere Grösse aus beiden Ablenkungen zu ermitteln, muss ausser den Dimensionen der Tangentenbussole die Windungsfläche des Drahringes des Bifilargalvanometers und die statische Directionskraft der bifilaren Aufhängung bekannt sein. Letztere wurde aus dem Trägheitsmoment des Bifilargalvanometers und aus dessen Schwingungsdauer abgeleitet.

Grössere Schwierigkeiten bringen unter diesen Messungen die Bestimmungen der Windungsfläche und des Trägheitsmomentes mit sich. Hierzu kommt die elastische Nachwirkung der dicken Kupferdrähte, an denen das Bifilargalvanometer hing, welche besondere Vorsichtsmassregeln bei der Beobachtung der Ablenkung erforderte.

1) Sind  $e_1$  und  $e_2$  merklich verschieden, so ist anstatt  $l$  zu setzen  $\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(e_1 - e_2)^2}$  (p. 747).

2) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1869. p. 36; Pogg. Ann. 138. p. 1. 1869.

Eine von W. Thomson gegebene Abänderung der Anordnung<sup>1)</sup> vermeidet die Tangentenbussole, indem die Magnetnadel in den Ring des Bifilargalvanometers eingehängt wird, und liefert den Vortheil, dass ein Beobachter beide Ablenkungen ablesen kann. Die obigen Schwierigkeiten aber bleiben bestehen.

Wenn wir jetzt anstatt des schweren und grossen dickdrähtigen Ringes einen kleineren aus feinem Draht anwenden und infolge dessen auch die Aufhängedrähte fein wählen dürfen, so wird die Elasticität der Drähte klein und deren elastische Nachwirkung verschwindend. Zugleich messen wir die statische Directionskraft durch die Dimensionen der bifilaren Aufhängung, indem wir die Anknüpfungspunkte der Drähte zu diesem Zwecke weit genug von einander entfernen. Dadurch fällt die Nothwendigkeit der Bestimmung von Schwingungsdauer und Trägheitsmoment fort.

Es soll aber auch die Messung der Windungsfläche gespart werden. Dies geschieht, indem wir zugleich die Tangentenbussole durch ein blosses entfernt aufgestelltes Magnetometer ersetzen, welches seine Ablenkung von dem Drahtringe selbst erfährt.

Das Bifilargalvanometer nämlich liefert aus seiner Ablenkung  $\alpha$  durch den hindurchgehenden Strom das Product aus Erdmagnetismus  $H$  mal Windungsfläche  $f$  und Stromstärke  $i$ . Denn wenn  $D$  die statische Directionskraft der bifilaren Aufhängung bedeutet, so hat man:

$$D \cdot \sin \alpha = f i \cdot H \cdot \cos \alpha \text{ oder: } D \operatorname{tg} \alpha = f i \cdot H.$$

Der Factor  $f i$ , das sogenannte magnetische Moment des Stromes im Ringe, ergibt sich nun im Verhältniss zum Erdmagnetismus aus der Fernwirkung auf das Magnetometer, gerade so wie das magnetische Moment eines Stabes in dem Gauss'schen Verfahren. Denn wenn  $a$  der (grosse) Abstand des Magnetometers vom Mittelpunkt des Stromes ist, so gilt für die Ablenkung  $\varphi$  des ersten:

$$a^3 \operatorname{tg} \varphi = \frac{f i}{H}.$$

1) W. Thomson, Maxwell, Treatise of electr. 10. p. 323.



Aus beiden Gleichungen folgt:

$$H^2 = \frac{D}{a^3} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Einige zu dieser schematischen Darstellung hinzutretende Correctionen (§ 6 und 7) bieten keinerlei Schwierigkeit. Dem Gauss'schen magnetischen Verfahren gegenüber besteht auch hier ein Vortheil darin, dass, während bei jenem aus zwei Entfernungen beobachtet wird, um die Vertheilung des Magnetismus im Stabe zu bestimmen, für uns eine Entfernung genügt, da die Stromvertheilung im Ringe bekannt ist.

So reduciren sich die zu messenden Grössen auf:

das Gewicht des Bifilargalvanometers,

die Länge und den Abstand der Aufhängedrähte,

den Abstand des Magnetometers,

die gleichzeitigen Ablenkungen beider Instrumente.

Nur die Messung des Fadenabstandes erfordert hier eine besondere Sorgfalt.

#### 5. Instrumente und Verfahren.

Die äussere Anordnung der Messungen hat sich folgendermassen gestaltet.

Das Bifilargalvanometer besteht aus einem Ringe von 0,2 mm dickem, seidebesponnenem Kupferdrahte, der mit einem Halbmesser von 10 cm etwa 500 Kreiswindungen, also eine Fläche von etwa 16 qm bildet.<sup>1)</sup> Dieser Ring wurde so hergestellt, dass man zwei Bretter aufeinander schraubte, dieselben abdrehte und dabei mit einer Nut versah, in welche der Draht eingewickelt wurde. Vorher in die Nut eingelegte seidene Fäden liessen nach Beendigung des Wickelns den Drahring zusammenbinden, wonach derselbe als ein schon ziemlich steifes Ganze von den auseinandergeschraubten Brettern abgenommen werden konnte. Man umwand den Ring alsdann mit dünnem seidenen Band. Zur Versteifung wurde schliesslich noch eine kreisförmige Rippe mit T-förmigem Querschnitt aus dünnem Kupferblech eingesetzt, auf welche der Drahring festgebunden wurde.

1) In den Gött. Nachr. 1881, p. 285 ist irrthümlich angegeben 0,12 mm Dicke, 1300 Windungen und 40 qm Fläche.

Dieser Ring reitet nun im Bifilargalvanometer auf einem 10 cm langen Querstabe aus hartem Holz (Fig. 1), mittelst der Blechrippe zwischen zwei T-förmigen, zusammen also ein Kreuz bildenden Stücken aus Hartkautschuk befestigt, die auf den Querstab aufgeschraubt sind. Letzterer trägt zugleich an einem nach unten gerichteten Stift einen leichten Ablesespiegel von 25 mm Durchmesser.

Wenn die Windungsebene des Ringes im magnetischen Meridian liegt, so steht also die Fadenebene senkrecht auf letzterem. Es wird also vom Erdmagnetismus kein Drehungsmoment auf die Drähte ausgeübt. Zugleich fällt bei dieser Anordnung die Fernwirkung des Stromes in den Drähten aus den Resultaten von selbst heraus, denn wenn die eine Stromrichtung den Erdmagnetismus verstärkt, so bewirkt das Commutiren des Stromes die entgegengesetzte Aenderung.<sup>1)</sup>

Die Enden des Holzstabes sind unter einem Winkel von etwa 70° nach oben abgeschrägt und mit angeschraubten Kupferplättchen bedeckt, auf die mittelst einer als Reiber drehbaren Kupferplatte sich die Zuleitungs- (Aufhänge-) Drähte anklemmen lassen (Taf. V Fig. 1<sub>a</sub>). Eingefeilte Nuten geben dem Drahte an den Kanten eine Führung. Die Verbindung mit den Drahtenden des Ringes wird durch kleine Klemmschrauben auf den Kupferplatten vermittelt.

Ein Holzkasten mit planparalleler Glasplatte, der von der Seite übergeschoben werden kann, und der in seinem Schiebdeckel zwei Ausschnitte für die Aufhängedrähte besitzt, schützt gegen Luftzug.

An der Zimmerdecke ist eine Suspension von folgender Gestalt befestigt. (Fig. 1 und 1<sub>b</sub>). Ein klemmbarer messingener Torsionskreis trägt einen hölzernen Querstab, ähnlich, nur etwas stärker gearbeitet, als der untere Querstab und mit den abgeschrägten Enden nach unten gestellt. Die Aufhängedrähte laufen über die kupfernen Endflächen in scharfen Nuten nach unten. Kleine Aufwindschrauben

1) An Stelle des Drahringes würde auch ein kleiner Electromagnet gebraucht werden können, der von dem verlängerten Stiele des Spiegels getragen würde. Allein ich glaube nicht, dass diese Abänderung einen Nutzen bringen würde.

gestatten, die Drähte zu verkürzen oder nachzulassen. Man wird am besten die Drähte zuerst oben befestigen, mittelst Ziehens durch die Finger sie glatt streichen, durch die Beruhigung angehängter Gewichte die Torsion beseitigen und dann den einstweilen in einem Stativ gehaltenen Bifilarkörper unten anhängen.

Gewicht des Bifilargalvanometers. Der Bifilarkörper (Drahtring mit Zubehör) wird vor der Aufhängung gewogen. Um kleine Veränderungen des Gewichts durch hygroskopische Einflüsse zu controliren, ohne den Bifilarkörper von den Drähten abzunehmen, stellt man gleich nach dem Aufhängen eine Wage, welche bis auf einige Milligramm genau wägen lässt, so auf, dass die eine Endschneide sich über der Mitte des Bifilarkörpers befindet, und belastet mit letzterem diese Endschneide. Man hebt nun die Wage so weit, dass die Drähte schlaff werden. Das Gewicht wird von den aufgehängedrähten ein wenig beeinflusst werden: bei späterer Controle der Wägung hebt man die Wage (mit den Fusschrauben) stets um gleich viel und bringt an dem Resultat die anfangs gefundene Correction an.

Gleiche Drahtspannung. Zum Kennzeichen, dass die beiden aufgehängedrähte gleich stark gespannt sind, dient folgende Beobachtung. Eine ungefähre Anschauung über die Gleichheit der Spannung erhält man aus der Vibrationsgeschwindigkeit beim seitlichen Anschlagen der Drähte. Die feinere Beurtheilung liefert eine einfache und mit Genauigkeit ausführbare Bestimmung des Schwerpunktes des Bifilarkörpers. Denn offenbar sind die Drähte gleich gespannt, wenn der Schwerpunkt in der verticalen Mittellinie der Drähte liegt. Letzteres aber erkennt man daran, dass der Körper, wenn er an den beiden Drähten hängt, dieselbe Lage gegen die Verticale einnimmt, wie wenn man ihn unifilar an einem Punkte mitten zwischen den Drähten hebt. Ein kleiner Bügel mit einigen Millimeterstrichen (Fig. 1) erlaubt, diese Mitte zu fixiren und mittelst eines daselbst umgeschlungenen Fadens (Fig. 2) das Bifilargalvanometer bis zur Entlastung der Drähte zu heben. Die Neigung des Spiegels darf sich bei dieser Operation nicht ändern. Ueber den Fehler,

welcher entsteht, wenn die Spannung beider Fäden nicht genau gleich ist, vgl. § 3 p. 746.

Das in einigen Metern Abstand vom Spiegel an einem verticalen Maassstabe aufgestellte und sich selbst gespiegelt sehende Auge gibt einen hinreichend genauen Anhaltspunkt hierfür. Wenn die richtige Stellung nahe erzielt ist, kann man das Ableserrohr selbst zur Prüfung benutzen.

Mittelst der Hebevorrichtung an der oberen Suspension verkürzt man den zu wenig belasteten Draht, oder man verlängert den anderen mittelst Ziehen durch die Finger, bis die angegebene Bedingung erfüllt ist. Das Nachlassen eines Drahtes von oben ist weniger anzurathen, damit nicht der Knick, der sich am obersten Ende gebildet hat, in den freien Draht gelangt.

Fadenlänge. Um diese zu messen, genügt die Ablesung der beiden Drahtenden an einer Latte, die an den geeigneten Orten Millimetertheilungen von bekanntem Abstände trägt. Denn wenn in der mittleren Fadenlänge ein Fehler von  $\frac{1}{5}$  mm steckt, so macht dieser bei einer Gesamtlänge von 2,5 m das Resultat nur um  $\frac{1}{25000}$  relativ unrichtig. Die kleine Verlängerung durch die Stromwärme misst man für einen Strom (Ausschlag) und setzt sie jedesmal dem Quadrat des Stromes proportional in Rechnung.

Abstände der Fäden. Unvergleichlich genauer müssen die Abstände der oberen und unteren Fadenenden unter sich gemessen werden. Ein oben und unten in gleichem Sinne begangener Fehler von 0,1 mm würde nur dann zulässig sein, wenn man im Resultate Fehler von 0,1% gestattet. Für diesen Zweck genügen die an den Querstäben dicht hinter den Drähten angebrachten kleinen Theilungen, die man zuvor mit dem Comparator bestimmt. Die Ablesungsparallaxe des Auges wird durch kleine Spiegel oder durch einen fernen Fixirpunkt vermieden.

Für genauere Beobachtungen kann man ein Mikroskop von mässiger Vergrößerung mit Ocularmikrometer verwenden, mit welchem man jedes Fadenende mit den benachbarten Strichen der kleinen Theilungen vergleicht. Am vollkommensten wird die Messung mittelst eines kleinen Com-

parators mit zwei Mikroskopen ausgeführt, indem man (ohne Benutzung der Theilungen an den Querstäben) auf die zusammengehörigen Fadenenden einstellt und dann den Comparator mit gleicher Stellung der Mikroskope auf einen Normalmaassstab richtet.

Als Aufhängedrähte dienen 0,1 mm dicke weiche Kupferdrähte.

Magnetometer. Als solches kann irgend ein kurzer Magnet mit Ablesespiegel dienen. Die für unseren Zweck passendste Gestalt zeigt Figur 4. Die Nadel kann auf dem mit Gewinde versehenen Stiel gedreht und verstellt werden und wird durch zwei Muttern festgeklemmt. Die Nadel hat Töpler'sche Luftdämpfung und einen drehbaren cylindrischen Kupferdämpfer (Figur 4<sub>a</sub>), von denen der letztere wegen etwaigen Localeinflusses entfernt werden kann. Auch die nach Wiedemann benannte Busssole könnte gebraucht werden. Ich habe das kürzlich beschriebene<sup>1)</sup> kleine Magnetometer mit magnetisirtem Stahlspiegel gebraucht. In diesem Falle ist man auf die in Fig. 2 dargestellte Anordnung angewiesen, in welcher der Drahttring aus der zweiten Gauss'schen Hauptlage wirkt.

Ist jedoch die Magnetnadel drehbar gegen den Spiegel, so kann die Ablenkung auch aus der ersten Hauptlage erfolgen, zu welchem Zwecke die Deckensuspension und der Bifilarring in der Figur um 90° zu drehen sind. Nur wird dann der Ablesespiegel des Bifilargalvanometers gegen den Ring senkrecht gestellt werden, also wegen des lichtver-sperrenden Ringes über dem Querstabe angebracht werden müssen. Für die vorhin erwähnten Schwerpunktsbeobachtungen (p. 754) wird dann ein zweites, gewöhnliches Spiegelchen gefordert. Der Maassstab ist soweit hinter die dem Maassstabe nunmehr parallele Fadenebene zurückzurücken, dass die Fäden auch bei den Ablenkungen frei beweglich bleiben.

Wo der Raum es gestattet, wird man wegen der grösseren Einfachheit die Anordnung nach der zweiten Hauptlage,

1) Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 550. 1882.

d. h. die Aufstellung des Magnetometers im Norden und Süden vorziehen.<sup>1)</sup> Im Folgenden nehme ich diesen Fall an.

Zu der Aufstellung dienen zwei in geeignetem Abstände (je 70 cm in meinem Falle) befindliche hölzerne Stative, über welche man zur Bequemlichkeit ein langes Brett legen kann. Die Höhe ist natürlich so zu wählen, dass die Magnetnadel in die Horizontale des Mittelpunktes des Drahringes zu liegen kommt.

**Abstandsmessung.** Auf dieser Unterlage sind solide Stützen angebracht, welche einen Maassstab für die Magnetometerabstände tragen (Fig. 2). Es genügt hierzu eine Latte mit zwei Marken von genau bekanntem Abstände. Will man aus mehreren Entfernungen ablenken lassen, so erscheint ein in cm getheilter hölzerner oder messingener Stab zweckmässig.

Die Abmessungen finden an dem Aufhängecocon des Magnetometers statt. Denn da man dasselbe Magnetometer im Norden und im Süden beobachtet, so fällt hierbei eine Abweichung des magnetischen Mittelpunktes der Nadel von der Verticalen des Cocons heraus. Letzteres gilt auch von einer etwaigen Unsymmetrie der beiden Magnetometerstellungen gegen den Ringmittelpunkt, wenn dieselbe einige Millimeter nicht überschreitet.

Der Cocon meines Instruments steht von dem Maassstab etwa 7 mm ab. Man vermeidet die Ablesungsparallaxe mittels eines kleinen Spiegels, welcher durch kleine federnde Drahtklemmen auf die Vorderfläche des Maassstabes aufgedrückt wird.

**Hervorbringung der Ablenkungen.** Der Strom wird durch etwa zehn (kleine) Bunsen oder fünfzehn Daniell geliefert und dem Bifilargalvanometer mittelst eines neben dem Ablesefernrohr aufgestellten Commutators zugeführt. Von Wichtigkeit ist hierbei, dass man nicht länger schliesst als nöthig, weil sich sonst infolge Erwärmung des Drahringes Luftströmungen einstellen. In Ermangelung eines

1) Vgl. übrigens § 12, wo die andere Anordnung kurz behandelt wird.

Dämpfers<sup>1)</sup> benutzt man zum Beruhigen der Schwingungen einige Widerstände (etwa zwanzig und zwei Siemens), die man aus- oder einstöpseln kann. Selbstverständlich wird der Commutator beim Stromwenden so gebraucht, dass man zunächst nur unterbricht und erst im Augenblicke des Umkehrens nach der anderen Seite schliesst.

Sind die Schwingungen bis auf einen Scalentheil oder weniger beruhigt, so beurtheilt man die Einstellung aus den Umkehrpunkten.

Beobachtung der Ablenkungen. Im Interesse eines möglichst kurzen Stromschlusses und der gleichzeitigen Ablesung beider Instrumente werden zwei Beobachter wünschenswerth, wenn auch nicht nothwendig sein. Die Ablösungen werden am einfachsten an einer und derselben 2 m langen Ablesescala gemessen. Das mittlere Ablesungsfernrohr bleibt dabei ein für allemal stehen; für die beiderseitigen Beobachtungen des Magnetometers versetzt man ein Fernrohr.

Dieser Gebrauch der nämlichen geradlinigen Scala für Bifilargalvanometer und Magnetometer gewährt den grossen Vortheil, dass man die ganzen Spiegelabstände nur genähert zu kennen braucht, und dass nur die kleinen Unterschiede dieser Abstände genau gemessen werden müssen. Letzteres aber wird sehr einfach durch folgendes Hülfsmittel erreicht.

Spiegelabstände. Die vorhin erwähnte Messlatte, welche dicht hinter der Aufstellungslinie der Instrumente liegt, trägt nahe bei der Mitte und nahe bei den Aufstellungs-orten des Magnetometers drei kleine quer aufgeschraubte Millimeterstäbchen. Zunächst ermittelt man durch einen gespannten feinen Faden, um wieviel der Nullpunkt der mittleren Theilung hinter oder vor der Verbindungslinie der äusseren Nullpunkte liegt.

Es kommt nun offenbar nur darauf an, zu bestimmen, um wieviel der Bifilar Spiegel vor der Verbindungslinie der beiden Stellungen des Magnetometerspiegels liegt. Man

1) Man kann mit dem Bifilarringe allerdings einen Töpler'schen Luftdämpfer oder auch einen Flüssigkeitsdämpfer verbinden, aber bei geschickter Handhabung des Commutators erscheint dies kaum nöthig.



hängt also Senkel über die Maassstäbchen, mittelst deren man durch Visiren den Biflarspiegel, resp. die Coconfäden des Magnetometers in beiden Stellungen auf die Theilungen bezieht. Dass schliesslich auf die Lage des Magnetometerspiegels gegen seinen Cocon und auf die Dicken der Spiegel- und Deckgläser<sup>1)</sup> die gehörige Rücksicht zu nehmen ist, versteht sich von selbst.

Eine etwaige kleine Krümmung der Ablesescala wird mittelst eines gespannten Fadens leicht ermittelt und in Rechnung gesetzt.

Ueber die genaueren Regeln der Rechnung, vgl. § 7. Ein Beispiel durchgeführter Beobachtungen enthält § 8.

#### 6. Fernwirkung eines Stromkreises.

Der Halbmesser eines Kreisstromes sei  $r$ ; ein magnetischer Pol liege in der Stromebene ausserhalb des Kreises im Abstände  $a$  von dessen Mittelpunkt. Stromstärke und Polstärke seien = 1.

Wir denken den Pol als Ursprung von Polarcoordinaten  $\varrho$  und  $\vartheta$ . Der Winkel  $\vartheta$  werde von der Richtung nach dem Mittelpunkte des Stromkreises an gezählt. Die zum Winkel  $\vartheta$  gehörige Richtung schneidet den Stromkreis in zwei Punkten, zu denen die Radien vectoren  $\varrho$  und  $\varrho'$  gehören mögen. Die zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  gelegenen beiden Stromelemente bewirken auf den Magnetpol zusammen eine zur Stromebene senkrechte Kraft  $dk$ :

$$dk = d\vartheta \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'} \right) = d\vartheta \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho \varrho'}.$$

Da nun  $\varrho \varrho' = a^2 - r^2$  und  $\frac{1}{2}(\varrho'^2 - \varrho^2) d\vartheta = df$ , wenn  $df$  das Flächenelement des umflossenen Kreises bedeutet, so kann man auch schreiben:

$$dk = \frac{df}{a^2 - r^2} \frac{2}{\varrho + \varrho'} = \frac{1}{a(a^2 - r^2)} \frac{df}{\cos \vartheta},$$

also:

$$k = \frac{1}{a(a^2 - r^2)} \int \frac{df}{\cos \vartheta}.$$

1) Von einer Wegstrecke, welche durch eine Glasplatte gebildet wird, kommt bekanntlich nur der Bruchtheil  $1/1,53 = \frac{13}{20}$  in Betracht.

Ist  $a$  gegen  $r$  sehr gross, und also  $\cos \vartheta$  merklich gleich Eins, so entsteht die bekannte Beziehung  $k = fa^{-3}$ . Jedemfalls wird, weil  $\cos \vartheta$  zwischen Eins und  $\sqrt{a^2 - r^2} \cdot a^{-1}$  liegt, die Gesamtkraft  $k$  zwischen  $f/a(a^2 - r^2)$  und  $f(a^2 - r^2)^{-3/2}$  liegen.

Zur genaueren Bestimmung nennen wir  $x$  die Senkrechte vom Kreismittelpunkt auf den Radius vector. Dann ist  $df = 2dx \sqrt{r^2 - x^2}$ , ferner  $1/\cos \vartheta = 1 + \frac{1}{2}x^2/a^2 + \frac{3}{8}x^4/a^4 + \dots$ , also:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{a(a^2 - r^2)} \left( \int_{-r}^r df + \frac{1}{a^2} \int_{-r}^r x^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx + \frac{3}{4} \frac{1}{a^4} \int_{-r}^r x^4 \sqrt{r^2 - x^2} dx + \dots \right) \\ &= \frac{1}{a(a^2 - r^2)} \left( f + \frac{1}{a^2} \frac{r^4 \pi}{8} + \frac{3}{4} \frac{1}{a^4} \frac{r^6 \pi}{16} \dots \right) \\ &= \frac{f}{a(a^2 - r^2)} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{r^2}{a^2} + \frac{3}{8} \frac{r^4}{a^4} \dots \right) \end{aligned}$$

Das zweite Correctionsglied wird für unsere Verhältnisse schon fast verschwindend klein.

Dies ist die von dem Strom Eins in einem Kreise auf den Magnetpol Eins ausgeübte Kraft. Die Anzahl der Windungen ist für den Ausdruck gleichgültig, da sie in  $f$  steckt. Als Halbmesser  $r$  gilt der mittlere Halbmesser.<sup>2)</sup> Die Stromstärke  $i$  kommt als Factor zum Ganzen.

Ist an Stelle des Magnetpoles Eins eine verschwindend kurze Nadel vom Magnetismus  $M'$  vorhanden, welche mit der Ringebene den Winkel  $\varphi$  bildet, so kommt  $M' \cos \varphi$  als Factor hinzu. Auf die Nadellänge nimmt man ausreichend Rücksicht durch den Correctionsfactor von  $k$ :

$$1 + \frac{\lambda^2}{a^2} \quad \text{oder:} \quad 1 + 0,6 \frac{\delta^2}{a^2},$$

1) Aus erster Hauptlage, wenn der Pol in der Kreisnormale im Abstände  $a$  vom Mittelpunkt liegt, stellt bekanntlich  $2f/(a^2 + r^2)^{3/2}$  die Kraft dar.

2) Die Dicke  $h$  und Breite  $b$  des Ringes, welche bei den Dimensionen unserer Instrumente vernachlässigt werden können, werden als Correctionen berücksichtigt, wenn man in der Klammer noch  $\frac{15}{32} \frac{h^2}{a^2} - \frac{3}{8} \frac{b^2}{a^2}$  hinzufügt.

3) Nämlich  $1 + \frac{3}{2} \sigma^2/a^2$ , wenn  $\sigma$  den Polabstand bedeutet, der etwa  $= 0,8 \lambda$  ist.

wenn  $\lambda$  die ganze Nadellänge oder  $\delta$  den Durchmesser eines kreisförmigen Magnetspiegels bedeutet.<sup>1)</sup>

6a. Wechselwirkung zwischen schräg gestellten Magneten oder Stromspulen.

Zwei Magnete  $M_1$  und  $M_2$ , im grossen Abstände  $a$  voneinander, mögen mit ihren Nordspitzen gegen eine bestimmte Richtung der Verbindungslinie die Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  bilden. Um die aufeinander ausgeübten Drehungsmomente zu bestimmen, zerlegt man jeden Magnet in zwei Componenten in und senkrecht zu der Verbindungslinie. Die ersteren wirken dann auf die letzteren aus der „ersten Hauptlage“, die letzteren auf die ersteren aus der „zweiten Hauptlage“.

Danach findet man z. B. das von  $M_1$  auf  $M_2$  ausgeübte Drehungsmoment gleich:

$$- \frac{M_1 M_2}{a^3} (2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + \sin \gamma_1 \cos \gamma_2).$$

7. Genauere Berechnung der bifilargalvanischen Methode.

Es sei<sup>2)</sup>:

$H$  die gesuchte erdmagnetische Horizontalintensität,

$D$  die statische Directionskraft der bifilaren Aufhängung (vgl. hierüber § 3, p. 750),

$r$  der mittlere Halbmesser des Bifilarringes,

$M'$  der Magnetismus der Magnetometernadel,

$\alpha = M'/H$  dessen Verhältniss zum Erdmagnetismus,

$\Theta$  der Torsionscoefficient der Nadel,

$\lambda$  die Länge der Nadel,

$a$  der Abstand zwischen dem Ringmittelpunkt und der

1) Ueber die Correction an kreisförmigen Magnetnadeln verweise ich auf eine künftige Mittheilung. Bei Beobachtungen aus der ersten Hauptlage ist zu setzen:  $1 - \frac{1}{3} \lambda^2/a^2$ , welcher Ausdruck auch, indem man  $\lambda$  durch  $d$  ersetzt, für unsere Verhältnisse hinreichend genau auf kreisförmige Magnetnadeln angewandt werden kann.

2) Für  $r$  und  $M$  oder  $\alpha$  genügt eine genäherte Kenntniss,  $f$  und  $i$  fallen heraus.  $\alpha$  bestimmt man in bekannter Weise, indem man die Magnetometernadel auf ein zweites Magnetometer (Busssole) ablenkend wirken lässt. Beträgt diese Ablenkung z. B. aus der ersten Hauptlage im Abstände  $\mathcal{A}$  den Winkel  $\alpha$ , so ist  $\alpha = \frac{1}{2} \mathcal{A}^{-2} \operatorname{tg} \alpha$ .

Nadel (gemessen als halber Abstand des Aufhängecocons in beiden Magnetometerstellungen),

$\alpha$  die Ablenkung des Bifilargalvanometers,

$\varphi$  die gleichzeitige Ablenkung des Magnetometers,

$f$  die Stromfläche,

$i$  die Stromstärke.

Bifilargalvanometer. Der Stromring erfährt ein Drehungsmoment

von der bifilaren Aufhängung  
vom Erdmagnetismus

$$-D \sin \alpha$$

$$Hfi \cos \alpha$$

von der Nadel<sup>1)</sup>  $\frac{M' fi}{a^3} (2 \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi).$

Folglich ist, indem wir zugleich  $M'$  durch  $\pi H$  ersetzen:

$$(1) \quad Hfi = \frac{D \sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{\pi}{a^3} (2 \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi)}.$$

Magnetometer. Die Drehungsmomente betragen von dem Erdmagnetismus und dem Faden:

$$-HM'(1 + \Theta) \sin \varphi;$$

von dem Strom in der Rolle (vgl. § 6 und 6<sub>a</sub>):

$$\frac{M' fi}{a(a^2 - r^2)} \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{r^2}{a^2} + \frac{3}{64} \frac{r^4}{a^4} \right) \left( 1 + \frac{\lambda^2}{a^2} \right) (\cos \alpha \cos \varphi - 2 \sin \alpha \sin \varphi).$$

Das Gleichgewicht dieser Kräfte sagt also:

$$(2) \quad \frac{H}{fi} = \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi}{a(a^2 - r^2) \operatorname{tg} \varphi (1 + \Theta)} \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{r^2}{a^2} + \frac{3}{64} \frac{r^4}{a^4} \right) \left( 1 + \frac{\lambda^2}{a^2} \right).$$

Berechnung von  $H$ . Die Multiplication der Gleichungen (1) und (2) ergibt:

$$H^2 = \frac{D}{a(a^2 - r^2)(1 + \Theta)} \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi}{1 + \frac{\pi}{a^3} (2 \cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi)} \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{r^2}{a^2} + \frac{3}{64} \frac{r^4}{a^4} \right) \left( 1 + \frac{\lambda^2}{a^2} \right)$$

Für die Rechnung kann man in Anbetracht der Kleinheit von  $\pi/a^3$  den Factor dieser Grösse = 2 setzen, indem  $\cos \varphi$  nahe gleich 1 ist und  $\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi$  vernachlässigt werden kann. Fasst man ferner die Correctionsglieder unter Vernachlässigung ihrer Producte und höheren Potenzen zusammen, so wird die Horizontalintensität  $H$  gegeben durch:

1) Denn nach der Bezeichnungsweise des § 6 ist hier  $\varphi = \gamma_1$ ,  $\alpha - \frac{1}{2}\pi = \gamma_2$ , also  $\cos \varphi_2 = \sin \alpha$  und  $\sin \gamma_2 = -\cos \alpha$ .

$$H^2 = \frac{D}{a(a^2 - r^2)(1 + \Theta)} \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{r^2}{a^2} + \frac{3}{64} \frac{r^4}{a^4} + \frac{\lambda^2}{a^2} - 2 \frac{x}{a^2} \right) \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} (1 - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi).$$

Bei Anwendung einer kreisförmigen Magnetscheibe vom Durchmesser  $\delta$  ist  $0,6 \delta^2$  anstatt  $\lambda^2$  zu setzen (vgl. p. 760.)

Vereinfachung der Rechnung bei nahe gleichen Scalenabständen und Ausschlägen beider Instrumente. Werden beide Instrumente an derselben Scala abgelesen, wie in § 4 empfohlen wurde, sodass die beiden Scalenabstände nahe gleich sind, und wählt man ferner den Abstand  $a$  derartig, dass auch die Ausschläge nahe gleich gross werden, so vereinfacht sich die Rechnung noch weiter. Besonders bei wiederholten Beobachtungen mit der gleichen Aufstellung, wo also bis auf die Winkel  $\alpha$  und  $\varphi$  alle Theile der Formel gleich bleiben, stellt sich dann eine grosse Einfachheit heraus.

Es seien, wobei der Index für das Magnetometer gilt:

$n$  und  $n' = n + \delta$  die Scalenausschläge,

$A$  und  $A' = A + \varepsilon$  die Scalenabstände.

Wir schreiben:

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} (1 - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} (\cos \alpha - 2 \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi).$$

Nun ist unter Vernachlässigung der vierten Potenzen von  $n/A$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{2A} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{n^2}{A^2} \right), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{n'}{2A'} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{(n + \delta)^2}{(A + \varepsilon)^2} \right),$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{n}{n'} \frac{A'}{A} \left[ 1 - \frac{1}{4} \frac{n^2}{A^2} + \frac{1}{4} \frac{(n + \delta)^2}{(A + \varepsilon)^2} \right] = \frac{n}{n'} \frac{A'}{A} \left[ 1 + \frac{n^2}{2A^2} \left( \frac{\delta}{n} - \frac{\varepsilon}{A} \right) \right],$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{8} \frac{n^2}{A^2}, \quad 2 \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{4} \frac{n}{A} \frac{n + \delta}{A + \varepsilon} = \frac{n^2}{2A^2} \left( 1 + \frac{\delta}{n} - \frac{\varepsilon}{A} \right).$$

Hieraus folgt leicht der bequeme Ausdruck:

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} (1 - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi) = \frac{n}{n'} \frac{A'}{A} \left( 1 - \frac{3}{8} \frac{n^2}{A^2} \right).$$

### 8. Beispiel der bifilargalvanischen Methode.

Mit W. Kohlrausch gemeinschaftlich habe ich im magnetischen Observatorium des Physikal. Instituts Würzburg am 21. October 1881 folgende Bestimmung ausgeführt.

Der Bifilarkörper wog (in der Luft) . . . . . 152,09 g  
 Hierzu das halbe Gewicht der Aufhängedrähte . . . . . 0,16 „  
 $m = 152,25 \text{ g.}$

Die Schwerebeschleunigung für Würzburg . . . . .  $g = 980,99 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$   
 Die mittlere Fadenlänge ohne Strom . . . . . 276,35 cm  
 Der angewandte Strom verlängert um . . . . . +0,01 „

Die Fäden bestanden aus 0,090 mm dickem Kupferdraht;  
 $\rho = 0,0045 \text{ cm}$ ;  $E = 124 \cdot 10^7 \text{ Gr.} = \text{Gew./qcm.}$  Folglich ist wegen der Drahtsteifheit von der gemessenen Länge abzuziehen (vgl. p. 750):

$$\rho^2 \sqrt{\frac{2\pi E}{m}} = 0,0045^2 \sqrt{\frac{2\pi \cdot 124 \cdot 10^7}{152}} = 0,14 \text{ cm.}$$

Die in Rechnung zu setzende Fadenlänge beträgt also:  
 $276,35 + 0,01 - 0,14 = l = 276,22 \text{ cm}$

Der obere und untere Fadenabstand . . . . .  $e_1 = 9,986 \text{ „}$   
 $e_2 = 9,969 \text{ „}$

Die Directionskraft der Schwere ist daher (p. 747):

$$D_1 = g m \frac{e_1 e_2}{4l} = 980,99 \cdot 152,25 \frac{9,986 \cdot 9,969}{4 \cdot 276,22} = 13458 [\text{cm}^2 \cdot \text{g. sec}^{-2}].$$

Das elastische Torsionsmoment der Fäden (vgl. p. 749):

$$D_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,0045^4 \cdot 124 \cdot 10^7 \cdot 981}{5 \cdot 276,3} = 2,3 [\text{cm}^2 \cdot \text{g. sec}^{-2}].$$

Hiernach beträgt die ganze statische Directionskraft des Bifilars:  $D = D_1 + D_2 = 13460 [\text{cm}^2 \cdot \text{g. sec}^{-2}].$

Abstand der beiden Stellungen des Magnetometerfadens voneinander 139,908 cm . . . . .  $a = 69,954 \text{ cm}$

Halbmesser des Bifilarrings . . . . .  $r = 9,7 \text{ „}$

(Dicke 0,5 und Breite 0,75 cm der Windungslage sind zu vernachlässigen.)

Die Magnetometernadel war eine Kreisscheibe von . . . . .  $\delta = 2,1 \text{ cm.}$

Magnetisches Moment derselben im Verhältniss zum Erdmagnetismus  $\kappa = 167$   $2 \frac{\kappa}{a^3} = 0,00097$

Torsionscoefficient derselben . . . . .  $\Theta = 0,00020$

Hieraus findet sich:

$$\frac{1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} + 0,6 \frac{\delta^2}{a^2} - 2 \frac{\kappa}{a^3}}{a (a^2 - r^2) (1 + \Theta)} = 0,000\,002\,983\,8 [\text{cm}^{-3}].$$

Scalenabstand des Biflarspiegels . . . . .  $A = 2986,4$  mm,  
des Magnetometerspiegels . . . . .  $A' = 2999,4$  „

Ablenkungsbeobachtungen. Die Zahlen bedeuten die Einstellungen an der Scala bei wiederholtem Commutiren des Stromes. Jede Zahl ist das Mittel aus drei an beiden Instrumenten gleichzeitig gemachten Ablesungen.

Bifilar		Magnetometer nördlich	
mm	mm	mm	mm
1163,81	820,20	1875,21	1507,33
1163,48	820,73	1874,81	1508,30
1163,05		1874,54	
Mittel 1163,45	820,46	1874,85	1507,81

Halber Unterschied  $n = 171,49$  mm

$n' = 183,52$  mm

Ebenso mit südlich aufgestelltem Magnetometer:

$n = 170,87$  mm

$n' = 182,39$  mm

Mittel  $n = 171,18$  „

$n' = 182,95$  „

Hieraus berechnet sich:

$$\frac{\sin \alpha}{\tan \varphi} (1 - 2 \tan \alpha \tan \varphi) \text{ oder } \frac{n}{n'} \frac{A'}{A} \left( 1 - \frac{5}{8} \frac{n^2}{A^2} \right) = 0,9378.$$

Endlich  $H^2 = 13460.0,000\,002\,983\,8.0,9378 \text{ cm}^{-1} \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2}$ ,

$$H = 0,19407 \text{ cm}^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{g}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Zwei am gleichen Tage mit anderen Stromstärken (Bifilar-ausschlag etwa 110, resp. 81 mm) angestellte Bestimmungen gaben, auf gleichen Stand des Intensitätsvariometers reducirt,  $H$  gleich 0,19409, resp. 0,19406.

#### 9. Die bifilarmagnetische Methode der erdmagnetischen Intensitätsbestimmung.

An Stelle des Stromes im Bifilarring, welchen man commutirt, kann man einen Magnet anwenden, den man in der Bifilarsuspension umlegt.

Vortheile dieses Verfahrens sind in einem magnetischen Observatorium die Vermeidung galvanischer Einrichtungen, dann die freie Wahl der Aufhängedrähte ohne Rücksicht auf electrisches Leitungsvermögen, die Vermeidung hygroskopischer Substanzen. Nachtheilig ist die bei dem Umlegen des Magnets mit der Hand nicht zu vermeidende Erschütterung und die Unkenntniss der Vertheilung des Magnetismus im Stabe. (Vgl. hierüber jedoch die Bemerkung am Schlusse dieses Paragraphen.)



Jedenfalls resultirt ein instrumentell und in der Beobachtung höchst einfaches Verfahren.

Ein auf den ersten Blick sich bietendes Bedenken wird leicht beseitigt. Man kann nämlich auch bei sorgfältigster Ausführung der Instrumente nicht verbürgen, dass die magnetische Axe nach dem Umlegen in Bezug auf den Ablesespiegel genau dieselbe Richtung hat. Allein glücklicherweise kommt hierauf nichts an. Denn das auf den Magnet ausgeübte ablenkende erdmagnetische Drehungsmoment steht mit dem Cosinus des Winkels, den der Magnet mit der Ostwestlage bildet, im Verhältniss. Da dieser Winkel klein bleibt, so bewirkt eine Aenderung desselben um einige Minuten keine für uns merkliche Aenderung des Cosinus.

Die Suspension des absoluten Bifilarmagnetometers unterscheidet sich nicht wesentlich von derjenigen des Bifilargalvanometers; nur kann man den oberen und den unteren Querstab natürlich aus Metall anfertigen, wobei man, um Gewicht zu sparen, die Seitenflächen des unteren Stabes ausfraist (einen Doppel-T-Querschnitt herstellt). Nur an den Enden und zur Aufnahme des Magnetträgers wird der Stab solid gelassen (Taf. V, Fig. 3).

Der untere Suspensionsquerstab trägt in der Mitte nach unten einen Stiel. An diesem sitzt der Spiegel sowie unten ein Schiffchen mit scharfen Kanten, in welches der cylindrische Hohlmagnet (16 cm lang, 12 mm innerer und 16 mm äusserer Durchmesser) mit zwei Nuten eingelegt wird. Marken neben diesen Nuten lassen die Umlegung um  $180^\circ$  in derselben Horizontalebene erzielen. Die Nuten müssen natürlich symmetrisch zum Schwerpunkt des Magnets eingedreht sein.

Da das magnetische Moment des Stabes grösser ausfällt, als dasjenige des Stromringes, so dürfen die Querstäbe etwas länger sein, als bei dem Bifilargalvanometer, nämlich etwa 12 cm betragen.

Zu den Aufhängedrähten empfiehlt sich wegen grosser Tragkraft verbunden mit kleinem Elasticitätsmodul das Messing.<sup>1)</sup>

1) Messingdrähte von 0,06 mm Durchmesser habe ich aus der Drahtfabrik von J. L. Hüttlinger in Schwabach erhalten. Zum Ausglühen

Da man bei dem Umlegen des Magnets die Aufhängung erschüttert, so wird zur nachträglichen Beruhigung ein Dämpfer gefordert, etwa aus electrolytischem Kupfer, dessen Localeinfluss man bestimmt, oder einfacher und bei den starken Directionskräften ohne Bedenken ein kreuzförmiger Flüssigkeitsdämpfer (Taf. V, Fig. 3).

Bezüglich der Abmessungen, der Herstellung gleicher Fadenspannungen, der Bestimmung des Elasticitätseinflusses, der Beobachtung beider Ablenkungen kann auf p. 754 ff. verwiesen werden. Bei der Herstellung, resp. Prüfung der gleichen Fadenspannung (p. 754) wird allerdings verlangt, dass man durch genäherte Magnete eine ostwestliche Directions-kraft bewirkt, da der Erdmagnetismus allein bei der unifilaren Hebung den Magnet aus seiner Lage drehen würde. Eine spätere Controle des einmal bestimmten Gewichtes des Bifilars ist unnöthig, da keine hygroskopische Theile vorhanden sind.

Nur über die Vertheilung des Magnetismus im Stabe (die sogenannte Lage der Pole für Fernwirkung) ist noch etwas zu sagen. Nach einer grossen Zahl von Versuchen, die ich mit Dr. Hallock angestellt habe, glaube ich, dass die Annahme, der Polabstand betrage  $\frac{5}{6}$  der Stablänge, immer soweit richtig sein wird, dass für die hier in Betracht kommenden Verhältnisse der mögliche Fehler des Resultates  $\frac{1}{3000}$  nicht erreicht.

Will man sich hierauf nicht verlassen, so hat man einmal eine Beobachtung aus zwei Entfernungen anzustellen und daraus nach den Gauss'schen Vorschriften den Polabstand zu bestimmen.

Hierüber und über die Berechnungen siehe den nächsten Paragraphen. Eine ausgeführte Messung enthält § 11.

#### 10. Berechnung des bifilarmagnetischen Verfahrens.

Die Zeichen  $H$ ,  $D$ ,  $M'$ ,  $\alpha$ ,  $\Theta$ ,  $a$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi$  sollen ihre Bedeutung von p. 761 und 762 behalten. Ferner bedeute:

wickelt man ein Quantum auf eine hohle Messingrolle, umgibt es mit einem dünnen Blech und erhitzt von innen mit einer Gasflamme.

$M$  den Magnetismus des Bifilarstabes,  
 $d$  den Abstand seiner Pole voneinander.

Bifilarmagnetometer. Dasselbe erleidet die Drehungsmomente:

$$\begin{array}{ll} \text{von der bifilaren Aufhängung} & -D \sin \alpha, \\ \text{vom Erdmagnetismus} & HM \cos \alpha, \\ \text{von der Magnetometernadel} & 2 \frac{M \cdot H_x}{a^3} \cos \alpha, \end{array}$$

indem wir in dieser letzten Correctionsgrösse auf die kleine Drehung der Nadel keine Rücksicht nehmen.

Also sagt das Gleichgewicht:

$$(1) \quad H \cdot M = \frac{D \sin \alpha}{\cos \alpha \left(1 + 2 \frac{x}{a^3}\right)}.$$

Magnetometer. Die Drehungsmomente sind:  
 vom Erdmagnetismus  $-HM'(1 + \Theta) \sin \varphi$ ,  
 vom Bifilarmagnet<sup>1)</sup>:

$$\frac{MM'}{a^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{d^2}{a^2}\right) \left(1 + \frac{\lambda^2}{a^2}\right) (\cos \alpha \cos \varphi - 2 \sin \alpha \sin \varphi).$$

Die Summe gleich Null gesetzt gibt:

$$(2) \quad \frac{H}{M} = \frac{\left(1 - \frac{3}{2} \frac{d^2}{a^2}\right) \left(1 + \frac{\lambda^2}{a^2}\right) (\cos \alpha - 2 \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi)}{a^3 (1 + \Theta) \operatorname{tg} \varphi}.$$

Berechnung von  $H$ . Die Multiplication der Gleichungen (1 und 2) gibt unter Einführung einiger erlaubter Kürzungen:

$$H^2 = \frac{D}{a^3 (1 + \Theta)} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{d^2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{a^2} - 2 \frac{x}{a^3}\right) \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} (1 - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi).$$

Den Polabstand  $d$  setzt man gleich  $\frac{5}{8}$  der Stablänge. Will man sich hierauf nicht verlassen, so stellt man die Beobachtung aus zwei Abständen  $a$  und  $a'$  an, von denen der eine um ein Drittel bis ein Halb grösser sei, als der andere.<sup>2)</sup> Die Combination beider Beobachtungen liefert dann:

1) Vorausgesetzt, dass die vierte Potenz von  $d/2a$  gegen Eins verschwindet. Vgl. z. B. Kohlrausch, Leitfaden der prakt. Physik vierte Aufl. p. 269.

2) Verfügt man über ein Intensitätsvariometer, so beobachtet man das letztere gleichzeitig und reducirt die beobachteten  $\alpha$   $\alpha'$   $\varphi$   $\varphi'$  auf gleiche Intensität.

$$\delta^2 = \frac{a^2 a'^2}{a^2 - a'^2} \left( 1 - \frac{a'^3 \operatorname{tg} \varphi' \sin \alpha}{a^3 \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha'} \frac{1 - 2 \frac{x}{a^3} + \frac{\lambda^2}{a^2}}{1 - 2 \frac{x}{a'^3} + \frac{\lambda'^2}{a'^2}} \frac{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi}{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \varphi'} \right).$$

Diesen ein für allemal ermittelten Werth setzt man in  $H^2$  ein.

Besteht die Magnetometernadel aus einem kreisförmigen Spiegel vom Durchmesser  $\delta$ , so ist  $0,6 \delta^2$  anstatt  $\lambda^2$  zu setzen (vgl. p. 760).

Bei nahe gleichem  $\alpha$  und  $\varphi$  kann wieder von der einfachen Rechnung (p. 763) Gebrauch gemacht werden.

#### 11. Beispiel der bifilarmagnetischen Methode.

Messung im nordöstlichen Zimmer des physikalischen Instituts am 16. Februar 1882:

Der Bifilarkörper wog . . . . .	168,130 g
Hierzu das halbe Drahtgewicht . . . . .	0,073 g
	<hr/>
	$m = 168,203 \text{ g}$
	$g = 980,99 \text{ cm. sec}^{-2}.$
Mittlere Fadenlänge . . . . .	266,09 cm

Die Fäden waren 0,06 mm dicke Messingdrähte;  $\rho = 0,003 \text{ cm}$ ,  $E = 90 \cdot 10^7 \text{ Gr} = \text{Gew./qmm}$ . Also ist wegen Drahtsteifigkeit von der gemessenen Fadenlänge abzuziehen (vgl. p. 750):

$$\rho^2 \sqrt{\frac{2\pi E}{m}} = 0,003^2 \sqrt{\frac{2\pi \cdot 90 \cdot 10^7}{168}} = 0,05 \text{ cm}.$$

Demnach ist zu setzen:  $l = 266,09 - 0,05 = 266,04 \text{ cm}$ . Der obere und untere Fadenabstand  $e_1 = 9,956$ ,  $e_2 = 10,010 \text{ cm.}^1$  Das elastische Torsionsmoment der Fäden (vgl. p. 749).

$$D_2 = \frac{2\pi}{5} \frac{0,003^4 \cdot 90 \cdot 10^7 \cdot 981}{266} = 0,4 [\text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2}]$$

wird so gut wie unmerklich.

Die statische Directions-kraft der bifilaren Aufhängung beträgt also:

$$D = g m \frac{e_1 e_2}{4l} + D_2 = 168,20 \cdot 980,99 \frac{9,956 \cdot 10,010}{4 \cdot 266,04} + 0,4$$

$$= 15453 [\text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2}]$$

1) 12 bis 13 cm Abstand würde günstiger sein.

Die Orte des Magnetometercocons bei der Aufstellung im Norden und Süden hatten einen Abstand voneinander 180,00 cm,  $a = 90,00$  cm. Länge des Bifilarmagnets = 16,0 cm, also der Polabstand . . . . .  $d = \frac{2}{3} \cdot 16,0 = 13,3 \text{ cm}^1$

Die Magnetometermeternadel war eine

Kreisscheibe von . . . . .  $\delta = 2,1 \text{ cm.}$

Magnetisches Moment derselben im Ver-

hältniss zum Erdmagnetismus  $\kappa = 165$   $2 \frac{\kappa}{a^3} = 0,00045$  „

Torsionscoëfficient derselben . . . .  $\Theta = 0,00020$  „

Hieraus berechnet sich:

$$1 - \frac{3}{8} \frac{d^2}{a^2} + 0,6 \frac{\delta^2}{a^2} - 2 \frac{\kappa}{a^3} \frac{1}{a^2(1 + \Theta)} = 0,000\,001\,360\,1 \text{ cm}^{-3}.$$

Scalenabstand des Bifilarspiegels . . . .  $A = 2482,9 \text{ mm.}$

„ des Magnetometerspiegels .  $A' = 2485,9$  „

Die gleichzeitigen Ablenkungsbeobachtungen bei dem Einlegen des Magnets mit dem Nordpol nach Osten oder Westen ergaben die Winkel als Mittel aus mehreren sehr gut übereinstimmenden Ablesungen:

Unifilar nördlich  $2\alpha = 5^\circ 8' 18''$   $2\varphi = 2^\circ 52' 2''$

„ südlich  $5^\circ 8' 24''$   $2^\circ 51' 46''$

Im Mittel also  $\alpha = 2^\circ 34' 10''$   $\varphi = 1^\circ 25' 57''^2$

Hieraus berechnet sich:

$$\frac{\sin \alpha}{\tan \varphi} (1 - 2 \tan \alpha \tan \varphi) = 1,7887$$

und:  $H^2 = 15453.000\,001\,3601.1,7887 \text{ cm}^{-1} \cdot \text{g. sec}^{-2}$

$$H = 0,19389 \text{ cm}^{-1/2} \cdot \text{g}^{1/2} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

## 12. Regeln für Beobachtungen aus der ersten Hauptlage.

Im Voranstehenden ist die nordsüdliche Aufstellung der Instrumente angenommen worden, wobei der Bifilarring oder

1) Zwei Beobachtungen aus den Abständen 60 und 90 cm (p. 768 u. 769) ergaben  $d = 13,6$  cm also nahe Bestätigung der hier gemachten Annahme. Das Resultat würde durch diesen Werth nur um 0,00004 geändert werden.

2) Um diese Beobachtungen an einer und derselben 2 m langen Scala anzustellen, musste das Fernrohr gegen die Spiegelnormale des Magnetometers verschoben werden. Die hieraus entstehende etwas weitläufigere Rechnung vermeidet man durch eine Scala von 2200 mm, welche z. B. aus drei Glastheilungen auf einem Stabe zusammengesetzt sein kann.

der Bifilarmagnet aus der von Gauss so genannten zweiten Hauptlage wirkt. Wenn aber, etwa der Lage des Beobachtungsraumes wegen, die entgegengesetzte Anordnung gewünscht wird, so steht dieser nichts im Wege. Es treten nur zunächst folgende instrumentelle Ansprüche ein. (p. 756).

**Magnetometer.** Dasselbe soll einen zur Nadelrichtung senkrecht gestellten Spiegel haben.

**Bifilargalvanometer.** Der Ablesespiegel kommt jetzt senkrecht zur Ebene des Ringes zu liegen und ist deswegen oberhalb des Querstabes anzubringen, was mittelst eines einfachen Trägers geschieht. Zur Prüfung der gleichen Fadenspannung kann man denselben Spiegel gebrauchen, wenn man ihn zu diesem Zwecke um  $90^\circ$  dreht; besser wird ein zweites Spiegelchen zu diesem Zwecke angesetzt. Die Hebevorrichtung wird an der Messlatte (welche jetzt hinter der Fadenebene liegt) nach vorn angebracht.

**Bifilarmagnetometer.** Hier dreht man einfach die Fadenebene um  $90^\circ$ , sodass die letztere zum Magnet senkrecht steht, wodurch alle Abänderungen unnöthig werden. Bei dem Bifilargalvanometer ist diese Drehung nicht gestattet, weil der Strom in den Drähten sonst mitwirken würde, was zu merklichen Correctionen führt.

**Berechnung.** Wir können uns grossentheils auf das Frühere beziehen (§ 7 und 10, wo auch die Bezeichnungen nachzusehen sind).

In den Gleichgewichtsbedingungen für das Bifilar tritt nur der Unterschied auf, dass der Localeinfluss des Magnetometers jetzt den Erdmagnetismus abschwächt, und dass der Factor 2 nun wegfällt. Man hat also:

$$(1) \quad H \cdot f i, \text{ bez. } H \cdot M = \frac{D \sin \alpha}{\cos \alpha \left(1 - \frac{\pi}{a^3}\right)}.$$

Das vom Bifilargalvanometer auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment beträgt (vgl. die Noten p. 760. 761 und § 6<sub>a</sub>):

$$\frac{f i \cdot M}{(a^2 + r^2)^{3/2}} (2 \cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{a^2}\right).$$

Setzt man diesen Ausdruck dem erdmagnetischen und Torsionsmoment  $HM'(1 + \Theta) \sin \varphi$  gleich, so kommt:

$$(2_a) \quad \frac{H}{f^2} = \frac{2 \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi}{(a^2 + r^2)^{3/2} (1 + \Theta) \operatorname{tg} \varphi} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{a^2}\right).$$

Das Drehungsmoment vom Bifilarmagnetometer auf die Nadel beträgt<sup>1)</sup>:

$$\frac{MM'}{a^3} (2 \cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{a^2}\right),$$

und wir erhalten wie oben:

$$(2_b) \quad \frac{H}{M} = \frac{2 \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi}{a^3 (1 + \Theta) \operatorname{tg} \varphi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{a^2}\right).$$

Durch Multiplication der Gleichungen (1) und (2<sub>a</sub>), bez. (1) und (2<sub>b</sub>) erhalten wir nach erlaubten Vereinfachungen die Intensität  $H$ ,

für die bifilargalvanische Methode:

$$H^2 = \frac{2D}{(a^2 + r^2)^{3/2} (1 + \Theta) \operatorname{tg} \varphi} \sin \alpha (1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{x}{a^3}\right);$$

für die bifilarmagnetische Methode:

$$H^2 = \frac{2D}{a^3 (1 + \Theta) \operatorname{tg} \varphi} \sin \alpha (1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{x}{a^3}\right).$$

Soll der magnetische Polabstand  $d$  durch einen Versuch bestimmt werden, so geschieht dies durch Beobachtung aus zwei Entfernungen. Der p. 769 für  $\frac{3}{8} d^2$  gegebene Ausdruck stellt hier den Werth  $-\frac{1}{2} d^2$  dar.

Würzburg, September 1882.

1) Vgl. z. B. Kohlrausch, Leitfaden etc. 4. Aufl. p. 268.



## II. Die Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass; von E. Dorn.

Zu einer Zeit, als von absoluten Widerstandsmessungen erst die Arbeiten von Hrn. W. Weber, der Commission der British Association, von Hrn. Kohlrausch, Hrn. Lorenz und Hrn. H. F. Weber vorlagen, fasste ich den Plan, mich selbst mit der Aufgabe zu beschäftigen.

Die Anfertigung der Apparate und einige Unfälle verzögerten die Anstellung der definitiven Messungen bis zum Frühjahr 1881, und meine persönlichen Verhältnisse erlaubten mir erst vor kurzem die Reduction der Beobachtungen zu vollenden.

Inzwischen ist nun eine grosse Zahl von Arbeiten über denselben Gegenstand erschienen; ferner hat der electriche Congress zu Paris im Herbst 1881 beschlossen, eine internationale Commission mit der Darstellung des „Ohm“ durch die Länge einer Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt zu beauftragen.

Trotzdem habe ich mich entschlossen, meine Resultate mitzutheilen, und zwar in einer Form, welche ein Urtheil über die angewandte Methode und ihre Durchführung gestattet. Denn einmal meine ich, dass die sorgfältige Ausarbeitung und Prüfung einer neuen Combination auf diesem Gebiet immer einen gewissen Werth behält; andererseits scheint mir mein Verfahren einige Vorzüge zu besitzen und dürfte insbesondere eine willkommene Ergänzung zu der von Hrn. Kohlrausch benutzten zweiten Weber'schen Methode sein.

Die einzigen auszumessenden Drahtwindungen sind die wenigen, nur eine Lage bildenden Umgänge einer Tangentenbusssole von grossen Dimensionen, die frei und offen da liegen, sodass die Messung sich mit aller wünschenswerthen Schärfe anstellen und jederzeit wiederholen lässt, wodurch alle von Hrn. G. Wiedemann gegen die Ausmessung von Drahtrollen erhobenen Bedenken<sup>1)</sup> in Wegfall kommen.

1) G. Wiedemann, Electrotechn. Zeitschr. Jahrg. 3. p. 260. 1882. S. daselbst auch die Literatur.

Der Einfluss des Extrastromes auf das Endresultat übersteigt nicht 0,1 Proc., ferner braucht man kein astatisches Nadelpaar, sondern kann einen einzelnen kräftigen Magnet verwenden, der eine grössere Garantie der Beständigkeit gewährt und insbesondere die Bestimmung des Trägheitsmomentes erleichtert.

Die Hauptschwäche hat die Methode mit der von Hrn. Kohlrausch angewandten zweiten Weber'schen gemeinsam, nämlich dass die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus quadratisch in das Resultat eingeht. Während aber bei Hrn. W. Weber dieselbe im Zähler steht<sup>1)</sup>, kommt sie bei mir in den Nenner, sodass eine abwechselnde Verwendung beider Methoden an demselben Orte eine Elimination des Erdmagnetismus erlauben würde.

Diese angedeutete Combination wird dadurch noch erleichtert, dass beiden Methoden der grösste Theil der Apparate gemeinsam ist.

Ich darf ferner wohl die Versicherung hinzufügen, dass ich bei der Anstellung und Reduction der Beobachtungen keine Mühe gescheut habe, was durch die gute Uebereinstimmung der Resultate bestätigt wird. Die reducirten Messungen der Horizontalintensität weichen von ihrem Mittel um  $\frac{1}{8000}$  ab, die absoluten Werthe der Siemens'schen Einheit um weniger als  $\frac{1}{4000}$ .

Wo irgend möglich, bin ich bemüht gewesen, für jede der Messungen eine Controle zu finden.

#### Allgemeine Uebersicht.

Bezeichnet  $q$  das Drehungsmoment des Stromes 1 auf den Magnet des Galvanometers,  $K$  das Trägheitsmoment des Magnets,  $T_0$  seine Schwingungsdauer bei geöffnetem Multiplikator,  $\lambda$  und  $\lambda_0$  das logarithmische Decrement für den absoluten Widerstand  $w$  des Stromkreises und bei geöffnetem Multiplikator, so ist<sup>2)</sup>:

1) cf. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 6. p. 14. 1874.

2) l. c. p. 13.

$$(1) \quad q^2 = \frac{2wK}{T_0} \left[ \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right]. \dagger$$

Ist ferner die Ablenkung für den stationären Strom  $i$  in absolutem Winkelmaass  $\varphi$ , und setzt man:

$$(2) \quad \varphi = pi,$$

so ist für hinreichend kleine Ablenkungen  $p$  eine Constante, welche mit  $q$  durch die Gleichung zusammenhängt:

$$(3) \quad q = p \frac{\pi^2 K}{T_0} \cdot \dagger$$

Der Grundgedanke der Methode besteht nun darin,  $p$  durch Vergleichung mit einer Tangentenbussole zu bestimmen, wodurch die Methode als eine Modification der dritten Weber'schen charakterisirt wird.

Sei zu dem Ende die Tangentenbussole von  $\nu$  Windungen des mittleren Radius  $R$  in den Hauptstrom  $J$  eingeschaltet, welcher sich zwischen einem Widerstande  $w_n$  und dem das Galvanometer enthaltenden Zweige vom Gesamtwiderstande  $w_g$  theilt, sei  $H$  die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus und  $\Phi$  die Ablenkung der Tangentenbussole,  $\varphi$  die des Galvanometers, so ist:

$$(4) \quad J = \frac{HR}{2\pi\nu} \operatorname{tg} \Phi, \dagger$$

$$(5) \quad i = \frac{w_n}{w_n + w_g} J,$$

Ist endlich der Werth des in (1) vorkommenden absoluten Widerstandes  $w$  in Siemens'schen Einheiten  $W$ , und ist 1 S.-E. =  $\sigma$  absoluten Einheiten, so ist  $w = W\sigma$ , und man erhält durch Elimination aus den Gleichungen (1) bis (5):

$$(6) \quad \sigma = \frac{2\pi^2 \nu^2}{H^2 R^2} \frac{\varphi^2}{\operatorname{tg}^2 \Phi} \left( \frac{w_g + w_n}{w_n} \right)^2 \frac{K}{T_0^2 W} \left[ \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right]. \dagger$$

Diese Gleichung zeigt deutlich, wie  $\sigma$  von den einzelnen Grössen abhängt, und welche Messungen vorzunehmen sind.

Vor Beginn der Beobachtungen ist  $H$  für den Ort des Magnets der Tangentenbussole zu bestimmen und

† an einer Formel bedeutet, dass dieselbe später durch eine strengere ersetzt werden wird.

hieraus der während derselben geltende Werth abzuleiten, ebenso sind  $R$  und  $K$  vorgängig zu ermitteln. Von Widerständen braucht man das Verhältniss von  $w_n$  und  $w_g$ ,  $W$  aber in S.-E. Die eigentliche Beobachtung zerfällt in die Vergleichung des Galvanometers mit der Tangentenbussole, die Bestimmung der Schwingungsdauer und der Dämpfungen.

Die noch anzubringenden Correctionen beziehen sich auf die Abhängigkeit der Empfindlichkeit und Dämpfung des Galvanometers von der Amplitude, den Einfluss des Extrastroms (und selbstverständlich die Berücksichtigung der Nadelänge etc. bei der Tangentenbussole.)

Infolge dieser Correctionen ist die Formel (6) für die definitive Berechnung nicht verwendbar, welche sich vielmehr angemessener Weise nach den einzelnen Theilen der Beobachtungen gliedern wird.

Formeln. Um die Angabe der Beobachtungsergebnisse in gedrängter Form zu ermöglichen, will ich einige theoretische Erörterungen und Formeln vorausschicken.

Erdmagnetismus. Wie bei der Gauss'schen Methode der im Hauptmagnet während der Schwingungsbeobachtungen durch die Horizontalcomponente inducirte Magnetismus in Rechnung zu ziehen ist, hat Hr. W. Weber<sup>1)</sup> gelehrt. Ich will seine Untersuchung erweitern durch Berücksichtigung der Quermagnetisirung, was den Betrag der Correction um ca. 10 Proc. herabsetzt. Wie üblich, substituire ich für den cylindrischen Magnet ein verlängertes Rotationsellipsoid von demselben Volumen  $V$ , dessen Rotationsaxe  $c$  zur Queraxe  $a = b$  im Verhältniss der Länge zum Durchmesser des Cylinders steht. Ist  $z$  der Magnetaxe parallel,  $x$  horizontal senkrecht dagegen,  $Z$  und  $X$  die Componenten der äusseren magnetisirenden Kraft nach diesen Axen,  $\kappa$  die Neumann'sche Magnetisirungsconstante, so sind die Componenten des inducirten Momentes<sup>2)</sup>:

$$(7) \quad \alpha X = \frac{\kappa V}{1 + \kappa L} X,$$

1) W. Weber, *Abh. d. k. Ges. der Wiss. z. Gött.* 6. p. 3. 1856.

2) cf. z. B. Maxwell, *Electricity and Magnetism*. 2. p. 65. 1873.  
Ein in  $L$  befindlicher Druckfehler ist hier corrigirt.

$$(7') \quad \gamma Z = \frac{\alpha V}{1 + \alpha N} Z,$$

wo, wenn (7'')  $a = b = c \sqrt{1 - e^2}$ ,

$$(8) \quad L = 2\pi \left( \frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \log \frac{1 + e}{1 - e} \right),$$

$$(8') \quad N = 4\pi \left( \frac{1}{e^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2e} \log \frac{1 + e}{1 - e} - 1 \right).$$

Bei einer Ablenkung  $\psi$  des Magnets ist nun  $Z = H \cos \psi$ ,  $X = H \sin \psi$ , und das Drehungsmoment wegen des inducirten Magnetismus:

$$-(\gamma - \alpha) XZ = -H \sin \psi (\gamma - \alpha) H \cos \psi,$$

d. h. das permanente Moment  $\mathfrak{M}$  des Hauptmagnets ist zu vermehren um  $(\gamma - \alpha) H \cos \psi$ , worin es wegen der Kleinheit von  $\psi$  noch erlaubt ist,  $\cos \psi$  durch 1 zu ersetzen.

Demgemäss ergeben die Schwingungsbeobachtungen, wenn  $\mathfrak{T}$  die Schwingungsdauer für unendlich kleine Bogen,  $\mathfrak{R}$  das Trägheitsmoment,  $\Theta$  das Torsionsverhältniss bedeutet:

$$(9) \quad H \mathfrak{M} = \frac{\pi^2 \mathfrak{R}}{\mathfrak{T}^2 \left( 1 + \frac{\gamma - \alpha}{\mathfrak{M}} H \right) (1 + \Theta)}$$

Ist  $\gamma H / \mathfrak{M}$  bestimmt, wozu ich mich des zweiten Verfahrens von Hrn. W. Weber<sup>1)</sup> bediente, so erlaubt die Formel (7') zunächst  $\alpha$  zu berechnen, woraus nach (7)  $\alpha H / \mathfrak{M}$  folgt.

Für die Ablenkungsbeobachtungen hat man, wenn der um  $l$  und  $l'$  entfernte Hauptmagnet in der ersten Hauptlage den Hilfsmagnet um  $\psi$  und  $\psi'$  ablenkt, und  $\Theta_1$  das Torsionsverhältniss des letzteren ist:

$$(10) \quad \frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{l^2 \operatorname{tg} \psi - l'^2 \operatorname{tg} \psi'}{(l^2 - l'^2) (1 + \Theta_1)},$$

woran wegen des inducirten Magnetismus keine Correction anzubringen ist.

(Anmerk. Ich habe den Einfluss des durch den Erdmagnetismus und durch den Strom in dem etwa vorhandenen Multiplicator inducirten Magnetismus für eine Reihe von Fällen untersucht. Hier sei nur bemerkt, dass der Fehler durch Vernachlässigung desselben in der absoluten Wider-

1) l. c. p. 18. Anm.

standsmessung von Hrn. Kohlrausch wie in meiner eigenen etwa auf  $i/10000$  zu schätzen ist.)

Da es sich bei meinen Beobachtungen nur um den Mittelwerth des Erdmagnetismus während  $1-1\frac{1}{2}$  Stunden handelt, so genügt, um die Variationen in Rechnung zu ziehen, die Beobachtung der Schwingungsdauer eines zweiten Magnets, der meistens der Galvanometermagnet selbst war.

Hierbei muss auf die Aenderung des magnetischen Momentes und des Trägheitsmomentes mit der Temperatur  $\vartheta$  Rücksicht genommen werden. Ist  $\alpha$  der Temperaturcoefficient des Trägheitsmomentes,  $\mu$  der des Nadelmagnetismus,  $\tau$  der Torsionscoefficient des Drahtes (sodass, wenn  $\Theta'$  das Torsionsverhältniss,  $\tau = MH\Theta'$ ), so ist:

$$(11) \quad T_0^2 = \frac{\pi^2 K^0 (1 + \alpha \vartheta)}{HM^0 (1 - \mu \vartheta) + \tau}.$$

Hieraus folgt zunächst, dass bei einer Normaltemperatur  $\vartheta_1$  (und derselben Horizontalintensität) die Schwingungsdauer in hinreichender Näherung gewesen wäre:

$$(12) \quad T_1 = T_0 + \frac{T_0}{2} \left( \alpha + \frac{\mu}{1 + \Theta'} \right) (\vartheta_1 - \vartheta).$$

Sind ferner die zu  $H$  und  $H + \Delta H$  gehörigen reducirten Schwingungsdauern  $T_1$  und  $T_1 + \Delta T_1$ , so genügt die Relation:

$$(13) \quad \Delta H = -2 \Delta T_1 \frac{H}{T_1} (1 + \Theta').$$

Endlich kann man auf der rechten Seite von (13) und im zweiten Term rechts in (12) für  $H$ ,  $T_1$ ,  $T_0$  genäherte Werthe benutzen.

Tangentenbussole. Aus der Ablenkung  $\Phi$  der Tangentenbussole wurde die Stromstärke  $J$  nach der bekannten Formel erhalten<sup>1)</sup>:

$$(14) \quad J = \frac{HR(1+\Theta'')}{2\pi r} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{b^2}{R^2} - \frac{1}{15} \frac{h^2}{R^2} - \frac{1}{15} \frac{l^2}{R^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{15} \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \Phi \right) \operatorname{tg} \Phi,$$

wo  $b$  die Breite,  $h$  die Höhe der Windungen (resp. des Kupferinges)  $l$  den Abstand der Pole des Magnets,  $\Theta''$  das Torsionsverhältniss,  $R$  den mittleren Radius und  $r$  die Zahl der Windungen bedeutet.

1) cf. Kohlrausch, Prakt. Phys. 4. Aufl. p. 187. 1880.

Galvanometer. Für die Aufgabe der Centrirung des Galvanometers und die Reduction seiner Ablenkung und Dämpfung auf unendlich kleine Amplituden gewährte mir eine sehr werthvolle Unterstützung die Arbeit von Hrn. K. Schering<sup>1)</sup>, aus der ich mit veränderter Bezeichnung das hier Nothwendige entnehme.

Der Winkel  $\chi$  werde von der Symmetrielage (der Ebene der Windungen des Multiplicators) aus gerechnet, und es sei, wenn  $q$  in seiner Abhängigkeit von  $\chi$  mit  $Q(\chi)$  bezeichnet wird:

$$(15) \quad F(\chi) = \frac{1}{2K\tau} Q^2(\chi) = \frac{1}{T_0} \left[ \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right],$$

so wird mit Vernachlässigung höherer Potenzen von  $\chi$  gesetzt werden können:

$$(16) \quad F(\chi) = F_0 (1 - \xi' \chi^2); \quad Q(\chi) = q_0 (1 - \frac{1}{2} \xi' \chi^2).$$

Der Magnet bilde in seiner natürlichen Ruhelage einen Winkel  $\delta$  mit der Symmetrieebene,  $\varphi$  werde von der Ruhelage gezählt, und es seien für die Werthe 0,  $+\varphi$ ,  $-\varphi$  desselben die Grössen  $T_0$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_0$  beobachtet.

Die mit Hülfe derselben berechneten Werthe von  $F$  seien,  $F(\delta) = F_1$ ,  $F(\varphi + \delta) = F_2$ ,  $F(\varphi - \delta) = F_3$ , wo  $F_1 > F_3 > F_2$ , so ist, wenn der Kürze wegen noch:

$$s = 1 - \frac{F_2 + F_3}{2F_1},$$

gesetzt wird:

$$(17) \quad \delta = \frac{\varphi}{2s} \frac{F_3 - F_2}{2F_1}, \quad \xi' = \frac{s}{\varphi^2} \frac{1}{1 + s \frac{\delta^2}{\varphi^2}}, \quad F_0 = F_1 \left( 1 + s \frac{\delta^2}{\varphi^2} \right).$$

Nachdem  $\delta$  so ermittelt, sei der Multiplicator so gedreht, dass jetzt die Ruhelage und Symmetrielage zusammenfallen. Die Grösse  $p$  wird dann als Function von  $\varphi$  die Form besitzen:

$$(18) \quad P(\varphi) = p_0 (1 - \eta' \varphi^2):$$

Erzeugt nun ein Strom  $i$  die Ablenkung  $\varphi$ , so ist gemäss der Bedeutung von  $Q(\varphi)$ :

$$HM \sin \varphi + \tau \varphi = i Q(\varphi),$$

1) Schering, Wied. Ann. 9. p. 287. 1880.



sodass:

$$P(q) = \frac{q}{i} = \frac{q Q(q)}{H M \sin q + \tau q},$$

was nach Einsetzen von (16) und Entwicklung liefert:

$$(19) \quad P(q) = \frac{q_0}{H M (1 + \Theta')} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{6} \xi' - \frac{1}{6(1 + \Theta')} \right) q^2 \right\}.$$

Die Vergleichung mit (18) gibt:

$$(20) \quad p_0 = \frac{q_0}{H M (1 + \Theta')} = \frac{q_0 T_0^2}{\pi^2 K},$$

mit (3) übereinstimmend, ferner:

$$(21) \quad \eta' = \frac{1}{6} \xi' - \frac{1}{6(1 + \Theta')}.$$

Ausser der Bestimmung von  $\eta'$  nach (21) mit Hülfe von  $\xi'$  habe ich dasselbe auch direct aus Ablenkungsbeobachtungen ermittelt. Ist nämlich:

$$p_1 = p_0 (1 - \eta' q_1^2), \quad p_2 = p_0 (1 - \eta' q_2^2),$$

so folgt:

$$(22) \quad \eta' = \frac{p_1 - p_2}{p_0 (q_2^2 - q_1^2)}.$$

Es ist bequemer, zunächst nicht  $p$ , sondern  $pH$  zu berechnen, welches, wie leicht ersichtlich, von den Variationen des Erdmagnetismus nahezu unabhängig ist. Sei bei der p. 775 beschriebenen Stromverzweigung  $q$  die beobachtete Ablenkung des Galvanometers,  $J$  die Stromstärke der Tangentenbussole im Stammstrom, so ist:

$$(23) \quad pH = \frac{q H}{J} \frac{w_g + w_n}{w_n}.$$

Wenn  $n$  die den Bogen proportional gemachten Scalentheile bedeutet, sodass bei einer Entfernung  $r$  des Spiegels von der Scala  $q = n/2r$ , so kann gesetzt werden:

$$(24) \quad pH = p_0 H - \eta n^2, \quad \text{wo}$$

$$(25) \quad \eta = \frac{\eta' p_0 H}{4 r^2}.$$

In dieser Gestalt sind die Formeln unten benutzt.

Zur Reduction der logarithmischen Decremente auf unendlich kleine Amplituden bei richtig centrirtem Multiplicator gibt Hr. Schering<sup>1)</sup> folgende Formeln. Sei  $A$  das logarithmische Decrement für unendlich kleine Amplituden.

1) l. c. p. 472.

$\lambda_1$  das aus zwei successiven Elongationen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  berechnete, so ist mit Vernachlässigung von  $\varphi^4$ :

$$(26) \quad \lambda_1 = \log \operatorname{nat} \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = A(1 - S_2 \varphi_1^2), \quad \text{wenn:}$$

$$(27) \quad S_2 = \frac{1}{8} \frac{1 - e^{-2A}}{A} S_2^*,$$

$$(28) \quad S_2^* = \frac{4m_1(7A^2 + \pi^2) - n_1(23A^2 + 11\pi^2)}{A^2 + 4\pi^2},$$

$$(29) \quad m_1 = \frac{\xi'}{1 + \frac{\lambda_0}{T_0 F_0}}, \quad n_1 = \frac{1}{6(1 + \Theta')}.$$

Ich habe nun aber die logarithmischen Decremente nicht aus zwei successiven Elongationen, sondern aus zwei successiven Bogen bestimmt. In diesem Falle hat man, wie eine einfache Rechnung zeigt, mit demselben Grade der Näherung:

$$(30) \quad A = \log \operatorname{nat} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\varphi_2 + \varphi_3} + \Sigma_2 (\varphi_1 + \varphi_2)^2,$$

worin:

$$(31) \quad \Sigma_2 = \frac{1}{8} \frac{(1 - e^{-A})(1 + e^{-3A})}{(1 + e^{-A})^2} S_2^*.$$

Will man endlich mit briggischen Logarithmen und Scalentheilen (den Bogen proportional gemacht) rechnen, so ist zu setzen:

$$(32) \quad A' = \log \operatorname{brigg} \frac{n_1 + n_2}{n_2 + n_3} + \Sigma_2' (n_1 + n_2)^2,$$

$$(33) \quad \Sigma_2' = \frac{0,43429 \cdot \Sigma_2}{4r^2}.$$

Im Correctionsterm darf man noch statt  $A$  überall  $\lambda$  einführen, was erst die Terme der vierten Ordnung beeinflusst.

Da  $F_0$  nach seiner Bedeutung ( $F_0 = q_0/2Kw$ ) dem Widerstande umgekehrt proportional ist, so ist  $m_1$  ebenfalls von demselben abhängig. Eine Vernachlässigung dieses Umstandes würde aber meistens keinen merklichen Fehler erzeugen.

Die Formel für die Berücksichtigung des Extrastroms hatte ich ursprünglich auf einem anderen Wege abgeleitet; ich gelange aber zu einer kürzeren Darstellung, wenn ich mich auf die Untersuchung von Maxwell stütze.<sup>1)</sup>

1) Maxwell, Electricity and Magnetism. 2. p. 363. 1873.

Sei  $\Pi$  der Coëfficient der Selbstinduction,  $\lambda_0$ ,  $T_0$ ;  $\lambda$ ,  $T$  logarithmisches Decrement und Schwingungsdauer für den geöffneten und geschlossenen Multiplicator, und werde gesetzt:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T_0}, \quad \alpha_0 = \frac{\lambda_0}{T_0}; \quad \omega = \frac{\pi}{T}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{T},$$

so sind die Gleichungen (14) und (15) von Maxwell in meiner Bezeichnung:

$$(34) \quad q^2 = 2wK(\alpha - \alpha_0) \left[ 1 - \frac{\Pi}{2w} \left( 3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0} \right) \right],$$

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} q^2 [\alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2] \\ = \Pi K [(\alpha - \alpha_0)^4 + 2(\alpha - \alpha_0)^2 (\omega^2 + \omega_0^2) + (\omega^2 - \omega_0^2)^2] \end{array} \right.$$

Die Gleichung (35) ist als zur Bestimmung von  $T$  dienend aufzufassen.

Die gewöhnlichen Formeln, in denen der Einfluss der Selbstinduction vernachlässigt ist, erhält man hieraus für  $\Pi = 0$ :

$$(36) \quad q^2 = 2wK(\alpha_1 - \alpha_0),$$

$$(37) \quad \omega_1^2 - \omega_0^2 = \alpha_0^2 - \alpha_1^2,$$

wo der Index 1 den ersten Näherungswerth andeutet. Diese Formeln führen nach Substitution der Werthe von  $\alpha$  und  $\omega$  und Elimination von  $T$  auf (1).

Wenn zum Zwecke einer weiteren Annäherung  $\alpha = \alpha_1 + \delta\alpha$ ,  $\omega = \omega_1 + \delta\omega$  gesetzt wird, so ist zunächst infolge der Definitionsgleichungen:

$$\delta\omega = \frac{\omega_1}{\alpha_1} \delta\alpha.$$

Da nur erste Potenzen von  $\Pi$  berücksichtigt werden sollen, so kann man zur Berechnung von  $\delta\alpha$  in (35) rechts statt  $\alpha$  und  $\omega$ :  $\alpha_1$  und  $\omega_1$  schreiben und erhält leicht nach einigen Reductionen:

$$\delta\alpha = \frac{2\Pi K}{q^2} \alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_0)^2,$$

oder mit Benutzung von (36):

$$(38) \quad \delta\alpha = \frac{\Pi}{w} \alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_0).$$

Setzt man endlich in (34) im ersten Factor  $\alpha = \alpha_1 + \delta\alpha$ , in dem Terme mit  $\Pi$  aber einfach  $= \alpha_1$ , so kommt schliesslich:

$$(39) \quad \begin{cases} q^2 = 2wK(\alpha_1 - \alpha_0) \left(1 - \frac{\Pi}{w} \alpha_1\right)^2 \\ = \frac{2wK}{T_0} \left[ \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right] \left[ 1 - \frac{\Pi}{w} \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} \right], \end{cases}$$

oder wenn man noch  $\Pi \lambda_0$  fortlässt und für  $w: \sigma W$  schreibt:

$$(40) \quad q^2 = \frac{2K\sigma W}{T_0} \left[ \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 - \frac{\Pi \lambda^2}{w T_0} \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda^2} \right].$$

Zum Zwecke der experimentellen Bestimmung des Coëfficienten der Selbstinduction  $\Pi$  wurde das Galvanometer mit festgelegtem Magnet in den Zweig 1 der beifolgend schematisch dargestellten Brückencombination eingeschaltet, deren übrige Zweige keine merkliche Selbstinduction besaßen.

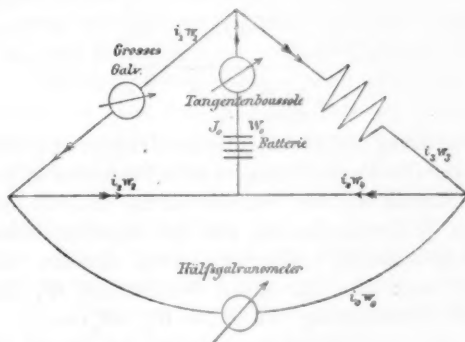


Fig. 1.

Aus dem mit Hülfe einer Tangentenbussole gemessenen Stammstrom  $J_0$  folgt, wenn  $i_0 = 0$ :

$$(41) \quad i_1 = \frac{J_0 (w_3 + w_4)}{(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)}.$$

Bei Unterbrechung des Stammstromes entsteht im Zweige 1 eine electromotorische Kraft des Integralstromes  $\Pi i_1$ , und von dem Integralstrom geht durch das Hülfsgalvanometer:

1) In der entsprechenden Gleichung (17) bei Maxwell (l. c. p. 363) muss  $2L$  durch  $L$  ersetzt werden. Maxwell hat übersehen, dass auch wegen  $\alpha$  ein Term der Ordnung  $L$  erscheint.

$$(42) \quad i'_0 = \frac{II i_1 (w_2 + w_4)}{(w_1 + w_3)(w_2 + w_4) + w_0(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)},$$

worin  $i_1$  aus (41) zu entnehmen ist.

$i'_0$  ist nun proportional dem Ausschlag  $n'_0$  des Hülfsgalvanometers, also  $i'_0 = f n'_0$ , und um  $i'_0$  in absolutem Maasse zu erhalten, wurde dasselbe mit dem Hauptgalvanometer verglichen. Dieselbe electromotorische Kraft  $E$ , (erzeugt durch Herausziehen eines Magnets aus einer Spirale), ergebe am ersteren eine Elongation von  $n_0$  Scalentheilen bei einem Widerstande  $\tilde{\omega}_0$  des Stromkreises, bei letzterem  $\varphi_1$  in absolutem Winkelmaass bei dem Widerstande  $\tilde{\omega}_1$ , so ist nach bekannten Formeln:

$$\frac{E}{\tilde{\omega}_1} = \varphi_1 \frac{K\pi}{q T_0} e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\lambda}};$$

da ferner:

$$\frac{E}{\tilde{\omega}} = f n_0,$$

so folgt:

$$(43) \quad f = \frac{\varphi_1 \tilde{\omega}_1 K\pi}{n_0 \tilde{\omega}_0 q T_0} e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\lambda}}.$$

In Beziehung auf die eigentlichen Dämpfungsbeobachtungen und ihre Verwerthung ist noch Folgendes zu bemerken.

Der Stromkreis des Galvanometers enthielt eine Siemens'sche Widerstandsscala, und das logarithmische Decrement wurde zunächst beobachtet, wenn dieselbe vollständig gestöpselt war: also für einen Widerstand  $W_g$  (in S.-E.), dann nach Hinzufügung von  $W_* = W_1, W_2 \dots$

Für eine jede Beobachtungsreihe ist die in (40) vorkommende Grösse:

$$(44) \quad \Omega = W \left[ \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 - \frac{II \lambda^2}{w T_0} \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda^2} \right] = (W_g + W_*) C_2$$

constant, und der Werth von  $\Omega$  wurde nebst dem Werthe von  $W_g$  nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Gleichungen:

$$(45) \quad \Omega - W_g C_0 = 0, \quad \Omega - W_g C_1 = W_1 C_1 \text{ etc.,}$$

ermittelt. Ich erlangte dadurch den Vortheil, die stark mit der Temperatur variirende Grösse  $W_g$  nicht jedesmal durch eine besondere Widerstandsmessung bestimmen zu müssen.

Die Berechnung einer Beobachtungsreihe geschah nun so: aus den beobachteten log. Decr. wurden die

in (44) definirten Grössen  $C_0, C_1 \dots$  erhalten, nachdem dann aus (45)  $\Omega$ , aus (23) und (24)  $p_0 H$ , aus (12) und (13)  $H$  berechnet war, folgte:

$$(46) \quad q_0 = \frac{\pi^2 (p_0 H) K}{H T_0^2},$$

$$(47) \quad \sigma = \frac{q^2 T_0}{2 K \Omega} = \frac{\pi^4 (p_0 H)^2 K}{2 T_0^3 H^2 \Omega},$$

Mit Rücksicht auf die Berechnung von  $H$  aus  $T_0$  folgt, dass ein Fehler in  $T_0, K, \Omega$  mit dem einfachen Betrage, ein Fehler in  $H$  und  $(p_0 H)$  aber mit dem doppelten in das Endresultat eingeht.

#### Die Beobachtungsdata.

Der Ort der Beobachtungen war ein grosses, eine Treppe hoch gelegenes unheizbares Zimmer im sogenannten Convictgebäude, einem der Universität Breslau gehörigen ehemaligen Kloster mit sehr dicken Mauern und durchgängig gewölbten Räumen. Alle irgendwie wichtigen Messungen sind in den Universitätsferien nach Aufhören des Strassenverkehrs meist von 9 Uhr abends bis 1 Uhr nachts (nur wenige an Feiertagen während der Kirchenzeit) angestellt, sodass eine Störung weder von den übrigen Räumen des Gebäudes, noch von der Strasse her zu befürchten war.

Zu den Zeitmessungen diente eine Uhr mit Compensationspendel von sehr regelmässigem Gang, welche mit der Uhr der Breslauer Sternwarte verglichen wurde und im Mittel täglich 5,3 Sekunden zurückblieb.

Der zu den Wägungen gebrauchte Gewichtssatz war mit der Hauptnormale des Breslauer Eichamts verglichen; ebenso sind sämtliche Längenmessungen direct, oder durch Vermittelung eines Meters von Perreaux, auf die dortige Hauptnormale bezogen, mit Ausnahme einiger nachträglicher Bestimmungen, denen ein in meinem Privatbesitz befindlicher Meterstab zu Grunde liegt, für dessen Berichtigung ich Hrn. Dr. Pernet in Sèvres zu Dank verpflichtet bin.

Die Gesamtlänge der beiden auf dicke Spiegelglasstreifen geklebten Scalen betrug bei 12° I. 0,99477 m, II. 0,99178; ihre 0,25 mm nicht erreichenden Theilfehler waren von 50 zu 50 mm bestimmt, was genügte, da der

Fehler eines solchen Intervalles von 50 mm nur selten 0,07 mm erreichte.

Die Messung des Scalenabstandes geschah durch Verschiebung des Perreaux'schen Meters unter zwei Mikroskopen mit Fadenkreuz (analog dem Verfahren bei der geodätischen Basismessung) indem die letzten Stücke bis zum Spiegel, resp. dem von der Scala herabhängenden Loth durch Anschieben eines aufgelegten Glasmaassstabes erhalten wurden. Bei dieser Operation bewegte ich mich auf einer starken Bohle, deren Stützpunkte hinreichend weit jenseits der Enden der zu messenden Linie lagen. Die so erreichbare Genauigkeit ist sehr erheblich; wiederholte Messungen differirten kaum um 0,1 mm. Die Glasdicken sind in bekannter Weise in Rechnung gezogen.

Um die Festigkeit der Aufstellung der Fernrohr und Scala tragenden Tische zu prüfen, habe ich mehrfach auf letzterer eine Nadel aufrecht befestigt und mit einem stark vergrößernden Fernrohr in der Richtung der Scala und senkrecht dagegen beobachtet, während eine andere Person abwechselnd den Platz des Beobachters einnahm und sich entfernte, oder die zur Messung des Scalenabstandes dienenden Dreifüsse hingesezt und fortgenommen wurden. Ich habe keine Verrückung wahrgenommen, obwohl 0,1 mm mir nicht hätte entgehen können.

Es sei noch erwähnt, dass zur Vermeidung von Temperaturschwankungen während der Beobachtungen nie Gas gebrannt wurde, und zur Scalenbeleuchtung Petroleumlampen oder Stearinkerzen Verwendung fanden.

Die Beobachtungen wurden so angeordnet, dass Reihen von mehreren galvanometrischen Messungen mit Bestimmungen des Erdmagnetismus abwechselten, und zwar wurde für die letzteren das Magnetometer genau an die Stelle gesetzt, welche vorher die Tangentenbussole einnahm. Die Spiegel waren so gestellt, dass am Fernrohr nichts geändert zu werden brauchte.

Erdmagnetismus. Wegen der Wichtigkeit der Bestimmung der Horizontalintensität ist das Eingehen in De-



0,07 mm  
h durch  
zwei Mi-  
bei der  
e bis zum  
oth durch  
erhalten  
auf einer  
jenseits  
reichbare  
gen diffe-  
ekannter

tails unvermeidlich; zunächst folge eine kurze Beschreibung des benutzten Meyerstein'schen Magnetometers.

Ein an der Zimmerdecke befestigter Messingdraht trug den Torsionskreis, den Spiegel und das Schiffchen, in dessen Y-Lager der Haupt- und Hülsmagnet mit Nuthen eingelegt werden konnte.

Die übrigen Theile des Magnetometers standen darunter auf einem langen Tisch. Ein mit drei Stellschrauben versehenes Fussbrett trug um einen Zapfen drehbar eine Serpentinausscheibe, über welcher sich ein solider Messingbügel erhob mit einer Durchbohrung zum Durchlassen des Verbindungsstückes zwischen Spiegel und Schiffchen. Der Bügel diente zugleich zum Festhalten eines Holzkastens als Schutz gegen Luftströmungen.

Nach aussen hatte der Bügel zwei starke horizontale Ansätze, auf welche solide Messingröhren aufgesteckt werden konnten. Dieselben wurden horizontal gerichtet und sorgfältig in die Richtung Ost — West gebracht. An vier Stellen hatten die Röhren auf der Oberseite kleine Löcher, in welche ein Stift auf der Unterseite des sattelförmigen, oben mit zwei Y-Lagern für die Nuthen des Hauptmagnets versehenen Magnetträgers passte, der sich genau der Röhre anschmiegte.

Besondere Aufmerksamkeit wurde auf die Vermeidung magnetischer Localeinflüsse verwendet. Aus diesem Grunde ist bei den Ablenkungsbeobachtungen nicht der dem Instrument beigegebene Dämpfer benutzt. Der Tisch, worauf das Magnetometer stand, war bei sorgfältiger Untersuchung eisenfrei gefunden. Dass der Messingbügel und die seitlichen Röhren in ihrer zum Magnet transversalen Stellung denselben auch nicht beeinflussten, wurde zunächst durch Vorversuche mit einem anderen Magnet wahrscheinlich gemacht; ferner wurde die von der Variation der Horizontalcomponente befreite Schwingungsdauer beobachtet bei Anwesenheit der Messingtheile 21,6239 Sec., gleich darauf nach Entfernung derselben 21,6282 Sec. Die unbedeutende Differenz ist wahrscheinlich einer geringen Erwärmung des Magnets zuzuschreiben.

Der Hauptmagnet hatte eine Länge von 258,6 mm, einen Durchmesser von 20,6 mm und wog 681 852 mg, woraus sich beiläufig sein Trägheitsmoment  $= 3,817 \cdot 10^9 \text{ mg} \cdot \text{mm}^2$  ergibt. Der Temperaturcoefficient des magnetischen Momentes war 0,00088; das Torsionsverhältniss am 8. April 1881 0,02819, womit früher gefundene Werthe gut übereinstimmen.

Das Verhältniss des durch die Horizontalcomponente während der Schwingungsbeobachtungen inducirten longitudinalen Momentes zum permanenten ( $\gamma H/\mathfrak{M}$ ) erhielt ich in Breslau (12. Septb. 1880) nach dem zweiten Weber'schen Verfahren  $= 0,00699$ . Da hinreichend nahe  $\mathfrak{M} = 4,597 \cdot 10^7$ ,  $H = 1,94$ , ferner aus den oben angegebenen Dimensionen das Volumen des Magnets  $V = 8,616 \cdot 10^4 \text{ cmm}$ ,  $e = 0,99682$  (cf. 7'') folgt, so ergibt sich nach den Formeln (7) bis (8')  $L = 6,194$ ,  $N = 0,1790$ ,  $\alpha = 2,864$ ,  $\alpha H/\mathfrak{M} = 0,000564$  und endlich  $(\gamma - \alpha)H/\mathfrak{M} = 0,00643$ . Für die Rechnung habe ich gesetzt:

$$\frac{(\gamma - \alpha)H}{\mathfrak{M}} = 0,00637,$$

indem ich die Aenderung der Magnetisirbarkeit mit der Temperatur in Rechnung zog. Eine mit anderen Hilfsmitteln in Darmstadt vorgenommene Untersuchung desselben Magnets ergab 0,00706 statt 0,00699.

Meine ursprüngliche Bestimmung des Trägheitsmomentes mit Hülfe von zwei 150 g Gewichten, welche an dem Schiffchen mit dünnen kurzen Seidenfäden aufgehängt wurden, ergab in Breslau bei  $12^\circ$   $\mathfrak{K} = 4,3566 \cdot 10^9 \text{ mg} \cdot \text{mm}^2$  und bei Wiederholung der Versuche in Darmstadt  $4,3537 \cdot 10^9$ . Für die Rechnung benutzt ist der etwa  $\frac{1}{5}$  Procent grössere Werth  $4,3640 \cdot 10^9$ , den ich nachträglich in Darmstadt erhielt, wohin mir Hr. Prof. Meyer den ganz unveränderten Apparat nachzusenden die Güte hatte.

Da mit dem alten Schiffchen die Zusatzgewichte nicht unverrückbar verbunden werden konnten, liess ich ein neues von der in Fig. 2 dargestellte Form anfertigen, auf dessen Stifte die Gewichte — durchbohrte Cylinder — aufgesteckt wurden. Ich bestimmte das Trägheitsmoment zunächst mit dem neuen Schiffchen, woraus sich das für das alte durch Vergleichung der Schwingungsdauer ergab.

Im Folgenden bezeichnet  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{L}$  das Trägheitsmoment und die Schwingungsdauer (für unendlich kleine Amplituden) für das alte Schiffchen,  $\mathfrak{K}'$  und  $\mathfrak{L}'$  die entsprechenden Grössen für das neue,  $\mathfrak{L}_1'$  die Schwingungsdauer mit Gewichten.

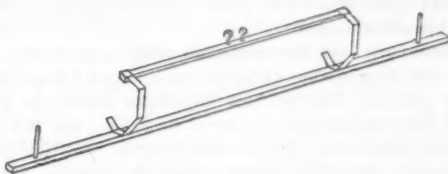


Fig. 2.

Es fanden zwei Paar Gewichte Anwendung. I. Masse 99999,7 mg für jedes Gewicht, äusserer Durchmesser 27,45, innerer 3,25 und 3,20. Hieraus Summe der Trägheitsmomente um die Cylinderaxe  $0,01910 \cdot 10^9$ . Die Schwerpunkte der Gewichte hatten bei  $5^\circ$  den Abstand  $300,028 \text{ mm}^1$ , demgemäss vermehrt das Aufstecken der Gewichte das Trägheitsmoment bei  $5^\circ$  um  $\mathfrak{f} = 4,50083 \cdot 10^9 + 0,01910 \cdot 10^9 = 4,51993 \cdot 10^9$ . Für einen Grad ändert sich diese Grösse um  $0,000 169 \cdot 10^9$ .

1) Wie auch im Text erwähnt, wurden die Schwingungsbeobachtungen mit Gewichten stets nach Drehung derselben um  $180^\circ$  wiederholt. Um die Entfernung der Schwerpunkte der Gewichte zu finden, wandte ich folgendes Verfahren an, welches auch dann brauchbar bleibt, wenn die Stifte nicht genau in die Bohrungen passen, wie dies bei den 200 g Gewichten der Fall war. Um den Kernpunkt des Stiftes wurde auf der Oberseite jedes Gewichtes mit einem feinen Zirkel ein Kreis beschrieben und mit einer feinen Nadel ein Durchmesser gezogen, wodurch auf einem Gewichte die Marken  $a_1 b_1$ , auf dem anderen  $a_2 b_2$  entstanden. Die beiden Durchmesser wurden in eine Gerade gebracht, beide Gewichte nach aussen gedrückt, Mikroskope mit Fadenkreuz auf die beiden links liegenden Marken  $a_1$  und  $a_2$  eingestellt, der Normalmaassstab substituiert und die Differenz bis zum nächsten Theilstrich durch das Ocularschraubenmikrometer des einen Mikroskopes gemessen. So wurde die Entfernung  $a_1 a_2 = a$  und zur Controle ebenso  $b_1 b_2 = b$  erhalten. Die Gewichte wurden nun um  $180^\circ$  gedreht, sodass  $a_1$  und  $a_2$  jetzt rechts lagen, nach innen gedrückt, und nun  $a'$  und  $b'$  gefunden. Selbstverständlich befanden sich bei

12. Februar 1882. Temp.  $5,2.t = 4,51996.10^0$ .

$\mathcal{I}_1'$	$\mathcal{I}'$	$\mathcal{I}_1'$ (Gew. umgewandt)
33,5069	24,3875	33,5142
33,5058	24,3907	33,5170
Mittel 33,5064	24,3891	33,5156

den Schwingungsbeobachtungen beide Gewichte genau in den für die Messungen benutzten Lagen.

Die Entfernung der Schwerpunkte wäre  $\frac{1}{2}(a + a') = \frac{1}{2}(b + b')$ , wenn nicht eine Neigung der Gewichte nach aussen infolge der Biegung des Trägers eintrete. Um bei den Messungen identische Verhältnisse, wie bei den Schwingungsbeobachtungen zu haben, war der Träger bei ersteren ebenso unterstützt, wie bei den letzteren. Mit Hilfe von Marken auf der Oberseite der Stifte wurde constatirt, dass die Vergrösserung der Entfernung in der Höhe der Oberseite der 200 g Gewichte bei dem Aufsetzen derselben 0,113 mm betrug. Eine Controlmessung mit Hilfe von Spiegeln, die unter den Stiften an den Träger geklebt wurden, lieferte 0,112 mm. War der unbelastete Träger geradlinig, so ergab sich unter der Annahme, dass die Länge der Mittellinie des 3,8 mm dicken unteren Stabes unverändert blieb, dass die Entfernung der Schwerpunkte der 19,5 mm hohen Gewichte um 0,051 mm kleiner war, als  $\frac{1}{2}(a + a')$ . Die Correction bei 20,8 mm hohen 100 g Gewichten folgte ähnlich = 0,027 mm. Uebrigens änderte, wie bei der Form des Trägers zu erwarten, das Einlegen des Magnets nichts.

Die Details der Messungen sind folgende:

	100 g	200 g
$\frac{1}{2}(a + a')$	300,048	300,079
$\frac{1}{2}(b + b')$	300,054	300,080
Mittel	300,051	300,080
Wegen Biegung	-0,027	-0,051
	300,024	300,029
Teilfehlercorr.	-0,024	-0,024
	300,000	300,005

Nach Addition der Reduction auf  $5^0$ , resp.  $12^0$ , 0,028 und 0,065 ergeben sich die oben benutzten Längen: 300,028 und 300,070.

Die Mittelpunkte der Stifte waren nach einer directen Messung an der Basis entfernt um 300,001 mm. Die 100 g Gewichte passten gut, und in der That erhält man nach Addition von 0,027: 300,028 für dieselbe Entfernung, die oben 300,024 war. — Ueber die Aenderung des Torsionsverhältnisses durch Belastung habe ich in Darmstadt auch einige Beobachtungen gemacht. Bei einem Stahldraht von 0,16 mm Durchmesser war dasselbe 0,04234 und nahm durch Hinzufügung von 300 g um 0,00016, also etwa  $\frac{1}{4}$  Procent ab, und doppelt soviel, als der blossen Aenderung der Dimensionen durch die Belastung entsprechen würde.

Die Werthe  $\mathfrak{X}' = 33,5110$ ,  $\mathfrak{X}' = 24,3891$  geben für  $5,2^\circ$   $\mathfrak{R}' = 5,09051 \cdot 10^9$ . Da hiervon  $3,817 \cdot 10^9$  auf den Stahlmagnet kommen, so wächst  $\mathfrak{R}'$  für  $1^\circ$  um  $0,000142 \cdot 10^9$ , und für  $5^\circ$  folgt  $\mathfrak{R}' = 5,09048 \cdot 10^9$ .

Für dieselbe Temperatur war am 11. Februar 1882 gefunden  $\mathfrak{R}' = 5,09061 \cdot 10^9$  und  $5,09101 \cdot 10^9$ , Mittel:  $5,09081 \cdot 10^9$ , also Hauptmittel bei  $5^\circ$ :

$$\mathfrak{R}' = 5,09065 \cdot 10^9.$$

12. Februar 1882. Temp.  $5,6^\circ$ .

$\mathfrak{X}'$	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{X}'$	$\mathfrak{X}$
24,3925	22,5914	24,3990	22,5966
24,3950	22,5927	24,3998	22,5981
24,3938	22,5921	24,3994	22,5974

Die Combinationen  $\mathfrak{X} = 22,5921$ ,  $\mathfrak{X}' = 24,3966$  und  $\mathfrak{X} = 22,5947$ ,  $\mathfrak{X}' = 24,3994$  geben genau übereinstimmend  $\mathfrak{R}'/\mathfrak{R} = 1,16652$ , also mit  $\mathfrak{R}' = 5,09065 \cdot 10^9$ :

für  $5^\circ$ :  $\mathfrak{R} = 4,36397 \cdot 10^9$ , woraus: für  $12^\circ$ :  $\mathfrak{R} = 4,36477 \cdot 10^9$ .

II. Gewichte 200 002,5 und 200 002,4 mg. Aeusserer und innerer Durchmesser bei  $12^\circ$  39,08 und 3,18 mm, resp. 39,04 und 3,16 mm. Da die Entfernung der Gewichtsschwerpunkte bei  $12^\circ$  300,070 mm, so wächst das Trägheitsmoment durch das Aufsetzen der Gewichte um  $\mathfrak{f} = 0,07682 \cdot 10^9$  +  $9,00432 \cdot 10^9 = 9,08114 \cdot 10^9$ . Aenderung für  $1^\circ$   $0,000331 \cdot 10^9$ .

25. März 1882. Temp.  $11,05$ ; für diese  $\mathfrak{f} = 9,08082 \cdot 10^9$ .

$\mathfrak{X}_1'$	$\mathfrak{X}'$	$\mathfrak{X}_1'$ (Gew. umgewandt)
40,7700	24,4312	40,7794
40,7649	24,4372	40,7689
40,7666	24,4359	40,7701
40,7672	24,4348	40,7728

Aus  $\mathfrak{X}' = 24,4348$ ,  $\mathfrak{X}_1' = 40,7700$  folgt für  $11,05^\circ$   $\mathfrak{R}' = 5,09025 \cdot 10^9$ , somit für  $5^\circ$ :  $5,08940 \cdot 10^9$ . Am 24. März 1882 war ähnlich gefunden (ebenfalls auf  $5^\circ$  reducirt)  $\mathfrak{R}' = 5,08824 \cdot 10^9$ , sodass ein Mittel:

$$\mathfrak{R}' = 5,08882 \cdot 10^9.$$

Um hieraus  $\mathfrak{R}$  zu berechnen, benutze ich dieselbe Verhältnisszahl wie oben, da die Umstände am 26. und 27. März, wo die wenig abweichenden Werthe 1,16670 und 1,16677 er-

halten wurden, weniger günstig waren. Es wird für  $5^\circ$ :  $\mathfrak{R} = 4,36240 \cdot 10^9$ , woraus für  $12^\circ$ :  $\mathfrak{R} = 4,36320 \cdot 10^9$ .

Die kleinen Gewichte hatten ergeben  $4,36477 \cdot 10^9$ , so dass im Mittel für  $12^\circ$   $\mathfrak{R} = 4,3640 \cdot 10^9 \pm 0,0008 \cdot 10^9$  in guter Uebereinstimmung. Eine weitere Controle erhielt ich, indem ich am alten Schiffchen die 150 g Gewichte durch eine Art sehr kurzer und weiter bifilarer Aufhängung befestigte, wodurch die Drehung derselben jedenfalls auf ein Minimum herabgesetzt wurde. Ich fand so mit dem Obigen fast identisch  $4,3642 \cdot 10^9$ .

Der bei den Ablenkungsbeobachtungen benutzte Hilfsmagnet hatte etwa dieselben äusseren Dimensionen wie der Hauptmagnet, war aber hohl. Seine Schwingungsdauer betrug etwa 19 Sec., das Torsionsverhältniss wurde am 8. April 1881 gefunden  $\theta_1 = 0,03033$ , in guter Uebereinstimmung mit früheren Messungen.

Zur Bestimmung der Abstände des Hauptmagnets in je zwei correspondirenden Lagen wurde der untere Theil des Magnetometers auf die dicke Eichenplatte des Experimentirtisches gestellt, der Magnet eingelegt und auf eine Marke an seiner Oberseite ein Mikroskop mit Fadenkreuz gerichtet. Der Magnet wurde sodann parallel mit sich selbst in die zweite Lage gebracht, ein zweites Mikroskop auf dieselbe Marke eingestellt und nach Entfernung des Magnetometers unter Zuhülfenahme eines dritten Mikroskopes der Abstand mit dem Perreaux'schen Meter verglichen. Die Operation wurde wiederholt, nachdem der Magnet sammt dem Träger um  $180^\circ$  gedreht war.

Die wegen der Theilfehler corrigirte und auf  $12^\circ$  reducirte Entfernung wurde so erhalten:

	2l	2l'
18. und 19. Sept. 1880	2400,78 mm	1800,48
26. April 1881	2400,85	1800,57
Mittel	<u>2400,82</u>	<u>1800,53</u>
	$\pm 4$	$\pm 5$

Der Aenderung dieser Längen mit der Temperatur ist später Rechnung getragen.

Der Scalenabstand betrug (mit Correction wegen der Glasdicken etc.) am:

6. April 1881	3065,74 mm =	3091,09 Scalentheile
21. April 1881	3065,79 "	3091,14 "

Bei den Ablenkungsbeobachtungen wurde der Hauptmagnet ebenfalls mit dem Träger umgelegt, wobei ich zur möglichsten Vermeidung einer Erwärmung starke Lederhandschuhe trug, nur den Träger und auch diesen nur wenige Secunden jedesmal berührte.

Die gewöhnliche Reihenfolge der Lagen des Hauptmagnets war in leicht verständlicher Bezeichnung:

Entfernung	<i>l</i>				<i>l'</i>				<i>l</i>			
Magnet	o	o	w	w	w	w	o	o	o	w	w	
Nordpol	o	w	w	o	o	w	w	o	o	w	w	o

sodass die Ablenkung in der grösseren Entfernung zweimal gemessen wurde.

Die Ablenkungsbeobachtungen dauerten etwa  $\frac{3}{4}$  Stunden, die Schwingungsbeobachtungen etwa  $\frac{1}{2}$  Stunde.

Die Reductionsformeln (12) u. (13) werden, da  $\kappa = 0,0000336$ ,  $\mu = 0,000302$ ,  $\Theta' = 0,08392$ ,  $H$  nahe 1,937,  $T_0$  und  $T_1$  nahe 12,4800, wenn als Normaltemperatur noch  $\vartheta_1 = 12$  gewählt wird:

$$(12') \quad T_1 = T_0 + 0,001948 \cdot (12 - \vartheta),$$

$$(13') \quad \Delta H = - \Delta T_1 \cdot 0,3365.$$

Die Anwesenheit des Hauptmagnets verkürzte die Schwingungsdauer des als Variationsinstrument dienenden Galvanometermagnets um 0,0004 Sec.<sup>1)</sup>, woher diese kleine Correction noch hinzugefügt ist.

Ich lasse nun die Beobachtungen folgen.

1) Die Magnete waren 5 m entfernt, und ihre Verbindungslinie schloss mit der Axe des Hauptmagnets 48° ein. Ausser dem oben angegebenen Resultate folgt noch, dass der letztere den Galvanometermagnet um 1,2 Scalentheile ablenkt, womit der Gebrauch desselben als Variationsinstrument gerechtfertigt ist.



6. April 1881. (9<sup>h</sup> 4' bis 12<sup>h</sup> 54' Abends).

		$\vartheta$	$T_0$	$T_1$
Temp.	$n = 163,31 \quad \psi = 1^\circ 30' 43,7''$		12,4773 <sup>1)</sup>	
11,5	$n' = 385,44 \quad \psi' = 3^\circ 33' 14,0''$		12,4798 <sup>1)</sup>	
	$\mathfrak{M}/H = 2,3752 \cdot 10^7$	11,04	12,4786	12,4809
Temp.	$\mathfrak{Z}$			
11,8	21,6133 $\mathfrak{M} H = 8,9106 \cdot 10^7$		12,4798 <sup>2)</sup>	
	21,6133		12,4806	
	21,6133	11,15	12,4802	12,4823
Temp.	$n = 163,35 \quad \psi = 1^\circ 30' 45,1''$		12,4804 <sup>1)</sup>	
12,0	$n' = 385,94 \quad \psi' = 3^\circ 33' 30,4''$		12,4806 <sup>1)</sup>	
	$\mathfrak{M}/H = 2,3728 \cdot 10^7$	11,32	12,4805	12,4822

Auf  $T_1 = 12,4823$  reducirt, geben die beiden Ablenkungsbeobachtungen  $2,3757 \cdot 10^7$  und  $2,3729 \cdot 10^7$ , Mittel  $2,3743 \cdot 10^7$ , also für  $T_1 = 12,4823$ :  $H = 1,9373$  und bei  $11,7^\circ$   $\mathfrak{M} = 4,5996 \cdot 10^7$ .

8. April 1881. (10<sup>h</sup> 15' bis 12<sup>h</sup> 47' Abends).

Temp.	$\mathfrak{Z}$	Mittel	$\vartheta$	$T_0$	Mittel	$T_1$
10,5	21,6044 <sup>3)</sup> 21,6059	21,6052	10,30	12,4793 12,4787	12,4790	
11,6	21,6111 <sup>4)</sup> 21,6125	21,6118	10,50	12,4790 12,4788	12,4789	
11,0		21,6085	10,40		12,4790	12,4825
						$\mathfrak{M} H = 8,9144 \cdot 10^7$

Temp. 11,0  $n = 163,48, \quad \psi = 1^\circ 30' 49,4''$   $\mathfrak{M} / H = 2,3761 \cdot 10^7$ .  
 $n' = 386,05, \quad \psi' = 3^\circ 33' 34,2''$   
 $H = 1,9369$  bei  $T_1 = 12,4825$ ;  $\mathfrak{M} = 4,6023 \cdot 10^7$  bei  $11,0^\circ$ .

11. April 1881. (10<sup>h</sup> 7' bis 12<sup>h</sup> 50' Abends).

Temp.	$\mathfrak{Z}$	Mittel	$\vartheta$	$T_0$	Mittel	$T_1$
11,0	21,5986 <sup>3)</sup> 21,5946	21,5966	10,62	12,4757 12,4704	12,4731	
11,2	21,6032 <sup>4)</sup> 21,6054	21,6043	10,74	12,4752 12,4750	12,4751	
11,1		21,6005	10,68		12,4741	12,4771
						$\mathfrak{M} H = 8,9210 \cdot 10^7$

Temp. 11,1  $n = 163,18, \quad \psi = 1^\circ 30' 39,4''$   $\mathfrak{M} / H = 2,3725 \cdot 10^7$ .  
 $n' = 385,24, \quad \psi' = 3^\circ 33' 7,3''$   
 $H = 1,9391$  bei  $T_1 = 12,4771$ ;  $\mathfrak{M} = 4,6005 \cdot 10^7$  bei  $11,1^\circ$ .

- 1) Vor und nach den Ablenkungen.      2) Mit  $\mathfrak{Z}$  gleichzeitig.  
 3) Vor der Ablenkungsbeobachtung.      4) Nach derselben.

21. April 1881. (8<sup>h</sup> 9' bis 12<sup>h</sup> 52' Abends).

$\Sigma$	Mittel	Temp.	$T_0$	Mittel	$\vartheta$	$T_1$
21,6148	21,6164 <sup>1)</sup>	12,2	12,4867	12,4854 <sup>1)</sup>	11,80	12,4862
21,6111			12,4843			
21,6228			12,4864			
21,6169	21,6247 <sup>2)</sup>	12,4	12,4842	12,4864 <sup>2)</sup>	11,90	12,4870
21,6308			12,4870			
21,6284			12,4881			

$$\mathfrak{M} H = 8,9082 \cdot 10^7 \text{ und } 8,9014 \cdot 10^7.$$

$$\text{Temp. } \begin{matrix} n = 163,37^3) \\ 12,2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \psi = 1^\circ 30' 45,7'' \\ n' = 385,70 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \psi' = 3^\circ 33' 22,4'' \\ \end{matrix} \quad \mathfrak{M} / H = 2,3753 \cdot 10^7.$$

$$\text{Temp. } \begin{matrix} n = 163,25^4) \\ 12,4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \psi = 1^\circ 30' 41,6'' \\ n' = 385,43 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \psi' = 3^\circ 33' 13,4'' \\ \end{matrix} \quad \mathfrak{M} / H = 2,3734 \cdot 10^7.$$

$$H = 1,9366 \text{ bei } T_1 = 12,4862 \quad \mathfrak{M} = 4,5999 \cdot 10^7 \text{ bei } 12,2^\circ$$

$$1,9366 \quad 12,4870 \quad 4,5963 \cdot 10^7 \quad 12,4^\circ$$

$$\text{Mittel } 1,9366 \quad 12,4866 \quad 4,5981 \cdot 10^7 \quad 12,3^\circ.$$

Zur Controle habe ich noch eine Messung vorgenommen, bei welcher der zweite zum Galvanometer gehörige Magnet von Hartmann als Hauptmagnet diente. Die auf ihn bezüglichen Data sind: Länge 169,5, Durchmesser 14,2 mm, Masse 214000 mg, Temperaturcoefficient des magnetischen Momentes 0,000307, Torsionsverhältniss (23. April 1881) 0,02789,  $(\gamma - \alpha) H / \mathfrak{M} = 0,00139$ . Das Trägheitsmoment für 12<sup>o</sup> erhielt ich in Darmstadt mit den 100 g Gewichten  $1,3948 \cdot 10^9$ , mit den 200 g Gewichten  $1,3960 \cdot 10^9$ , Mittel  $1,3954 \cdot 10^9$ . Der letztere Werth liegt den Rechnungen zu Grunde; die 150 g Gewichte, bifilar aufgehängt, gaben  $1,3941 \cdot 10^9$ . Die Beobachtungen sind ganz wie die am 21. April angestellt.

23. April 1881. (8<sup>h</sup> 16' bis 12<sup>h</sup> 38' Abends).

$\Sigma$	Mittel	Temp.	$T_0$	Mittel	$\vartheta$	$T_1$
12,1530	12,1534	12,5	12,4827	12,4820	11,96	12,4825
12,1537			12,4837			
12,1534			12,4816			
12,1536	12,1540	12,6	12,4800	12,4818	12,08	12,4820
12,1546			12,4828			
12,1543			12,4826			

$$\mathfrak{M} H = 9,0585 \cdot 10^7 \text{ und } 9,0575 \cdot 10^7.$$

1) Mittel der vier ersten Werthe.

2) Mittel der vier letzten Werthe.

3) Zwischen der ersten und zweiten Schwingungsbeobachtung.

4) Zwischen der zweiten und dritten Schwingungsbeobachtung.

Temp.	$n = 164,17$	$\psi = 1^\circ 31' 12,1''$	$\mathfrak{M} / H = 2,4063 \cdot 10^7$
12,5	$n' = 385,08$	$\psi' = 3^\circ 33' 1,8''$	
12,5	$n = 164,15$	$\psi = 1^\circ 31' 11,4''$	$\mathfrak{M} / H = 2,4066 \cdot 10^7$
	$n' = 384,95$	$\psi' = 3^\circ 32' 57,6''$	

$$\begin{array}{r}
 H = 1,9402 \text{ bei } T_1 = 12,4825 \\
 1,9400 \\
 \hline
 \text{Mittel } 1,9401 \qquad 12,4823.
 \end{array}$$

Folgende Zusammenstellung enthält die auf  $T_1 = 12,4800$  reducirten Werthe von  $H$ , (cf. 13) und die für  $12^\circ$  geltenden Werthe von  $\mathfrak{M}$  für den Meyerstein'schen Magnet.

Dat.	$H$	$A$	$M$	$A$
Meyerst. Magn. 6. April 1881	1,9380	-0,0002	$4,5984 \cdot 10^7$	$+0,0002 \cdot 10^7$
" " 8. " 1881	1,9378	-0,0004	$4,5983 \cdot 10^7$	$+0,0001 \cdot 10^7$
" " 11. " 1881	1,9382	$\pm 0,0000$	$4,5969 \cdot 10^7$	$-0,0013 \cdot 10^7$
" " 21. " 1881	1,9388	$+0,0006$	$4,5993 \cdot 10^7$	$+0,0011 \cdot 10^7$
Hartm. Magn. 23. " 1881	(1,9408)			

$$\text{Mittel der ersten vier: } 1,9382 \pm 0,0003 \quad 4,5982 \cdot 10^7 \pm 0,0007 \cdot 10^7$$

Die Uebereinstimmung der mit dem Meyerstein'schen Magnets erhaltenen Werthe ist vorzüglich — bis auf  $1/6000$  — sodass jedenfalls zufällige Fehler nur einen verschwindenden Einfluss gehabt haben, und auch der Galvanometermagnet als Variationsinstrument genügt.

Die mit dem Hartmann'schen Magnets angestellte Beobachtung schliesst sich an die vom 21. April 1881 bis auf  $1/1000$  an. Wenngleich derselbe vor dem Meyerstein'schen gewisse Vorzüge besitzt, so glaube ich doch, zunächst die mit letzterem erhaltenen Werthe verwenden zu müssen.

Widerstände. Es standen mir zu Gebote zwei Universalwiderstände und eine Widerstandsscala von Siemens, welche Instrumente mit *UWC*, *UWJ*, *WJ* bezeichnet werden mögen. Die Apparate der ersteren Art lassen sich bekanntlich auch als Wheatstone'sche Brücke verwenden, wobei man in zwei Zweigen *B* und *C* 10, 100, 1000 S.-E. einschalten kann, im dritten *A* hingegen 1 bis 10000 S.-E.<sup>1)</sup> Der gesuchte Widerstand ist  $x = AC/B$ .

1) Auf den Gebrauch des Platindrahtes zur Herstellung von Bruchtheilen einer Einheit ist absichtlich verzichtet.

Im Frühjahr 1880 wurde zunächst mit Hilfe von *UWJ* und eines Siemens'schen aperiodischen Galvanometers (Rollenpaare von etwa 1500 und 34000 Windungen, Beruhigungszeit ca. 5 Sec.) die beiden anderen Instrumente calibriert und verglichen, sodass alle Widerstände von *UWC* und *WJ* in derselben Einheit ausgedrückt waren. Durch Benutzung von *UWC* als Messbrücke liessen sich dann weiter auch andere Widerstände in dem gleichen Maasse finden. Die Calibrirung verglich diejenigen Widerstände, welche durch Ziehen der betreffenden Stöpsel hinzugefügt werden — und dies wird bei *WJ* allein gebraucht; — bei Verwendung von *UWC* als Brücke ist auf den Widerstand der steckenden Stöpsel Rücksicht genommen, der bei *UWC* für 17 Stöpsel 0,00512 S.-E. betrug. Das von mir benutzte Verfahren ist übrigens, wie mir Hr. Dr. O. Frölich nachträglich mittheilte, dasselbe, welches er im Laboratorium von Hrn. W. Siemens in Berlin eingeführt hat.<sup>1)</sup>

Der Fehler einer Widerstandsmessung dürfte nur unter ungünstigen Umständen  $\frac{1}{5000}$  erreicht haben.

Es sei noch bemerkt, dass *UWC* und *UWJ* das Einführen eines Thermometers gestatteten, *WJ* nicht. Wo die Temperatur dieses letzteren Instrumentes gebraucht wurde,

1) Es sei z. B. 10 und 10' von *UWC* zu vergleichen. In *UWJ*:  $B = 1000$ ,  $C = 10$ . In *UWC* 10 gezogen, Galvanometer:

Ruhelage	$A$ von <i>UWJ</i> = 1002	$A = 1004$
1) 463,2	2) 448,6	3) 471,6
5) 462,6	4) 448,4	—
462,9	448,5	471,6

$$\frac{2.14,4}{23,1} = 1,25, \text{ demgemäss } \frac{AC}{B} = 10,0325.$$

Ebenso ergab sich für *UWC* 10': 10,0296 und durch Wiederholung der ersten Messung 10,0320, also für 10 im Mittel 10,0323, woraus  $10' = 10 - 0,0027$ .

Man sieht, dass die Fehler von *UWJ* mit gleichem procentischen Betrage nur in die kleine Differenz 0,0027 eingehen, also vernachlässigt werden können.

Die Anordnung und Berechnung der Messungen ist wie beim Berichtigen eines Gewichtssatzes.

stand *UWJ* mit einem Thermometer seit mehreren Stunden mit demselben Tuche zugedeckt unmittelbar daneben.

Die bei den Dämpfungsbeobachtungen benutzten Widerstände 0,5, 1 und 2 von *WJ* müssen in richtigen Siemens'schen Einheiten bekannt sein. Nach Vollendung der Messungen verglich ich daher dieselben am 27. April 1881 nochmals untereinander, worauf dann Hr. Dr. O. Frölich die Güte hatte, in Berlin eine Vergleichung mit dem dortigen Normalwiderstand vorzunehmen. Er fand am 27. August 1881; wenn z. B. der durch Ziehen von 1 in *WJ* hinzugefügte Widerstand mit  $\bar{1}$  bezeichnet wird, etc.:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \overline{0,1} + \overline{0,2} + \overline{0,2'} + \overline{0,5} = 0,9988 \text{ S.-E.} \\ \bar{1} & = 1,0003 \text{ " } \\ \bar{2} & = 1,9957 \text{ " } \end{array} \right.$$

Aus meinen Messungen konnte zunächst alles durch  $\bar{1}$  ausgedrückt werden:

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \overline{0,1} + \overline{0,2} + \overline{0,2'} = \frac{1}{3} \cdot \bar{1} - 0,00140 \\ \overline{0,5} & = \frac{1}{2} \bar{1} - 0,00043 \\ \bar{1} & = \bar{1} \\ \bar{2} & = 2 \cdot \bar{1} - 0,00516 \end{array} \right.$$

also wird die Summe der links stehenden Grössen = 4.  $\bar{1} - 0,00699$ . Da nach (48) dieselbe Summe = 4 S.-E. — 0,0052, so ist  $\bar{1} = 1 \text{ S.-E.} + 0,000446$ , und mit Einsetzen in (49):

		Nach Frölich	Differenz
$\overline{0,1} + \overline{0,2} + \overline{0,2'} = 0,49882$	} 0,99861		
$\overline{0,5} = 0,49979$		0,9988	—0,00019
$\bar{1} = 1,00045$		1,0003	+0,00015
$\bar{2} = 1,99574$		1,9957	+0,00004

Die letzte Columnne zeigt die gute Uebereinstimmung meiner Messungen mit denen von Hrn. Dr. Frölich.<sup>1)</sup>

Obige Widerstände gelten für 20°. Bei 12° wird

1) Gegen die ein Jahr vorher gefundenen Werthe zeigen die obigen Differenzen. Da aber im April 1881 nur die durch den bewegten Magnet inducirten Ströme die Widerstände durchflossen haben, so ist die Aenderung jedenfalls schon vorher erfolgt.

(Temperaturcoefficient 0,000 390)  $\overline{0,5} = 0,49824$ ,  $\overline{1} = 0,99735$ ,  
 $\overline{2} = 1,98956$ .

Bei den Vergleichen mit der Tangentenbussole wurden in den das Galvanometer enthaltenden Zweig eingeschaltet 1000 + 500, 2000, 2000 + 500 Einheiten von  $WJ$ . Die Correctionen hieran sind resp.  $-0,52$ ,  $-0,41$ ,  $-0,59$ ; da ferner das Galvanometer und die Zuleitung 0,54 E. hatten, so waren die Werthe von  $W_g$ , abgesehen von der Temperaturcorrection: 1500,02, 2000,13, 2499,95 E. Dass diese Widerstände seit der Berichtigung im Frühjahr 1880 ungeändert geblieben waren, zeigten Controlmessungen, welche Hr. Prof. O. E. Meyer auf meine Bitte im Herbst 1881 anstellte, indem seine Resultate von meinen damals erhaltenen höchstens um  $\frac{1}{6000}$  abwichen.

Um einer Erwärmung durch den Strom vorzubeugen<sup>1)</sup>, bestand der Nebenschlusswiderstand  $w_n$  aus unbesponnenem Neusilberdraht von etwa 1 mm Durchmesser, der auf vier an einem Ebonitdeckel festgekittete Glasstäbe in grossen Umgängen aufgewunden war und in Benzin tauchte, dessen Temperatur durch ein Thermometer bestimmt wurde. Die Enden des Neusilberdrahtes waren an starken Messingstiften festgelöthet, und die Löthstellen befanden sich auch in der Flüssigkeit. Zur Vermeidung der Unsicherheit des Contactes hatten die Klemmschrauben dieselbe Form wie an den Siemens'schen Widerstandsscalen, und die Leitungsdrähte wurden in dieselben als plattgeschlagene Haken eingelegt, sodass grosse Berührungsflächen entstanden.

Unter Benutzung von  $UWC$  als Messbrücke wurde der Widerstand des (in Benzin eingetauchten) Neusilberdrahtes am 10. April 1881 gefunden:

mit $B = 1000$	$C = 10:$	11,0655
		11,0659
1000	100:	11,0670
100	10:	11,0667
	Mittel	11,0663

Die Uebereinstimmung dieser Resultate kann zugleich als Maassstab für die Genauigkeit der Calibrirung von  $UWC$

1) Die hierdurch entstandenen Fehler bewogen mich zur Verwerfung einer grossen Reihe von Beobachtungen vom Herbst 1880.

dienen. Aehnlich ergab sich am 12. April: 11,0665, 17. April: 11,0655, 18. April: 11,0655; für die Rechnung ist verwendet das Mittel  $w_n = 11,0660. \pm 0,00045$ .

Die hier wie in  $W_g$  zu Grunde liegende Einheit ist die oben mit  $\bar{I}$  bezeichnete von  $WJ$  bei derselben Temperatur.

Als Temperaturcoefficient für den Widerstand des Neusilbers benutzte ich nach einer Mittheilung des Hrn. Dr. Frölich 0,000 390; hiermit fast identisch ist der Werth 0,000 386, den ich für den Draht  $w_n$  fand.  $w_n$  wächst daher für jeden Grad um 0,00432.

**Tangentenbussole.** Auf den starken Kupferring einer Meyerstein'schen Tangentenbussole wand ich vier Windungen eines Kupferdrahtes von 1 mm Kern, der mit der wachsirten baumwollenen Bespinnung 1,30 mm Durchmesser hatte. Der mittlere Radius wurde zunächst erhalten aus dem äusseren Umfang des Kupferringes, den ich mit einem Stahlbandmaass ermittelte, das seinerseits mit dem Perreaux'schen Meter verglichen wurde. Es ergab sich so für  $12^\circ R = 253,76$  mm; ferner aus der mikroskopischen Vergleichung von acht genau äquidistanten äusseren Durchmessern der Windungen 253,78, also Mittel  $R = 253,77$ . Da ferner der Abstand der Pole direct gemessen wurde 43,4 mm,  $b = 4,60$  mm zu setzen ist und  $\Theta''$  am 26. April 1881 = 0,00109 gefunden wurde, so ist (bei  $12^\circ$  C.) nach (14):

$$(50) \quad J = H. 10,0533. (1 + 0,0274. \sin^2 \Phi) \operatorname{tg} \Phi.$$

Für  $1^\circ$  wächst der Coefficient um 0,00018. Der Scalenabstand betrug:

3. April 1881	3081,9 mm	=	3107,4	Scalenth.
6. April 1881	3081,9	„	3107,4	„
13. April 1881	3081,6	„	3107,1	„
19. April 1881	3081,7	„	3107,2	„

Davon, dass der kupferne Dämpfer keinen merklichen magnetischen Localeinfluss ausübte, habe ich mich auf doppelte Weise überzeugt. Zunächst zeigte sich keine deutlich erkennbare Ablenkung, als der Dämpfer in den Rahmen des Galvanometers bis nahe an den kräftigen Magneten desselben geschoben wurde. Ferner benutzte ich den



Magnet der Tangentenbussole als Hilfsmagnet für Ablenkungsbeobachtungen<sup>1)</sup> und verglich das so gefundene Moment (für 15° C.) des Hauptmagnets mit demjenigen, welches der gewöhnlich benutzte Hilfsmagnet lieferte, indem der Magnet der Sternwarte als Variationsinstrument diente. Es ergab letzterer am 25. Dec. 1880  $M = 4,5823 \cdot 10^7$ , der Magnet der Tangentenbussole am 25. Dec.  $4,5804 \cdot 10^7$ , am 26. Dec.  $4,5811 \cdot 10^7$ , Mittel  $4,5808 \cdot 10^7$ , sodass die Differenz nur  $0,0015 \cdot 10^7 = \frac{1}{3000}$  betrug.

Das Galvanometer war nach dem des Hrn. Kohlrausch<sup>2)</sup> gebaut und hatte 276 Windungen eines Drahtes von 3 mm Kern in zwölf Lagen. In zwei seitlichen Abtheilungen des Rahmens befanden sich noch etwa 150 Windungen eines dünneren Drahtes, welche mit Hülfe eines Daniell'schen Elementes (Widerstand etwa 250 S.-E.) und eines Commutators den Magnet in Bewegung zu setzen erlaubten. Der eine verwendete Magnet hatte Dimensionen entsprechend den (p. 795) angegebenen. Der denselben tragende Stahldraht hing von einem an der Wand befestigten Torsionskreise herab und besass das Torsionsverhältniss  $\theta' = 0,0839$ , worauf bei der Reduction der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Amplituden Rücksicht genommen ist. Der ganze Apparat befand sich in einem Kasten mit Spiegelglaswänden, vor welche noch Pappstücke zum Schutze gegen Wärmestrahlung gesetzt wurden.

Das Trägheitsmoment  $K$  wurde bestimmt Hülfe der schon beschriebenen 100 g Gewichte<sup>3)</sup>, welche auf zwei äussere Stifte (Entfernung der Axen bei 0°: 200,190 mm) oder

1) Auf einem langen Brette waren in geeigneter Entfernung Klötzchen aufgeleimt. Der Hauptmagnet lag bei den Beobachtungen mit dem Magnet der Tangentenbussole auf dem Brett, mit einem Ende gegen ein Klötzchen angeedrückt; die Entfernungen wurden ähnlich wie früher gefunden.

2) Kohlrausch, Pogg. Ann. Egd. p. 24 und Fig. 1 1874.

3) cf. p. 789. Auf die Biegung des Trägers ist hier nicht Rücksicht genommen. Die diesershalb an 200,190 anzubringende Correction schätze ich nach den Dimensionen desselben auf 0,003 mm.

zusammen auf einen mittleren langen Stift aufgesteckt werden konnten. Ein Laufgewicht am Magnetträger wurde so gestellt, dass die (mit einem Theodolithen controlirte) Lage durch das Aufsetzen der Gewichte nicht geändert wurde. Es wurden folgende Werthe der Schwingungsdauer beobachtet. 2. Januar 1881:

Gew. aussen	Ohne Gew.	Gew. 180° gedreht	Gew. i. d. Mitte	Gew. erste Lage
	12,4813	18,4474		
18,4457	12,4816	18,4473	12,5532	18,4446
18,4402	12,4813	18,4465	12,5533	18,4458
18,4430	12,4814	18,4471	12,5533	18,4452

Die mittlere Temperatur während der drei ersten Reihen war  $12,9^\circ$ , während der drei letzten  $13,4^\circ$ ; das Trägheitsmoment<sup>1)</sup> des unbelasteten Apparates bei  $12^\circ$  folgt aus ersteren  $K = 1,71020 \cdot 10^9 \text{ mg. mm}^2$ , aus letzteren  $= 1,70867 \cdot 10^9$  Mittel:  $1,70944 \cdot 10^9$ . Beobachtungen am 3. Juni 1881, wo nur die beiden äusseren Stifte benutzt wurden, gaben  $1,70918 \cdot 10^9$  und  $1,70895 \cdot 10^9$ , Mittel  $1,70907 \cdot 10^9$ .

Das Hauptmittel ist für  $12^\circ$ :  $K = 1,70926 \cdot 10^9$ ; die Aenderung für  $1^\circ$ :  $0,000\,057\,4 \cdot 10^9$ .

Der Scalenabstand war:

3. April 1881	2149,5 mm	= 2160,7 Scalenth.
6. April 1881	2149,5 "	2160,8 "
13. April 1881	2149,3 "	2160,6 "
17. April 1881	2149,8 "	2161,0 "
19. April 1881	2149,5 "	2160,7 "
	Mittel	2160,8

Um den Multiplicator zu centriren und die zur Reduction der Ablenkungen und Dämpfungen auf unendlich kleine Amplituden erforderlichen Constanten  $\eta$  und  $\xi'$  zu bestimmen, wurden Schwingungsdauer und log. Decr. für die natürliche und eine beiderseits abgelenkte Ruhelage bestimmt.<sup>2)</sup>

1) Bei der Berechnung ist eine — übrigens minimale — Correction eingebracht, daher rührend, dass die Mitte zwischen den äusseren Stiften um 0,5, der mittlere Stift um 0,4 mm von der durch den Draht bestimmten Drehungsaxe entfernt war.

2) cf. p. 779.

7. Jan. 1881. Natürl. Ruhelage 501,3.

Abh. d. Ruhelage $\alpha$	$\lambda$	$\lambda_0$	$T_0$	
0 <sup>1)</sup>	0,97360	0,00303	12,4890	$F_1 = 0,074\ 218$
+ 303,8 <sup>1)</sup>	0,95790	0,00298	12,4740	$F_2 = 0,073\ 212$
- 303,7	0,94850	0,00292	12,4506	$F_3 = 0,072\ 695$

Hieraus folgt nach (17):

$\delta = 31,1$  Scalentheile,  $\xi' = 3,446$  oder wenn, um mit Scalentheilen zu rechnen,  $\xi'/4r^2 = \xi$  gesetzt wird,  $\xi = 1,845 \cdot 10^{-7}$ .

Die Centrirung wurde im Januar 1881 ausgeführt, doch machen die Ablenkungsbeobachtungen im April 1881 wahrscheinlich, dass die Symmetrielage bei etwa 521 lag, was wohl durch ein inzwischen eingetretenes Werfen des Holzes erklärlich ist. Die Rechnungen sind im Folgenden so geführt, als wäre dieser kleine Centrirungsfehler nicht vorhanden; der hierdurch entstehenden Fehler ist für  $q_0$  und die Dämpfungen sehr klein<sup>2)</sup> und hebt sich aus dem Endresultat fast ganz heraus.

Da ich aber, ähnlich wie auch Hr. Schering<sup>3)</sup>, für kleine Werthe der Ablenkung der Ruhelage auch kleinere Werthe von  $\xi$  erhielt (z. B. für  $\pm 200$  etwa  $1,5 \cdot 10^{-7}$ ), und da die Correction die log. Decr. weit weniger beeinflusst, als die Ablenkungen, so habe ich es vorgezogen, den Coëfficienten  $\eta$  direct aus den Vergleichen mit der Tangentenbussole nach (22) und (25) zu bestimmen.

Dieselben führten auf  $\eta = 1,637 \cdot 10^{-6}$ , woraus nach (25) und (21)  $\xi' = 3,518$ ,  $\xi = 1,883 \cdot 10^{-7}$  in guter Uebereinstimmung mit dem nach der Schering'schen Methode erhaltenen  $1,845 \cdot 10^{-7}$ .

Wie die mit  $\eta = 1,637 \cdot 10^{-6}$  berechneten  $p_0 H$  übereinstimmen, wird aus dem Späteren hervorgehen; hier sei nur bemerkt, dass die an einem Tage gefundenen  $p_0 H$  von ihrem Mittel durchschnittlich um  $1/5000$  abwichen.

Eine weitere Controle für  $\eta$  erhielt ich, indem ich aus

1) Mittel aus zwei Beobachtungen.

2) Ich schätze denselben für  $q_0$  auf  $1/27000$  nach Formel (16).

3) cf. l. c. p. 296.

einem constanten Element, dem Galvanometer und der Widerstandsscala  $WJ$  einen unverzweigten Stromkreis bildete. Man übersieht, dass man aus einer Ablenkung, dem Verhältniss der Widerstände, und  $\eta$  die übrigen Ablenkungen muss berechnen können. Die Resultate zeigen folgende Zusammenstellung: 2. Mai 1881.

Widerstand	$n$ beob. <sup>1)</sup>	$n$ berech.	Differenz
5000,7	96,68	96,66	+ 0,02
2500,4	192,85	192,85	0,00
1500,5	319,45	319,56	- 0,11
1200,6	397,23	397,47	+ 0,24

Für die an den log. Decrementen anzubringenden Correctionen wurden, da die Decremente wenig variierten, nach (29) und (33) Tafeln entworfen. Zur Berechnung derselben wurde in (29)  $\xi' = 3,518$  gesetzt, ferner nach den Beobachtungen vom 7. Januar 1881  $\lambda_0 = 0,00303$ ,  $T_0 = 12,489$ ,  $F_0 = 0,07423$ , was für das in sich geschlossene Galvanometer  $\lambda_0/T_0 F_0 = 0,0033$  ergab. Bei einem anderen Widerstande ist dieser Term dem Gesamtwiderstande proportional.<sup>2)</sup>

Im Folgenden gebe ich  $m_1$ ,  $\Sigma'_2$  und die dem grössten jemals benutzten Bogen entsprechende Correction:

$\lambda_{\text{brigg}}$	$m_1$	$\Sigma'_2$	Max. von $n_1 + n_2$	Corr. = $\Sigma'_2 (n_1 + n_2)^2$
0,4257	3,51	$5,32 \cdot 10^{-9}$	350	0,00065
0,1995	3,50	$1,79 \cdot 10^{-9}$	400	0,00029
0,1313	3,48	$1,17 \cdot 10^{-9}$	430	0,00022
0,0982	3,47	$0,87 \cdot 10^{-9}$	430	0,00016
0,0784	3,46	$0,70 \cdot 10^{-9}$	430	0,00013

Der mittlere Einfluss dieser Correction erreichte noch nicht  $1/1000$ .

Bei den Versuchen zur Bestimmung des Coëfficienten der Selbstinduction  $II$  bestand der Zweig  $w_3$  aus einem im Zickzack ausgespannten Kupferdrahte,  $w_3$  und  $w_4$  waren die beiden Theile des Messdrahtes einer Wheatstone'schen Brücke. Der Contact wurde verschoben, bis das Siemens'

1) Mittelwerthe mehrerer, in passender Reihenfolge angestellter Beobachtungen.

2) cf. p. 781.

sche Galvanometer<sup>1)</sup> in  $w_0$  keine Ablenkung zeigte, dann schnell der Stammstrom unterbrochen und die Elongation des Siemens'schen Galvanometers beobachtet. Es war in S.-E.:  $w_0 = 0,202$ ,  $w_1 = 0,582$ ,  $w_2 = 0,488$ ,  $w_3 = 0,641$ ,  $w_4 = 0,538$ ,  $W_0$  der Reihe nach 2,458, 3,458, 1,458.

Aus diesen Angaben folgt zunächst nach (41) und (42):

$$i'_0 = \Pi J_0 / 3,175,$$

wo der Factor 3,175 S.-E. bedeutet.

Bei der zur Graduirung des Hülfsgalvanometers dienenden Versuchen war für einen Widerstand  $\bar{\omega}_0 = 12,044$  S.-E. die Elongation  $n_0$  beim Herausziehen eines Magnets aus einer Spirale 29,77, für  $\bar{\omega}_0 = 7,044$ :  $n_0 = 50,57$ , woraus  $n_0 \bar{\omega}^0 = 358,6$ , resp. 356,2, Mittel: 357,4.

Die entsprechende Operation bei dem grossen Galvanometer gab bei  $\bar{\omega}_1 = 12,449$  die Elongation 182,8 Scalentheile, also absolut  $\varphi_1 = 0,04233$ . Mit Benutzung der hinreichend genäherten Werthe  $K = 1,708 \cdot 10^9$ ,  $\lambda = 0,0393$ ,  $T_0 = 12,494$ ,  $q = 1,075 \cdot 10^9$  gibt die Formel (43)  $f = 0,000602$ . Damit ist  $n'_0$  zu multipliciren um  $i'_0$  in absolutem Maasse zu erhalten, sodass  $\Pi = n'_0 0,001913 / J_0$  S.-E.  $\times$  Sec.  $J_0$  wurde mit einer Tangentenbussole mit Nadel gemessen.

Es ergab sich: 30. Nov. 1880.

$J_0$	$n'_0$	$\Pi$	Mittel
7,89	50,5	0,01224	0,01221 = $1,158 \cdot 10^8$ mm
6,26	40,1	0,01225	S.-E. $\times$ Sec.
9,98	63,4	0,01214	

Hr. Stoletow<sup>2)</sup> berechnet für das Instrument des Hrn. Kohlrausch, welches 250 Windungen in zehn Lagen besass, aus den Dimensionen  $\Pi = 0,822 \cdot 10^8$  mm. Da das meinige 276 Windungen in 12 Lagen hatte, so wird ein roh angenäherter, jedenfalls zu kleiner<sup>3)</sup> Werth sein  $0,822 \cdot 10^8 276^3 / 250^3 = 1,00 \cdot 10^8$ , was mit dem Obigen gut übereinstimmt.

Der Einfluss des Extrastromes auf die mit  $\Omega$  bezeichnete Grösse und das Endresultat beträgt etwa  $1/1000$ , sodass

- 1) Für diese Versuche mit nur sechs Windungen versehen.
- 2) Stoletow, Phil. Mag. (4) 50. p. 404. 1875.
- 3) cf. Maxwell, Electricity and Magnetism 2. p. 311. 1873.

schon eine ziemlich rohe Bestimmung von  $H$  genügt. Es musste im December 1880 der Multiplicator abgewickelt und neu aufgewunden werden, was möglichst in den alten, vorher bezeichneten Lagen geschah. Da diese Operation gut gelang, habe ich eine nochmalige Messung von  $H$  für überflüssig gehalten.

Die Hauptbeobachtungen umfassten jedesmal 1) Vergleichung des Galvanometers mit der Tangentenbussole, 2) Bestimmung der Schwingungsdauer, 3) Ermittlung des logarithmischen Decrementes für vier verschiedene Widerstände. Da die mit  $p_0 H$  bezeichnete Grösse von den Variationen des Erdmagnetismus so gut wie unabhängig ist, so war die Reihenfolge der Operationen 1) 2) 3) 2) 1).

Die Schwingungsdauer wurde jedesmal aus dreimal je zehn Durchgangszeiten bestimmt, die in Intervallen von je zehn Minuten beobachtet wurden.<sup>1)</sup> Der Mittelwerth der Schwingungsdauer wurde zugleich benutzt, um nach (12) und (13) den Werth der Horizontalcomponente für die inzwischen vorgenommenen Dämpfungsbeobachtungen zu erhalten. Da letztere etwa 40 Minuten in Anspruch nahmen, dauerten die Operationen 2) 3) 2) zusammen ca. 80 Minuten.

Bei den Beobachtungen 1) hatte das Element und das Galvanometer einen besonderen Stöpselcommutator, und es wurden in den Stellungen  $a_1 b_1$ ,  $a_1 b_2$ ,  $a_2 b_2$ ,  $a_2 b_1$ ,  $a_1 b_1$ ,  $a_1 b_2$  je drei Umkehrpunkte des Galvanometers und die gleichzeitigen Stände der Tangentenbussole beobachtet, wodurch eine etwaige gegenseitige Beeinflussung der Instrumente eliminirt wurde. Selbstverständlich erhielten alle Ablesungen die Correction wegen der Theilfehler der Scala, die des Galvanometers ausserdem noch die Reduction auf Bogen ( $-n^3/3r^2$ ).

Bei den Dämpfungsbeobachtungen wurde der Magnet mit Hülfe der Nebenwindungen in Bewegung gesetzt, sodass die erste Elongation 200—230 Scalentheile betrug, und die successiven Umkehrpunkte notirt, bis der Bogen auf 100 bis

1) cf. Kohlrausch, Prakt. Phys. 4. Aufl. p. 147 letzter Abschnitt. 1880.

120 Sc  
geschl  
zeitig  
runge  
bussole  
Scalen  
den M  
stände  
gezoge  
Die L  
gungsc  
Uebrig  
bis 60  
D  
kürzes

Beob.  
Umkeh  
punkt

715,2

421,8

531,7

Corr  
Umke

292

655

387

585

439

547

rere  
wur  
rech

120 Scalentheile herabgesunken war. Die erste Ablenkung geschah abwechselnd nach rechts und nach links. Gleichzeitig verfolgte ein zweiter Beobachter die Aenderungen der Declination an dem Magnet der Tangentenbussole; Reihen, während welcher dieselben mehr als 0,2 Scalentheile betrugten, wurden verworfen, und die betreffenden Messungen sofort wiederholt. Die Reihenfolge der Widerstände, welche in der eingeschalteten Widerstandsscala *WJ* gezogen wurden, war 0, 0,5, 1, 1 + 0,5 (resp. 2), 1, 0,5, 0. Die Luftdämpfung wurde theils gleichzeitig mit der Schwingungsdauer, theils durch besondere Beobachtungen ermittelt. Uebrigens war dieselbe in weiten Grenzen (Bogen von 200 bis 600 Scalentheilen) von der Amplitude unabhängig.

Die Berechnung der log. Decremente wird wohl am kürzesten durch ein Beispiel erläutert.

*WJ* ganz gestöpselt. 3. April 1881.

Beob. Umkehr- punkte	Corr. Theilf. auf Bog.	zus.	Corrig. Umkehr- punkte	Bogen	$\lambda_{\text{brigg}}$	Reduct. auf $\infty$ kl Amplitud.	$\lambda_{\text{brigg}}$ reduc.
715,2	-0,13 -0,71	-0,84	714,36	292,52	0,42508	0,00045	0,42553
421,8	0,00 +0,04	+0,04	421,84	109,92	—	—	—
531,75	+0,01 0,00	+0,01	531,76	—	—	—	—

1 S. gezogen.

Corrig. Umkehrp.	Bogen	$\lambda_{\text{brigg}}$	Reduct auf $\infty$ kl. Ampl.	$\lambda_{\text{brigg}}$ reduc.	Mittel
292,82	362,95	0,13112	0,00015	0,13127	0,13146 $\pm 10$
655,77	268,37	0,13143	0,00009	0,13152	
387,40	198,29	0,13143	0,00003	0,13148	
585,69	146,51	0,13156	0,00003	0,13159	
439,18	108,22	—	—	—	
547,40	—	—	—	—	

Die log. Decremente wurden jedesmal als Mittel mehrerer derartiger Beobachtungsreihen bestimmt. Aus ihnen wurden dann die mit  $C_k$  bezeichneten Grössen nach (44) berechnet, wobei übrigens in dem Correctionsterm wegen



der Selbstinduction für  $T_0$  und  $W$  Mittelwerthe eingesetzt wurden.<sup>1)</sup>

Da aus den Gleichungen (45)  $\Omega$  und  $W_g$  linear durch die  $W_k$  ausgedrückt folgen, so kann man für die  $W_k$  zunächst ihren Werth bei der Normaltemperatur  $12^\circ$  einsetzen und die Temperaturdifferenz nachträglich in Rechnung ziehen, indem man  $\Omega$  und  $W_g$  mit demselben Factor  $(1 + 0,000390 \cdot (t_g - 12))$  multiplicirt, der eigentlich an sämtlichen  $W_k$  vorher anzubringen gewesen wäre.

Es folgen nun die Beobachtungen, die erste in ausführlicherer, die späteren in kürzerer Darstellung. Die horizontalen Striche scheiden die vor und nach den Dämpfungen erhaltenen Daten.

3. April 1881. Sonntag Vormittag.

Vergleichung mit der Tangentenbussole.

Tangentenbussole.  $r = 3107,4$

$w_g$	$t_g$ <sup>2)</sup>	$t_n$ <sup>3)</sup>	$t_n - t_g$	Reduct. <sup>4)</sup> an $w_n$	$w_n$	$n$	$J/H$
2499,95	10,73	10,06	-0,67	-0,0028	11,0632	333,00	0,53717
1500,02	10,74	10,16	-0,58	-0,0024	11,0636	332,60	0,53652
2499,95	10,90	10,46	-0,44	-0,0018	11,0642	329,01	0,53077
1500,02	10,91	10,51	-0,40	-0,0016	11,0644	330,89	0,53378

Galv.  $r = 2160,8$ .

$n$	$\varphi$ abs.	$pH$	$n^2\eta$	$p_0H$	Mittel
194,22	0,044941	18,9890	0,0617	19,0507	19,0473 ± 30
320,42	0,074144	18,8747	0,1680	19,0427	
191,92	0,044411	18,9896	0,0603	19,0499	
318,88	0,073789	18,8793	0,1665	19,0458	

1) Ich habe mich direct an den Beobachtungen vom 16. April 1881 überzeugt, dass eine weitere Näherung nach den Maxwell'schen Formeln das Endresultat für  $\Omega$  gar nicht und das für  $W_g$  nur um  $\frac{1}{10000}$  ändert.

2) Temp. in dem neben  $WJ$  stehenden  $UWJ$ .

3) Temp. des Drahtes im Benzin.

4) Da es sich nur um das Verhältniss von  $w_g$  und  $w_n$  handelt, genügt es, 11,0660 mit einer der Temperaturdifferenz entsprechenden Reduction zu versehen.

## Schwingungsdauer.

$T_0$	Mittel	Temp. $\vartheta$	$T_1$	$H$
12,4892 12,4884	12,4888	10,75	12,4912	1,9342
12,4930 12,4904	12,4917	10,86	12,4939	1,9333
12,4903				1,9338

## Dämpfungsbeobachtungen. Temp. 10,80°.

$W_k$	0	0,5	1	$1 + 0,5$	1	0,5	0
$\lambda_{\text{brigg}}$	0,42553 0,42555 0,42595 0,42592 0,42577	0,19957 <sup>1)</sup> 0,19961 0,19955 — —	0,13143 0,13146 0,13136 — —	0,09824 0,09825 0,09817 — —	0,13139 0,13125 — — —	0,19969 0,19968 — — —	0,42548 0,42556 0,42568 0,42571 —
Mittel	0,42574 ± 16	0,19958 ± 2	0,13142 ± 4	0,09822 ± 3	0,13132 ± 7	0,19968 ± 1	0,42561 ± 9
$W_k$ bei 12° in S.-E.	0		0,49824	0,99735	1,49579	Luftdämpfung	
$\lambda_{\text{brigg}}$ (Mittel)	0,42568	0,19963	0,13137	0,09822	0,00133		
$\lambda_{\text{nat}}$	0,98017	0,45967	0,30250	0,22616	0,00306		
$\lambda \sqrt{\frac{n^2 + \lambda_0^2}{n^2 + \lambda^2}} - \lambda_0$	0,93263	0,45177	0,29804	0,22252			
Red. weg. Selbstind.	-0,00185	-0,00021	-0,00006	-0,00003			
$C_k$	0,93078	0,45156	0,29798	0,22249			

Die Auflösung der Gleichungen (45) nach der Methode der kleinsten Quadrate gibt:

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= 0,43717 & W_{21} &= 0,46971 \\ \text{Temp. corr.} &= 0,00020^2) & &= 0,00022 \\ \Omega &= 0,43697 & W_g &= 0,46949 \end{aligned}$$

4. April 1881. Abends 9<sup>h</sup> bis 12<sup>h</sup> 30'.

Vergleichung mit der Tangentenbussole.

Scalaabstand: Tangentenbussole 3107,4. Galv. 2160,8.

$w_g$	$r_g$	$r_n$	$w_n$	$n \text{ Tgb.}$	$J/H$	$n \text{ Galv.}$	$pH$	$n^2 \eta$	$p_0 H$
1500,02	10,28	9,78	11,0639	321,12	0,51809	309,81	18,8985	0,1571	19,0556
2499,95	10,31	9,93	11,0644	319,28	0,51514	186,28	18,9900	0,0568	19,0468
1500,02	11,02	10,82	11,0652	317,64	0,51251	306,47	18,8958	0,1537	19,0485
19,0503									

1) Jede Zahl in den mittleren fünf Columnen ist das Mittel aus einer ähnlichen Reihe wie die zweite p. 807.

2) Nämlich 0,000390 . 1,20 .  $\Omega_{12}$ .

## Schwungsbeobachtungen.

$T_0$	Mittel	$\vartheta$	$T_1$	$H$
12,7762 12,7775	12,4769	10,43	12,4800	1,9380
12,4790 12,4791	12,4791	10,87	12,4813	1,9376
12,4780				1,9378

## Dämpfungsbeobachtungen. Temp. 10,65°.

$W_k$ bei 12°	0	0,49824	0,99735	1,49579	Luftdämpfung 0,00138
$\lambda_{\text{brigg}}$	0,42585	0,19963	0,13142	0,09822	
	0,42561	0,19959	0,13136	—	
Mittel	0,42573	0,19961	0,13139	0,09822	
$C_k$	0,93081	0,45146	0,29797	0,22244	
$\Omega_{12} = 0,43707$		$W_{g,12} = 0,46960$			
$\Omega = 0,43684$		$W_g = 0,46934$			

5. April 1881. Abends 9<sup>h</sup> 10' bis 12<sup>h</sup> 15'.

Vergleichung mit der Tangentenbussole.

Scalenabstand: Tangentenbussole 310<sup>7</sup>,4. Galv. 2160,8.

$w_g$	$r_g$	$r_n$	$w_n$	$n$ Tgb.	$J/H$	$n$ Galv.	$pH$	$n^2 \eta$	$p_0 H$
1500,02	10,59	10,22	11,0645	326,30	0,52642	314,80	18,8979	0,1721	19,0601
2000,13	11,14	10,98	11,0653	323,04	0,52118	234,85	18,9519	0,0946	19,0422
									19,0511

## Schwungsbeobachtungen.

$T_0$	Mittel	$\vartheta$	$T_1$	$H$
12,4776 12,4785	12,4781	10,69	12,4807	1,9378
12,4790 12,4803	12,4797	11,02	12,4815	1,9375
12,4789				1,9376

## Dämpfungsbeobachtungen. Temp. 10,84°.

$W_k$ bei 12°	0	0,49824	0,99735	1,49579	Luftdämpfung 0,00134
$\lambda_{\text{brigg}}$	0,42535	0,19953	0,13126	0,09819	
	0,42504	0,19950	0,13127	—	
Mittel	0,42520	0,19952	0,13127	0,09819	
$C_k$	0,92970	0,45128	0,29773	0,22239	
$\Omega_{12} = 0,43701$		$W_{g,12} = 0,47003$			
$\Omega = 0,43681$		$W_g = 0,46982$			



## Schwungsbeobachtungen.

$T_0$	Mittel	$\vartheta$	$T_1$	$H$
12,4784 12,4804	12,4794	11,35	12,4807	1,9382
12,4812 12,4796	12,4804	11,52	12,4813	1,9380
12,4799				1,9381

## Dämpfungsbeobachtungen. Temp. 11,42°.

$W_k$ bei 12°	0	0,49824	0,99735	1,98956	Luftdämpfung
$\lambda_{\text{brigg}}$	0,42245	0,19872	0,13090	0,07851	0,00129
	0,42211	0,19867	0,13093	—	
Mittel	0,42228	0,19870	0,13092	0,07851	
$C_k$	0,92409	0,44957	0,29705	0,17750	
$\Omega_{12} = 0,43682$		$W_{g_{12}} = 0,47282$			
$\Omega = 0,43672$		$W_g = 0,47271$			

16. April 1881. Abends 8<sup>h</sup> 45' — 11<sup>h</sup> 5'.

Vergleichung mit der Tangentenbussole.

Scalenabstand: Tangentenbussole 3107,2. Galv. 2160,8.

$w_g$	$r_g$	$r_n$	$w_n$	$n\text{Tgb.}$	$J/H$	$n\text{Galv.}$	$pH$	$n^2\eta$	$p_0H$
1500,02	11,60	11,75	11,0666	315,46	0,50907	304,51	18,8997	0,1518	19,0515
2000,13	11,89	12,11	11,0669	307,51	0,49630	223,82	18,9648	0,0820	19,0468
									19,0492

## Schwungsbeobachtungen.

$T_0$	Mittel	$\vartheta$	$T_1$	$H$
12,4816 12,4804	12,4810	11,61	12,4818	1,9379
12,4814 12,4804	12,4809	11,84	12,4812	1,9381
12,4810				1,9380

## Dämpfungsbeobachtungen. Temp. 11,75°.

$W_k$ bei 12°	0	0,49824	0,99735	1,98956	Luftdämpfung
$\lambda_{\text{brigg}}$	0,42192	0,19852	0,13079	0,07841	0,00130
	0,42183	0,19845	0,13083	—	
Mittel	0,42188	0,19848	0,13081	0,07841	
$C_k$	0,92326	0,44906	0,29678	0,17725	
$\Omega_{12} = 0,43626$		$W_{g_{12}} = 0,47263$			
$\Omega = 0,43622$		$W_g = 0,47258$			

18. April 1881. Ostermontag Vorm. 9<sup>h</sup> 26 — 11<sup>h</sup> 50.

Vergleichung mit der Tangentenbussole.

Scalenabstand: Tangentenbussole 3107,2. Galv. 2160,8.

$r_g$	$r_g$	$r_n$	$r_n$	$n$ Tgb.	$J/H$	$n$ Galv.	$pH$	$n^2\eta$	$p_0H$
1500,02	11,99	12,36	11,0675	306,27	0,49430	295,82	18,9076	0,1433	19,0509
2000,13	12,03	12,46	11,0678	305,59	0,49321	222,52	18,9705	0,0810	19,0515
									19,0512

## Schwingungsbeobachtungen.

$T_0$	Mittel	$\vartheta$	$T_1$	$H$
12,4843 12,4848	12,4846	11,70	12,4852	1,9369
12,4840 12,4880	12,4860	11,91	12,4862	1,9366
				1,9367

## Dämpfungsbeobachtungen. Temp. 11,80.

$W_k$ bei 12°	0	0,49824	0,99735	1,49579	Luftdämpfung
$\lambda_{\text{brigg}}$	0,42245	0,19868	0,13081	0,09798	0,00132
	0,42220	0,19875	0,13097		
Mittel	0,42233	0,19872	0,13089	0,09798	
$C_k$	0,92411	0,44954	0,29691	0,22196	

$$\Omega_{12} = 0,43658, \quad W_{g_{12}} = 0,47251,$$

$$\Omega = 0,43655, \quad W_g = 0,47247.$$

Ueber die Genauigkeit der Dämpfungsbeobachtungen gewinnt man ein Urtheil, wenn man (45) in die Form setzt:  $\Omega_{12} = W_g C_k + W_k C_k$  und mit Hülfe des nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen  $W_g$  die Werthe von  $\Omega$  berechnet. Die Resultate sind im Folgenden zusammengestellt.

3. April 1881.		4. April 1881.		5. April 1881.	
$\Omega_{12}$	$A$	$\Omega_{12}$	$A$	$\Omega_{12}$	$A$
0,43720	+0,00003	0,43711	+0,00004	0,43704	+0,00003
0,43709	— 8	0,43695	— 12	0,43697	— 4
0,43716	— 1	0,43711	+ 4	0,43688	— 13
0,43726	+ 9	0,43713	+ 6	0,43714	+ 13
0,43717	$\pm 0,00005$	0,43707	$\pm 0,00006$	0,43701	$\pm 0,00008$

12. April 1881. 15. April 1881. 16. April 1881. 18. April 1881.

$\Omega_{12}$	$\Delta$	$\Omega_{12}$	$\Delta$	$\Omega_{12}$	$\Delta$	$\Omega_{12}$	$\Delta$
0,43657	+0,00003	0,43693	+0,00011	0,43636	+0,00010	0,43665	+0,00007
0,43653	— 1	0,43657	— 25	0,43598	— 28	0,43640	— 18
0,43634	— 20	0,43671	— 11	0,43627	+	1	0,43642
0,43673	+ 19	0,43708	+ 26	0,43645	+ 19	0,43684	+ 26
0,43654	$\pm 0,00011$	0,43682	$\pm 0,00018$	0,43626	$\pm 0,00014$	0,43658	$\pm 0,00017$

Die Abweichungen von den nach der Methode der kleinsten Quadrate gefolgerten  $\Omega$  sind klein, doch lässt sich eine gewisse Regelmässigkeit in derselben nicht verkennen, und es unterscheiden sich auch deutlich die ersten drei von den letzten vier Reihen. In einer mangelhaften Calibrirung der Widerstandsscala möchte ich den Grund nicht suchen; eher könnte der ungleichmässige Gang der Temperaturänderung, besonders des Galvanometerdrahtes, die Ursache sein.

Ich habe die ganze Rechnung noch unter Weglassung der Beobachtungen mit ganz gestöpseltem  $WJ$  ( $W_k = 0$ ) wiederholt;  $\Omega$  fiel etwa  $\frac{1}{2000}$  grösser, das Endresultat für  $\sigma$  also um den gleichen Betrag kleiner aus.

Berechnet man aus den oben angegebenen  $W_g$  (welche für die bei den Dämpfungsbeobachtungen mitgetheilten Temperaturen gelten, den Widerstand des Galvanometers für  $12^\circ$ , so folgt:

0,4716, 0,4717, 0,4719, Mittel 0,4717.  
0,4733, 0,4737, 0,4730, 0,4732, Mittel 0,4733.

Die drei ersten Werthe stimmen untereinander, soweit man es bei der Unsicherheit über die Temperatur der sehr bedeutenden Metallmasse des Galvanometerdrahtes erwarten kann, ebenso die vier letzten. Auch der Unterschied der Mittel entspricht nur etwa  $0,9^\circ$ , kann aber auch andere Gründe haben.

Jetzt sind alle Data bereit, um mit Hülfe von (47) zum Schlussresultat zu gelangen. Zu obigen sieben Beobachtungen füge ich noch die Resultate einer achten vom 9. und 10. Januar 1881, welche in mehrfacher Beziehung anders angeordnet war und sich besonders dadurch unterschied, dass während sämtlicher Messungen (auch des Erd-



magnetismus) der Magnet der Sternwarte als Variationsinstrument beobachtet wurde.

Dat.	$p_0 H$	$H$	Temp.	$T_0$	$\Omega$	$\sigma=10^{10} \times$	$\Delta$
9. Jan.	19,062	1,9363	11,36	12,4851	0,43712	0,94834	+0,00009
3. April	19,047	1,9338	10,80	12,4903	0,43697	0,94852	+ 27
4. "	19,050	1,9378	10,65	12,4780	0,43684	0,94798	- 27
5. "	19,051	1,9376	10,84	12,4789	0,43681	0,94807	- 18
12. "	19,055	1,9395	11,02	12,4744	0,43637	0,94865	+ 40
15. "	19,055	1,9381	11,42	12,4799	0,43672	0,94797	- 28
16. "	19,049	1,9380	11,75	12,4807	0,43622	0,94837	+ 12
18. "	19,051	1,9367	11,80	12,4853	0,43655	0,94812	- 13
						<b>0,94825</b>	<b>+0,00022</b>

Die Einzelresultate weichen vom Mittel um  $\frac{1}{4300}$  durchschnittlich ab, und die Fehler zeigen auch keine Gesetzmässigkeit irgend welcher Art, insbesondere besteht kein Unterschied zwischen der ersten, den drei folgenden und den vier letzten Beobachtungen.

Auf eine ausführliche Schätzung des möglichen Fehlers will ich nicht weiter eingehen, da gegen die Unsicherheit der Horizontalcomponente infolge etwaiger constanter Fehler doch alle übrigen Fehlerquellen zurücktreten.

In dieser Beziehung sei nochmals daran erinnert, dass die Ersetzung des Hauptmagnets durch den Hartmann'schen ein um  $\frac{1}{1000}$  grösseres  $H$  gab, und andererseits die Benutzung eines sehr kleinen Hülfsmagnets ein nur um  $\frac{1}{3000}$  abweichendes Moment des Hauptmagnets lieferte.

Es erscheint daher die Erwartung nicht unberechtigt, dass  $H$  bis auf  $\frac{1}{800} - \frac{1}{1000}$  richtig bestimmt ist, und dass daher der Fehler im Endresultat:

$$1 \text{ S.-E.} = 0,9482 \cdot 10^{10} \text{ mm/Sec.}$$

den doppelten Betrag nicht viel übersteigt.

Die hier zu Grunde liegende Siemens'sche Einheit ist die bis 1881 benutzte des Siemens'schen Laboratoriums. Ueber das Resultat der seitdem dort vorgenommenen „Reconstruction“ der Quecksilbereinheit habe ich nur in Erfahrung bringen können, dass die Differenz „einige Zehntausendtheile“ betrage.

Ich enthalte mich hier absichtlich einer jeden Kritik

der Resultate anderer Beobachter und stelle dieselben nur der Vergleichung wegen noch einmal kurz zusammen. (Erdradius/Secunde).

Lorenz . .	0,9333	Kohlrausch <sup>2)</sup>	0,944
Rayleigh .	0,9413	D.	0,9483
Rowland <sup>1)</sup> .	0,9431	British-Ass. <sup>1)</sup>	0,9530
bis	0,9459	H. F. Weber .	0,9550
Mittel	0,9445		

Es bleibt mir noch übrig, dankbar der Unterstützung zu gedenken, die Hr. Prof. O. E. Meyer und Hr. Prof. Galle mir bei meiner Arbeit haben zu Theil werden lassen.  
Darmstadt, den 9. Sept. 1882.

### III. Ueber electricische Schwingungen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Phasen; von A. Oberbeck.<sup>3)</sup>

#### Einleitung.

Als electricische Schwingungen kann man solche electricische Ströme bezeichnen, deren Richtung periodisch wechselt, und deren Intensität sich nach dem Gesetze einer Sinusfunction der Zeit verändert. Die Schwingungsamplitude (der grösste Werth der Stromstärke) kann constant sein oder mit der Zeit abnehmen. Ströme der letzten Art erhält man bekanntlich bei der Entladung eines Condensators durch Leitungen von mässigem Widerstand, am einfachsten, besonders mit Vermeidung von Funkenstrecken, nach einer von Helmholtz<sup>4)</sup> angegebenen Methode, indem man die Pole der secundären Rolle eines Inductionsapparates mit den Bele-

1) Hier wie zur Umrechnung der Resultate von Hrn. Rowland liegt der Werth zu Grunde, den Hr. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 6. p. 34, 1874 mittheilt, 1 B. A. U. = 1,0493 S.-E.

2) Nachr. d. Göttinger Ges. d. W. 6. Sept. 1882.

3) Im Auszuge der K. preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin am 16. Febr. 1882 vorgelegt.

4) H. Helmholtz, Verhandl. des naturh. Vereins zu Heidelberg 5. p. 27—31. 1869. Gesamm. Abhandl. p. 531—536.

gungen eines Condensators verbindet. Jeder einzelne Inductionsstrom löst sich dann in eine Reihe von Schwingungen mit abnehmender Amplitude auf.

Schwingungen mit constanter Amplitude entstehen bei der Rotation eines Magnets im Innern einer Drahtrolle. Diese Ströme sind von F. Kohlrausch specieller untersucht<sup>1)</sup> und von ihm selbst und von anderen mit bestem Erfolg zur Bestimmung des Widerstandes von Flüssigkeiten benutzt worden. Hierbei wurde gewöhnlich die Stromverzweigung der Wheatstone'schen Brücke angewandt und die Stromlosigkeit des Brückenzeiges durch das Electrodynamometer oder durch das Telephon nachgewiesen.

Bei diesen Untersuchungen hatte man mehrfach Gelegenheit, zu beobachten, dass electricische Schwingungen in verzweigten Leitersystemen nach wesentlich anderen Gesetzen sich verbreiten, als constante Ströme. Besonders gelingt es bei der Wheatstone'schen Brücke nicht immer, den Brückenzeig auf die gewöhnliche Art, d. h. durch passende Combination der Widerstände in den Seitenzweigen stromlos zu machen, sodass z. B. ein Telephon in demselben unter gewissen Umständen, welche Wietlisbach<sup>2)</sup> vor kurzem näher erörterte, niemals durch Widerstandsänderungen allein zum Schweigen gebracht werden kann. Als ich in einem derartigen Fall ein Electrodynamometer<sup>3)</sup> in die Brückenverzweigung gebracht hatte, und zwar in der bei Widerstandsmessungen mit Wechselströmen gebräuchlichen Weise<sup>4)</sup>, d. h. die festen Rollen in denselben Zweig mit der Stromquelle und nur die bewegliche Rolle in den Brückenzeig, gelang es wieder, scheinbar ähnlich wie bei constanten Strömen, durch passende Wahl der Widerstände in den Seitenzweigen die Ablenkung der beweglichen Rolle zu verhindern. Dabei überzeugte ich mich bald, dass dies nicht infolge der

1) F. Kohlrausch und W. A. Nippoldt, Pogg. Ann. 138. p. 280 u. 370. 1869; 148. p. 143. 1873; Jubelbd. p. 290. 1874.

2) Wietlisbach, Monatsber. der Berl. Ak. 1879; p. 280—283.

3) Es wurde ein von Siemens und Halske bezogenes Instrument benutzt; vgl. electrotechn. Zeitschr. 2. p. 14—15. 1881.

4) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 142. p. 418—433. 1871.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVII.

Stromlosigkeit des Brückendrahts geschah, sondern nur durch das eigenthümliche Verhalten des Electrodynamometers gegen Wechselströme erklärt werden konnte. Auf dasselbe hat zwar schon derjenige Physiker <sup>1)</sup>, welchem wir das Electrodynamometer verdanken, hingewiesen. Doch ist diese bemerkenswerthe Eigenschaft des Electrodynamometers bisher nicht weiter zur Untersuchung electrischer Schwingungen verwerthet worden.

Das Drehungsmoment der beweglichen Rolle des Electrodynamometers ist bekanntlich dem Product der Intensitäten der beiden Ströme proportional, welche durch die feste und die bewegliche Rolle fließen. Sind beide Ströme electrische Schwingungen von gleicher Schwingungsdauer  $T$ , und ist letztere klein im Vergleich zu der Schwingungsdauer der Rolle, so ist das Drehungsmoment derselben proportional dem Mittelwerthe der Producte der Stromstärken:

$$\frac{1}{T} \int_0^T JJ' . dt.$$

Die beiden Ströme können verschiedené Amplituden und verschiedene Phasen haben.

Es sei daher:

$$J = A . \cos \frac{\pi t}{T}, \quad J' = A' . \cos \left( \frac{\pi t}{T} - \varepsilon \right),$$

Dann ist: 
$$\frac{1}{T} \int_0^T JJ' dt = \frac{AA' \cos \varepsilon}{2}.$$

Hieraus folgt der Satz:

Fließen durch die feste und die bewegliche Rolle eines Electrodynamometers electrische Schwingungen, welche gleiche Schwingungsdauer, aber verschiedene Phasen haben, so ist die Ablenkung der beweglichen Rolle dem Product aus den Amplituden oder Maximalwerthen der Stromstärken und dem Cosinus der Phasendifferenz proportional.

1) W. Weber, Electrodyn. Maassbestimm. 5. Abhandl. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 6. p. 654—656. 1864.

Es lag nahe, diesen Satz in der Weise zu prüfen und zu verwerthen, dass man direct zwei Wechselströme erzeugt, welche gleiche Schwingungsdauer und einen bekannten Phasenunterschied haben. Man kann z. B. einen Magnet im gemeinsamen Mittelpunkte zweier verticaler Drahtkreise rotiren lassen, deren Ebenen einen Winkel miteinander bilden. Ich habe eine diesen Gedanken verwirklichende Einrichtung an einem Kohlrausch'schen Sinusinductor anbringen lassen und hoffe, später über Versuche mit demselben berichten zu können.

Man kann aber auch electricische Schwingungen von verschiedener Phase dadurch erhalten, dass man die Wechselströme einer periodischen Stromquelle durch ein verzweigtes Leitersystem fliessen lässt. Dann haben im allgemeinen die Schwingungen in den einzelnen Zweigen verschiedene Phasen. Befindet sich die feste Rolle in einem Zweig, die bewegliche in einem anderen, und erfährt letztere keine Ablenkung, so kann man daraus schliessen, dass entweder die Stromstärke in einem der Zweige Null ist, oder dass die beiden Schwingungen einen Phasenunterschied  $\pi/2$  haben. Bei dem oben angedeuteten Versuche musste der letzte Fall eingetreten sein.

Es kam daher zunächst darauf an, die Gesetze der Verbreitung alternirender Ströme in einem verzweigten Leitersystem mit besonderer Berücksichtigung der Phasen festzustellen.

Dieselben werden in dem ersten Abschnitt dieser Abhandlung allgemein entwickelt und dann auf die Stromverzweigung der Wheatstone'schen Brücke angewandt.

In dem zweiten Abschnitt sind die Versuche mitgetheilt, welche ich zur Prüfung der wichtigsten dieser Gesetze mit Benutzung des Electrodynamometers angestellt habe.

#### I. Theorie der Verbreitung electricischer Schwingungen in einem verzweigten Leitersystem.

Zur Vereinfachung mag angenommen werden, dass das System keine chemisch zersetzbaren Leiter enthält. Electricische Ströme sollen in demselben nur von aussen durch Induction hervorgerufen werden. Bei jedem Zweig wird die

Selbstinduction berücksichtigt. Dagegen soll die Induction irgend eines Zweiges auf einen anderen ausgeschlossen sein.

Wenn einzelne Verzweigungspunkte mit den Belegungen von Condensatoren verbunden sind, so werden dieselben bei der Verbreitung veränderlicher Ströme einen gewissen Einfluss ausüben. Da nun eine jede enggewundene Rolle an und für sich als Condensator anzusehen ist<sup>1)</sup>, so habe ich die weitere Annahme gemacht, dass zu jedem Zweig ein

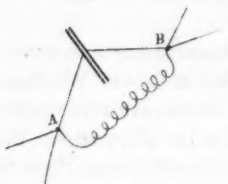


Fig. 1.

besonderer Condensator gehört, d. h. dass die Endpunkte des Zweiges mit den beiden Belegungen eines Condensators verbunden sind, wobei aber der Widerstand dieser Zuleitungen als verschwindend klein angesehen werden soll.

Es sei nun  $AB$  (Fig. 1) einer der Zweige des Systems, und es sei:

$p$  das Potential des Zweiges auf sich selbst,

$w$  sein Widerstand,

$c$  die Capacität des zugehörigen Condensators,

$E$  die von aussen inducirte electromotorische Kraft und

$J$  die Stromstärke zur Zeit  $t$ .

Die beiden letzten Grössen sind Functionen der Zeit.

Die Potentiale der freien Electricität in  $A$  und  $B$  seien  $V_a$  und  $V_b$ . zur Zeit  $t$

Dann gilt zunächst die Gleichung:

$$p \frac{dJ}{dt} + wJ + V_b - V_a = E.$$

Stellt man ähnliche Gleichungen für alle übrigen Zweige auf, so erhält man für einen geschlossenen Kreis von Zweigen die Gleichung:

$$(1) \quad \sum \left\{ p \frac{dJ}{dt} + wJ \right\} = \sum E.$$

Fassen wir ferner den Verzweigungspunkt  $A$  ins Auge, so ist die in den Zweig  $AB$  abfliessende Electricitätsmenge  $J$ ,

1) H. Helmholtz, Verhandl. des naturh. Vereins zu Heidelberg. 5. p. 27–31. 1869. Gesammelte Abh. p. 535–536. 1882.

während gleichzeitig der mit  $A$  verbundenen Belegung des Condensators die Menge:

$$c \frac{d}{dt} (V_a - V_b)$$

zuströmt. Für dieselbe kann man aber nach der ersten Gleichung auch schreiben:

$$c \frac{d}{dt} \left\{ wJ + p \frac{dJ}{dt} - E \right\}.$$

Demnach gilt für jeden Verzweigungspunkt die Gleichung:

$$(2) \quad \sum \left\{ J + c \frac{d}{dt} \left( wJ + p \frac{dJ}{dt} - E \right) \right\} = 0.$$

Die Gleichungen (1) und (2) sind die Kirchhoff'scher Sätze bei den oben zusammengestellten Annahmen über das Leitersystem.

Dieselben sollen nun auf den folgenden einfachen Fall angewandt werden.

In einem, einzigen Zweig — ich will denselben kurz als Hauptzweig bezeichnen — werde durch eine periodische electromotorische Kraft ein Strom erregt. Derselbe verbreitet sich in dem Leitersystem, und es mag angenommen werden, dass die Stromstärke in dem Hauptzweig durch den einfachen Ausdruck:

$$J_0 = \cos \frac{\pi t}{T}$$

wiedergegeben werden kann.

Hierfür kann man auch schreiben:

$$J_0 = \frac{1}{2} \{ e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} \},$$

$$\text{wo:} \quad i = \sqrt{-1}, \quad \lambda = \frac{i\pi}{T}$$

gesetzt ist.

In allen übrigen Zweigen sei  $E = 0$ . Schliesst man dann den Hauptzweig aus den Kreisumgängen aus, so gibt Gleichung (1):

$$(3) \quad \sum \left\{ p \frac{dJ}{dt} + wJ \right\} = 0.$$

Ebenso erhält man für alle Verzweigungspunkte mit Ausnahme der Enden des Hauptzweiges:



$$(4) \quad \sum \left\{ J + c \frac{d}{dt} (wJ + p \frac{dJ}{dt}) \right\} = 0.$$

Die Berechnung von  $J$  für irgend einen anderen Zweig kann dann in der Weise ausgeführt werden, dass man zunächst:

$$J_0 = e^{\lambda t}, \quad J = k e^{\lambda t} \text{ setzt.}$$

Ist ferner:

$$(5) \quad a = w + \lambda p, \quad (6) \quad b = 1 + c \lambda (w + \lambda p),$$

so geben die Gleichungen (3) und (4):

$$(7) \quad \sum (ka) = 0, \quad \sum (kb) = 0.$$

Nur für die Endpunkte des Hauptzweiges hat man zu setzen:

$$1 = \sum (kb).$$

Aus diesen Gleichungssystemen ist  $k$  für jeden Zweig zu berechnen. Man übersieht leicht, dass  $k$  im allgemeinen eine complexe Grösse sein wird. Man kann daher schreiben:

$$k = m + in,$$

wo  $m$  und  $n$  reell sind.

Führt man dieselbe Rechnung durch, indem man  $+\lambda$  durch  $-\lambda$  ersetzt, so erhält man:

$$k' = m - in.$$

Die dem Strome:  $J_0 = \frac{1}{2} \{ e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} \}$

entsprechende Stromstärke ist daher:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \{ (m + in) e^{\lambda t} + (m - in) e^{-\lambda t} \} = m \cos \frac{\pi t}{T} - n \sin \frac{\pi t}{T} \\ &= \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \cos \left( \frac{\pi t}{T} - \epsilon \right). \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz  $\epsilon$  dieses Stromes ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \epsilon = - \frac{n}{m}.$$

Hieraus lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen:

a) Wenn durch eine periodische Stromquelle electricische Schwingungen von bestimmter Dauer in einem Zweig erregt werden, so sind die Amplituden und Phasen der Schwingungen in den anderen Zweigen verschieden von denen im Hauptzweig.

b) Nur wenn die Selbstinduction in allen Zweigen vernachlässigt werden kann, und wenn keine Condensatoren mit den Verzweigungspunkten verbunden sind, haben die Schwingungen überall dieselben Phasen.

c) Soll bei einer gegebenen Schwingungsdauer der Strom in einem der Zweige verschwinden, so müssen im allgemeinen die beiden Bedingungsgleichungen:

$$m = 0, \quad n = 0$$

erfüllt werden.

d) Wenn dagegen die Schwingung desselben Zweiges eine Phasendifferenz von  $\pi/2$  gegen die Schwingung des Hauptzweiges erhalten soll, so braucht nur eine Bedingungsgleichung:

$$m = 0$$

erfüllt zu werden.

Die allgemeinen Gleichungen sollen nun für den Fall der Stromverzweigung nach dem Schema der Wheatstone'schen Brücke gelöst werden.

Der Hauptzweig (vgl. Fig. 2) sei  $BED$ . Derselbe sowie der andere Diagonalzweig (die Brücke)  $AC$ , sollen keine Condensatoren haben. Auch sei in  $AC$  die Selbstinduction zu vernachlässigen. Für diesen Zweig sollen die Bezeichnungen ohne Index gelten, während für die vier Seitenzweige die Grössen  $p, w, c, a, b, k$  mit den entsprechenden Nummern 1 bis 4 bezeichnet werden. Nach den Gleichungen (5) und (6) erhält man dann das folgende System:

$$1 = k_1 b_1 + k_2 b_2 = k_3 b_3 + k_4 b_4, \quad k_2 b_2 = k + k_3 b_3 \\ kw = k_1 a_1 - k_2 a_2 = k_3 a_3 - k_4 a_4.$$

Aus diesen Gleichungen können die fünf Grössen  $k$  berechnet werden. Insbesondere ergibt sich für den Brückenweig:

$$(9) \quad k = \frac{a_1 a_3 b_2 b_4 - a_2 a_4 b_1 b_3}{(a_1 b_2 + a_2 b_1)(a_3 b_4 + a_4 b_3) + w \{ b_1 b_2 (a_3 b_4 + b_3 a_4) + b_3 b_4 (a_1 b_2 + b_1 a_2) \}}.$$

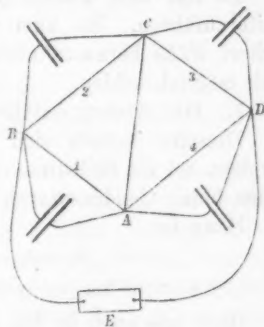


Fig. 2.

Aus diesem Ausdruck lassen sich die Bedingungen ableiten, unter welchen der Brückenstrom verschwindet oder eine Phasendifferenz von  $\frac{1}{2}\pi$  mit dem Hauptstrom hat.

Setzt man für die  $a$  und  $b$  nach Gl. (5) und (6) ihre Werthe ein und nimmt ferner:

$$\lambda = i\beta, \quad \beta = \frac{\pi}{T},$$

so stellt sich der Ausdruck  $k$  zunächst in der Form dar:

$$(10) \quad k = \frac{A + i\beta B}{C + i\beta D},$$

wo:  $A, B, C, D$  reelle Grössen sind. Dann ist aber auch:

$$k = \frac{(AC + BD\beta^2) + i\beta(BC - AD)}{C^2 + \beta^2 D^2},$$

oder nach den früheren Bezeichnungen:

$$(11) \quad m = \frac{AC + \beta^2 BD}{C^2 + \beta^2 D^2}, \quad n = \beta \frac{BC - AD}{C^2 + \beta^2 D^2}.$$

Es hat wohl keinen Zweck, diese Rechnung allgemein weiterzuführen. Es kam vielmehr darauf an, solche einfachere Fälle herauszufinden, deren Prüfung durch den Versuch möglich schien.

1. Das System enthält nur eine Inductionsrolle.

Dieselbe befinde sich im Zweig 1. In allen übrigen Zweigen sei die Selbstinduction zu vernachlässigen. Ebenso sollen keine Condensatoren vorhanden sein.

Dann ist:

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1, \\ a_1 = w_1 + i\beta p_1, \quad a_2 = w_2, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4.$$

Hier, wie auch in den folgenden Rechnungen, tritt stets ein Ausdruck auf, für den die abgekürzte Bezeichnung:

$$(12) \quad w' = \frac{w(w_3 + w_4)}{w_3 + w_4 + w},$$

gesetzt werden soll.

Dann ist:

$$A = (w_1 w_3 - w_2 w_4), \quad B = p_1 w_3, \\ C = (w_3 + w_4 + w)(w_1 + w_2 + w'), \quad D = (w_3 + w_4 + w) \cdot p_1.$$

Man übersieht leicht, dass die Grössen  $m$  und  $n$  nur dann gleichzeitig verschwinden können, wenn:  $w_3 = w_4 = 0$ .

Dieses Resultat ist selbstverständlich und zeigt, dass

bei einer wirklichen Brückencombination mit vier von Null verschiedenen Seitenzweigen und einer Inductionsrolle in einem Zweig der Brückenstrom niemals zum Verschwinden gebracht werden kann. Dagegen kann derselbe sehr wohl die Phasendifferenz  $\frac{1}{2}\pi$  gegen den Hauptstrom haben. Die Bedingung:

$$m = 0$$

gibt:

$$(w_1 w_3 - w_2 w_4)(w_1 + w_2 + w') + \beta^2 p_1^2 w_3 = 0,$$

oder:

$$(13) \quad \beta^2 p_1^2 = \left( w_2 \frac{w_4}{w_3} - w_1 \right) (w_1 + w_2 + w').$$

Diese Gleichung zeigt, dass man das electrodynamische Potential einer Rolle auf sich selbst durch Bestimmung von Widerständen und durch eine Zeitmessung ( $\beta = \pi/T$ ) berechnen kann.

Es ist vielleicht noch von Interesse, darauf hinzuweisen, dass diese Gleichung mit den Dimensionen der vorkommenden Grössen in Einklang ist. Hiernach würde die Gleichung lauten:

$$[T^{-1}][p] = [w].$$

Im electrostatischen System ist aber:

$$[p] = \left[ \frac{T^2}{L} \right], \quad w = \left[ \frac{T}{L} \right];$$

die Gleichung wird daher erfüllt.

## 2. Das System enthält nur einen Condensator.

Derselbe befinde sich im Zweig 1. Seine Capacität sei  $c_1$ ; mit  $w_1$  soll der Widerstand des isolirenden Mittels bezeichnet werden. Die übrigen Zweige haben keine Condensatoren. Ferner soll überall die Selbstinduction vermieden sein. Dann ist:

$$a_1 = w_1, \quad a_2 = w_2, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4,$$

$$b_1 = 1 + i\beta c_1 w_1, \quad b_2 = b_3 = b_4 = 1.$$

Aus Gl. (9) und den leicht zu berechnenden Werthen  $A, B, C, D$  ergibt sich, dass durch keine Combination der Widerstände der Brückenstrom zum Verschwinden gebracht werden kann. Dagegen hat derselbe die Phasendifferenz  $\frac{1}{2}\pi$  gegen den Hauptstrom, wenn:

$$\beta^2 w_1^2 c_1^2 w_2 w_4 (w_2 + w') = (w_1 w_3 - w_2 w_4)(w_1 + w_2 + w').$$

Man kann hierfür auch schreiben:

$$(14) \quad \beta^2 c_1^2 = \left( \frac{w_3}{w_3 w_4} - \frac{1}{w_1} \right) \left( \frac{1}{w_3 + w'} + \frac{1}{w_1} \right).$$

Da der Widerstand des Isolators im allgemeinen sehr gross sein wird im Vergleich zu den Drahtwiderständen, so kann man mit Vernachlässigung von  $1/w_1^2$  schreiben:

$$(15) \quad \beta^2 c_1^2 = \frac{w_3}{w_2 w_4} \cdot \frac{1}{(w_2 + w')} + \frac{1}{w_1} \left( \frac{w_3}{w_2 w_4} - \frac{1}{w_2 + w'} \right),$$

oder endlich in erster Annäherung:

$$\beta^2 c_1^2 = \frac{w_3}{w_2 m_4} \cdot \frac{1}{w_2 + w'}.$$

Demnach lässt sich, in ganz ähnlicher Weise wie das Inductionspotential einer Rolle, auch die Capacität eines Condensators durch Widerstände und eine Zeit ausdrücken. Selbstverständlich ist auch diese Gleichung in Uebereinstimmung mit den Dimensionen der vorkommenden Grössen. Denn es ist:

$$[T^{-1}][c] = \left[ \frac{1}{w} \right], \quad \text{oder: } [c] = \left[ \frac{T}{w} \right].$$

Da aber  $[w]$  im electrostatischen System  $= [T/L]$ , so ist, wie es sein muss:

$$[c] = [L].$$

3. Verschiedene Fälle, in denen der Brückenstrom verschwinden kann.

Es seien in den Zweigen 1 und 2 Condensatoren, in 3 und 4 Inductionsrollen. Daher ist zu setzen:

$$\begin{aligned} a_1 &= w_1, & a_2 &= w_2, \\ a_3 &= w_3 + i\beta p_3, & a_4 &= w_4 + i\beta p_4, \\ b_1 &= 1 + i\beta c_1 w_1, & b_2 &= 1 + i\beta c_2 w_2, \\ b_3 &= b_4 = 1. \end{aligned}$$

So lange es sich nur um die Frage nach dem Verschwinden des Brückenstroms handelt, genügt es, den Zähler von  $k$  allein zu betrachten. Derselbe gibt beim Einsetzen der angegebenen Werthe:

$$\begin{aligned} & w_1 w_3 - w_2 w_4 + \beta^2 w_1 w_2 \{ p_4 c_2 - p_3 c_1 \} \\ & + i\beta \{ w_1 p_3 - w_2 p_4 + w_1 w_2 (w_3 c_2 - w_4 c_1) \}. \end{aligned}$$

Soll dieser Ausdruck für jede beliebige Schwingungsdauer verschwinden, so muss derselbe unabhängig von  $\beta$  Null wer-

den. Hierzu sind im allgemeinen drei Bedingungsgleichungen zu erfüllen. Es wird genügen, einige bemerkenswerthe einfache Fälle anzuführen.

a)  $c_1 = c_2 = 0$ .

Dann bleiben zwei Bedingungen:

$$(16) \quad \frac{p_1}{p_3} = \frac{w_1}{w_3} = \frac{w_4}{w_3}.$$

Diese Gleichungen hat vor kurzem Wietlisbach<sup>1)</sup> gefunden.

b)  $c_2 = p_4 = 0$ .

Ebenfalls zwei Bedingungsgleichungen:

$$(17) \quad p_3 = w_2 w_4 c_1 = w_1 w_3 c_1.$$

Diesen Fall hat Maxwell<sup>2)</sup> schon erörtert.

c)  $p_3 = p_4 = 0$ .

Zwei Bedingungsgleichungen:

$$(18) \quad c_2 w_3 = c_1 w_4, \quad w_1 w_3 = w_2 w_4.$$

Die erste von diesen Gleichungen bildet die Grundlage einer bekannten Methode, die Capacitäten von Condensatoren zu vergleichen. In den drei besprochenen einfachen Fällen sind stets zwei Bedingungen zu erfüllen. Dies erschwert offenbar sehr ihre experimentelle Anwendung, während bei Herstellung der Phasendifferenz  $\frac{1}{2}\pi$  stets nur einer Bedingung genügt zu werden braucht. Es mag daher noch für den letzten Fall diese Bedingung gesucht werden.

4. Das System enthält zwei Condensatoren.

Man findet dann:

$$\begin{aligned} A &= w_1 w_3 - w_2 w_4, & B &= w_1 w_3 (c_2 w_3 - w_4 c_1), \\ C &= (w_1 + w_2 + w') \{ w_1 + w_2 + w' (1 - \beta^2 w_1 w_2 c_1 c_2) \}, \\ D &= (w_1 + w_2 + w') \{ w_1 w_3 (c_1 + c_2) + w' (c_1 w_2 + w_1 c_2) \}. \end{aligned} \quad \} ?$$

Hieraus ist die Bedingungsgleichung:

$$AC + \beta^2 \cdot BD = 0,$$

zu bilden.

In derselben mögen  $w_1$  und  $w_2$  die Widerstände der isolirenden Mittel bedeuten, welche in der zweiten, dritten und vierten Potenz vorkommen. Vernachlässigt man die Glieder der niedrigsten Ordnung, so kann man die Gleichung schreiben:

1) Wietlisbach, Monatsber. der Berl. Ak. 1879. p. 280—283.

2) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism 2. p. 377—379. Oxford 1873.

$$\begin{aligned} C &= (w_3 + w_4 + w) \{ (w_1 + w_2) + w' (1 - \beta^2 w_1 w_2 c_1 c_2) \} \\ D &= (w_3 + w_4 + w) \{ w_1 w_2 (c_1 + c_2) + w' (c_2 w_2 + c_1 w_1) \} \end{aligned}$$

$$\omega_4 c_1 \left\{ 1 + w' \frac{c_2}{w_2(c_1 + c_2)} \right\} = \omega_3 c_2 \left\{ 1 + w' \frac{c_1}{w_1(c_1 + c_2)} \right\}$$

$$(19) \quad \omega_3 c_2 = \omega_4 c_1 \left\{ 1 + \frac{w'}{c_1 + c_2} \left( \frac{c_1}{w_2} - \frac{c_2}{w_1} \right) \right\}$$

828

A. Oberbeck.

$$w_4 c_1 \left\{ 1 + w' \left( \frac{2c_2}{(c_1 + c_2) w_1} + \frac{c_1}{(c_1 + c_2) w_2} \right) \right\}$$

$$= w_3 c_2 \left\{ 1 + w' \left( \frac{2c_1}{(c_1 + c_2) w_2} + \frac{c_2}{(c_1 + c_2) w_1} \right) \right\}.$$

Berücksichtigt man, dass die zweiten Glieder in den Klammern klein sind im Vergleich zu 1, so erhält man;

$$(19) \quad w_4 c_1 \left\{ 1 + \frac{w'}{c_1 + c_2} \left( \frac{c_2}{w_1} - \frac{c_1}{w_2} \right) \right\} = w_3 c_2,$$

oder in erster Annäherung, wenn  $w_1 = w_2 = \infty$  gesetzt werden dürfen:

$$w_4 c_1 = w_3 c_2.$$

Bei Condensatoren mit sehr grossem Widerstand des isolirenden Mediums fallen die Bedingungen für das Nullwerden des Brückenstroms und für die Phasendifferenz  $\frac{1}{2}\pi$  in eine Gleichung zusammen, welche sich noch dadurch auszeichnet, dass in ihr die Schwingungsdauer der Wechselströme nicht vorkommt.

## II. Versuche über die Verbreitung electricischer Schwingungen in einem verzweigten Leitersystem.

Die im ersten Abschnitt mitgetheilten theoretischen Untersuchungen ergaben eine Anzahl von Beziehungen zwischen Widerständen, Inductionspotentialen und Condensatorcapacitäten, von denen die wichtigsten durch Versuche zu prüfen waren. Es handelte sich also darum, electricische Sinusschwingungen zu erzeugen, diese durch die Wheatstone'sche Drahtcombination zu leiten, wobei die bewegliche Rolle im Brückendraht sich befinden muss, und dann durch Veränderung eines passend gewählten Seitenwiderstandes es dahin zu bringen, dass die Rolle keine Ablenkung erfährt.

In der Einleitung habe ich darauf hingewiesen, dass man electricische Sinusschwingungen entweder durch einen Magnetinductor oder durch Verbindung eines gewöhnlichen Inductionsapparats mit Condensatoren hervorbringen kann. Da mir bei Beginn dieser Untersuchungen ein passender Magnetinductor nicht zu Gebote stand, so habe ich zunächst ausschliesslich die zweite Methode angewandt.

Zu dem Zweck wurde ein Inductionsapparat durch eine



schwache Kette getrieben, welche gerade noch hinreichte, denselben in Bewegung zu erhalten. Von dem einen Ende der secundären Rolle führte ein Draht zu der äusseren Belegung eines Condensators. Von dem anderen Ende ging die Leitung zunächst zu den festen Rollen des Electrodynamometers und dann zum Punkt *B* (Fig. 2) der Brückencombination, während Punkt *D* derselben mit der inneren Belegung des in der Figur nicht gezeichneten Condensators verbunden war. Der Inductionsapparat wurde dann in Gang gesetzt, sodass die Sinusschwingungen aller schnell aufeinander folgenden Inductionsstösse benutzt werden konnten. Selbstverständlich hatte ich mich zuvor über die directe Einwirkung derselben auf das Electrodynamometer orientirt. Wie zu erwarten war; ist dieselbe ganz erheblich kleiner, als wenn die Inductionströme in einem ununterbrochenen, metallischen Kreise circuliren. Sie hängt von der Capacität des eingeschalteten Condensators ab und ist derselben ungefähr proportional. Bei den schwächsten Condensatoren betrug dieselbe indess bei directer Einwirkung immer noch mehrere Hundert Scalentheile.

Die Condensatoren waren Reagenzgläschen, welche aussen mit Stanniol beklebt und mit Quecksilber gefüllt waren. Es wurden sechs solcher Gläschen benutzt. Je zwei derselben waren stets mit einander verbunden, sodass ich im ganzen drei verschiedene Condensatoren verwandte, deren Capacitäten mit  $C_I$ ,  $C_{II}$ ,  $C_{III}$  bezeichnet werden sollen.

Die Schwingungsdauer der Wechselströme wird mit grosser Annäherung durch die Formel gegeben:

$$(20) \quad T = \pi \sqrt{P \cdot C}.$$

In derselben bedeutet  $P$  das Potential der Inductionsrolle auf sich selbst und  $C$  die Summe der Capacitäten aller mit der Inductionsrolle verbundenen Condensatoren. Hierbei ist auch darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Inductionsrolle selbst einen Condensator repräsentirt. Diese Schwingungsdauer wird, wie ich bei einer früheren Gelegenheit<sup>1)</sup> gefunden habe, nicht wesentlich verändert, wenn die Widerstände

1) Oberbeck, Wied. Ann. 6. p. 216 u. 236—237. 1879.

des Schliessungskreises sehr erhebliche Veränderungen erfahren. Dagegen ist anzunehmen, dass weitere Condensatoren in dem verzweigten Kreise von Einfluss auf dieselbe sind.

Die Amplituden dieser Schwingungen nehmen schnell ab, sodass für jeden Inductionsstoss die Stromstärke sich nach der Formel ändert:

$$J_0 = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos \frac{\pi t}{T}.$$

Die Grösse  $\alpha$  hängt in complicirter Weise von der Beschaffenheit des Stromkreises ab. Der Einfluss dieser Abnahme der Schwingungen wird am besten in jedem besonderen Fall erörtert.

Bei den früher entwickelten Formeln war stets die Voraussetzung gemacht, dass einzelne Leiterzweige der Brückencombination aus Drähten ohne erhebliche Selbstinduction bestehen. Doch war zu übersehen, dass dieselben einen grossen Widerstand haben mussten. Ich hatte hierzu anfänglich bifilar gewickelte Rollen von feinem Kupferdraht benutzt. Diese aus mehreren tausend Windungen bestehenden Rollen erwiesen sich aber später als schwache Condensatoren. Eine hier nicht weiter auszuführende Betrachtung zeigt nämlich, dass eine Rolle in einem Seitenzweige einer Brückencombination bei Wechselströmen so wirkt, als ob der Widerstand grösser wäre, als es in Wirklichkeit der Fall ist, wenn in ihr Extrastrome auftreten, kleiner, wenn sie als Condensator wirkt. Diese Erscheinungen treten um so mehr hervor, je kleiner die Schwingungsdauer der Wechselströme ist. Bei den Kupferdrahtrollen fiel der „scheinbare“ Widerstand etwas zu klein aus, wenn man bei der Bestimmung Wechselströme benutzte. Ich habe dieselben daher durch Rollen von feinem Neusilberdraht ersetzt. Um gleiche Widerstandswerthe zu erreichen, war dann nur eine viel kleinere Anzahl von Windungen erforderlich. Dieselben waren ausserdem — selbstverständlich auch bifilar — auf längere Holzcyliner gewickelt, sodass nur wenige Windungslagen einander bedeckten. Ich habe drei solcher Rollen benutzt, deren Widerstände anfänglich zu:

1024,6 S.-S., 797,7 S.-E. und 559,2 S.-E.

bestimmt waren. Hierbei waren constante Ströme benutzt worden. Es fand sich später mehrfach Gelegenheit, diese Widerstände auch bei Benutzung von Wechselströmen zu bestimmen. Die Abweichungen waren stets kleiner als 1 Proc. und würden schon durch Aenderungen der Zimmertemperatur ihre Erklärung finden. Der noch in den verschiedenen Formeln vorkommende Widerstand ( $w$ ) der beweglichen Electrodynamometerrolle betrug mit der Zuleitung: 142,7 S.-E. Ich gehe nun zur Besprechung der einzelnen Versuche über.

1. Versuche über das Inductionspotential einer Drahtrolle. — Die Rolle bestand aus 8000 Windungen feinen Kupferdrahts und gehörte zu einem Spiegelgalvanometer. Ihr Widerstand ( $w_1$ ) betrug: 2432 S.-E. Dieselbe bildete den Zweig 1 der Brückencombination. Zweig 2 bestand aus einem Siemens'schen Widerstandskasten, während die Zweige 3 und 4 aus den Neusilberdrahtrollen in verschiedenen Combinationen gebildet wurden.

Die Versuche wurden dann in der Weise ausgeführt, dass der Inductionsapparat in Gang gesetzt, und der Widerstand in dem Kasten solange verändert wurde, bis die bewegliche Rolle in Ruhe blieb. Hierbei mag noch bemerkt werden, dass bei nicht ganz genau senkrechter Stellung der festen und beweglichen Rolle in letzterer Inductionsströme erregt werden, welche selbstverständlich eine Störung verursachen. Der Einfluss derselben ist leicht zu erkennen, wenn man die Zuleitung zur beweglichen Rolle mit einem Commutator versieht. Beim Umlegen derselben muss bei richtiger Einstellung die bewegliche Rolle in Ruhe bleiben. Kleinere Differenzen, welche sehr schwer zu vermeiden waren, wurden dadurch eliminirt, dass der Widerstand des Kastens stets für beide Stellungen des Commutators bestimmt, und aus den gefundenen Widerständen das Mittel genommen wurde.

Die zu untersuchende Formel (13) lautete:

$$\beta^2 p_1^2 = \left( w_2 \frac{w_4}{w_3} - w_1 \right) (w_1 + w_2 + w'),$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(21) \quad g = \left( w_2 \frac{w_4}{w_3} - w_1 \right), \quad h = w_1 + w_2 + w'$$

$$\beta^2 p_1^2 = gh.$$

Nimmt man Rücksicht auf die Abnahme der Amplituden, so ist bei den Berechnungen aus Formel (9) statt:  $\lambda = i\beta$ , zu setzen:  $\lambda = -\alpha + i\beta$ . Man erhält dann:

$$(\alpha^2 + \beta^2) p_1^2 = gh + \alpha p_1 (h - g).$$

Da indess  $\alpha$  jedenfalls klein ist im Vergleich zu  $\beta$ , so kann man auch schreiben:

$$(22) \quad \beta^2 p_1^2 = gh + \alpha p_1 (h - g).$$

Aus demselben Grunde muss das Product  $gh$  nahezu constant sein, welche Combination von Widerständen man auch in den Zweigen drei und vier hat.

Ferner zeigt die Formel, dass dieses Product um so grösser sein muss, je grösser  $\beta$  oder  $p_1$  ist. Ich habe mit Benutzung derselben Rolle die Grösse  $\beta = \pi/T$  dadurch verändert, dass ich das Inductorium mit verschiedenen Combinationen von Condensatoren verband.

Die Resultate der Versuche sind in der folgenden Tabelle I zusammengestellt, in welcher die vorkommenden Grössen die durch die Gleichungen (21) festgestellte Bedeutung haben.

Tabelle I.

1. Condensator:  $C_I + C_{II} + C_{III}$ .

$w_4/w_3$	$w_2$	$g$	$h$	$g \cdot h \cdot 10^{-4}$	$h - g$
1,426	5502	5417	8063	4368	+ 2646
1,832	4562	5927	7125	4223	+ 1198
1,985	4299	6104	6866	4191	+ 762
3,259	2971	7250	5538	4015	- 1712

2. Condensator:  $C_I + C_{II}$ .

1,426	6760	7211	9321	6721	+ 2110
1,832	5775	8149	8338	6794	+ 189
1,985	5450	8389	8017	6725	- 372

3. Condensator:  $C_I$ .

1,426	8035	9030	10596	9566	+ 1566
1,832	6860	10137	9423	9552	- 714
1,985	6460	10394	9027	9382	- 1367

Aus der Tabelle geht hervor, dass die Producte  $gh$  in jeder einzelnen Reihe annähernd übereinstimmen. Doch sind die Abweichungen zu gross, um aus Beobachtungsfehlern er-

klärt werden zu können. Auch zeigen dieselben, wenigstens in den Reihen 1 und 3, eine gewisse Regelmässigkeit, welcher eine gleichzeitige Abnahme von  $h - g$  entspricht. Nach der Formel (22) wäre das umgekehrte Verhalten zu erwarten gewesen. Diese Abweichung erklärt sich daraus, dass die Rolle gleichzeitig als Condensator gewirkt hat. Die im ersten Theil entwickelte Theorie ist so angelegt, dass man diesen Umstand leicht berücksichtigen kann. Mit Uebergang der Einzelheiten der Rechnung will ich nur bemerken, dass man zu der folgenden Formel gelangt, welche die Bedingung ausdrückt, dass die Phasendifferenz des Brückenstromes  $\pi/2$  beträgt:

$$(23) \quad \beta^2 Q = gh + R(h - g).$$

In derselben sind  $Q$  und  $R$  Functionen von  $p_1$ ,  $w_1$  und  $c_1$  der Capacität der Rolle. Die Grösse  $R$  kann negativ sein, wie es den Reihen 1 und 3 entspricht.

Die wahrscheinlichsten Werthe für  $\beta^2 Q$  erhält man, wenn man aus den Beobachtungen diejenigen auswählt, für welche  $h - g$  klein ist, resp. sein Vorzeichen wechselt. Dadurch erhält man:

$$1) \beta_1^2 Q = 4137 \cdot 10^4, \quad 2) \beta_2^2 Q = 6772 \cdot 10^4, \quad 3) \beta_3^2 Q = 9557 \cdot 10^4.$$

Diese Resultate gestatten noch eine weitere Prüfung.

Da  $\beta = \pi/T$ , so ist nach Gl. (20):

$$\beta^2 = \frac{1}{P \cdot C},$$

wo  $C$  die Summe der Capacitäten derjenigen Condensatoren bedeutet, welche mit dem Inductorium verbunden sind. Dieselben bestehen aber aus den in der Tabelle angegebenen Condensatoren und dem Condensator, den die Windungen der Rolle selbst bilden.

Nach einer später zu besprechenden Methode waren die Condensatoren unter sich verglichen, und es hatte sich ergeben:

$$C_{II} = 0,644 C_I, \quad C_{III} = 1,401 C_I.$$

Bezeichnet man die Capacität der Inductionsrolle mit  $x \cdot C_I$ , so waren die bei den drei Reihen benutzten Condensatoren:

$$1) (3,045 + x) C_I, \quad 2) (1,644 + x) C_I, \quad 3) (1 + x) C_I.$$

Man erhält daher zur Berechnung von  $x$  die Beziehung:  
 $4137 (3,045 + x) = 6772 (1,644 + x) = 9557 (1 + x)$ .

Hieraus ergeben sich die recht gut übereinstimmenden Werthe:

$$x = 0,5556, \quad 0,5672, \quad 0,5609.$$

Die Capacität der Inductionsrolle ist daher eine ziemlich bedeutende.

2. Versuche mit einem Condensator in dem Brückensystem. — Entprechend den Voraussetzungen der Formel (14) wurden die beiden Belegungen des zu untersuchenden Condensators mit  $A$  und  $B$  (s. Fig. 2) verbunden. Eine besondere Zweigleitung zwischen denselben bestand nicht weiter, sodass  $w_1$  den Widerstand des isolirenden Mittels ausdrückt. Im übrigen war die Anordnung und Ausführung der Versuche genau dieselbe wie in dem Fall 1.

Für die anzustellenden Versuche hatte es sich als vorthellhaft erwiesen, einen Condensator von möglichst grosser Capacität zu benutzen. Ich stellte einen solchen in bekannter Weise aus zehn Paraffinblättern her, welche durch Stanniolblätter getrennt waren. Die Blätter wurden fest gegeneinander gepresst und blieben unverändert in dieser Lage. Dieser Condensator erwies sich bei mehrfacher Wiederholung der einzelnen Versuche als ziemlich veränderlich. Die in dem Widerstandskasten einzuschaltenden Widerstände nahmen meist langsam ab, woraus auf eine Vergrösserung der Capacität zu schliessen war. Auch machte es einen kleinen Unterschied, ob das Inductorium längere Zeit in Thätigkeit gewesen war oder nach längerer Pause wieder in Gang gesetzt wurde. Nach dem ganzen Verlauf dieser Erscheinungen kam ich zu der Ueberzeugung, dass ein solcher Paraffinpapiercondensator sehr empfindlich gegen Temperaturänderungen ist, und dass seine Capacität mit steigender Temperatur so schnell zunimmt, dass schon die Veränderungen der Zimmertemperatur sich deutlich bemerkbar machen. Da ferner die schnell wechselnde Electricisirung der Belegungen eine Erwärmung des dielectricischen Mediums hervorbringt, so wird während des Versuchs die Capacität etwas gesteigert.

Ueber  
habe i  
Abs  
andau  
reihen  
holter  
nisse  
geste  
drei  
bei j  
Zur  
setzt  
(22)

nah  
+

ode

W  
si

Ueber die Veränderlichkeit derselben mit der Temperatur habe ich noch weitere Versuche angestellt, die ich im letzten Abschnitt mittheile. Schliesslich gelang es bei gleichmässig andauernder Thätigkeit des Inductoriums, einige Versuchsreihen auszuführen, bei denen die einzelnen mehrfach wiederholten Versuche miteinander übereinstimmten. Die Ergebnisse derselben sind in der folgenden Tabelle II zusammengestellt. Auch hier war das Inductorium nacheinander mit drei verschiedenen Condensatoren verbunden; ebenso wurden bei jeder Reihe verschiedene Verhältnisse von  $w_4/w_3$  benutzt. Zur Abkürzung mag in der zu prüfenden Formel (15) gesetzt werden:

$$(22) \quad g' = \frac{w_3}{w_4 w_2}, \quad h' = \frac{1}{w_2 + w'}.$$

Dann lautet dieselbe:

$$\beta^2 c_1^2 = g' h' - \frac{1}{w_1} (h' - g').$$

Nimmt man auch hier wieder Rücksicht auf die Abnahme der Amplituden, so erhält man: indem man  $\lambda = -\alpha + i\beta$  setzt:

$$(\alpha^2 + \beta^2) c_1^2 = g' h' + \left( \alpha c_1 - \frac{1}{w_1} \right) (h' - g')$$

oder einfacher:

$$\beta^2 c_1^2 = g' h' + \left( \alpha c_1 - \frac{1}{w_1} \right) (h' - g').$$

Die Tabelle ist ebenso wie Tab. I angeordnet. Die Widerstände  $w_3$  sind die direct beobachteten;  $g'$  und  $h'$  sind dann nach Gl. (22) berechnet.

Tabelle II.

1. Condensator:  $C_I + C_{II} + C_{III}$ .

$w_4/w_3$	$w_2$	$g' \cdot 10^7$	$h' \cdot 10^7$	$g' h' \cdot 10^{11}$	$(h' - g') 10^7$
1,284	3256	2391	2952	7058	+ 561
1,426	3019	2329	3186	7420	+ 857
1,822	2562	2130	3713	7910	+ 1583

2. Condensator:  $C_{III}$ .

1,284	2752	2829	3467	9809	+ 638
1,426	2575	2722	3698	10068	+ 976
1,832	2187	2496	4314	10766	+ 1818

3. Condensator:  $C_I$ .

$w_4/w_3$	$w_2$	$g' \cdot 10^7$	$h' \cdot 10^7$	$g' h' \cdot 10^{11}$	$(h' - g') \cdot 10^7$
1,284	2580	3018	3687	11127	+ 669
1,426	2380	2945	3986	11798	+ 1041
1,832	2032	2686	4623	12418	+ 1937

Auch in dieser Tabelle erweisen sich die Producte  $g'h'$  als nicht constant, sondern wachsen gleichzeitig mit den Differenzen  $h' - g'$ . Setzt man in Gl. (23):

$$\beta^2 \alpha^2 \cdot 10^{11} = z, \quad \left( \alpha c_1 - \frac{1}{w_1} \right) 10^4 = y,$$

so kann man aus je zwei Beobachtungen  $y$  bestimmen und dann die rechte Seite für alle drei Beobachtungen ausrechnen. Ich habe zur Bestimmung von  $y$  in jeder Reihe die erste und letzte Beobachtung benutzt. Es ergab sich:

für Reihe 1:

$$y = -0,833, \quad z = 6591, \quad 6706, \quad 6591, \quad \text{im Mittel: } \beta^2 c_1^2 = 6629 \cdot 10^{-11}.$$

für Reihe 2:

$$y = -0,811, \quad z = 9292, \quad 9276, \quad 9292, \quad \text{im Mittel: } \beta^2 c_1^2 = 9287 \cdot 10^{-11}.$$

für Reihe 3:

$$y = -1,018, \quad z = 10447, \quad 10738, \quad 10446, \quad \text{im Mittel: } \beta^2 c_1^2 = 10544 \cdot 10^{-11}.$$

Versucht man, aus den drei erhaltenen Zahlen in ähnlicher Weise wie bei der Inductionsrolle den Condensatorwerth der Inductionsspirale zu bestimmen, so gelangt man zu viel grösseren und nicht miteinander übereinstimmenden Resultaten. Hieraus ist zu schliessen, dass der in der Brückenverzweigung vorhandene Paraffincondensator von bedeutender Capacität einen erheblichen Einfluss auf die Schwingungszahl der Wechselströme ausgeübt hat.

Will man daher nach der besprochenen Methode Condensatorcapacitäten wirklich messen, so muss man eine periodische Stromquelle anwenden, deren Schwingungszahl unabhängig von dem in dem verzweigten System befindlichen Condensatoren ist.

3. Vergleichung zweier Condensatorcapacitäten. Wenn die Zweige 1 und 2 der Brückencombination durch Condensatoren mit den Capacitäten  $c_1$  und  $c_2$  gebildet wer-



den, deren innere Widerstände  $w_1$  und  $w_2$  als unendlich gross angesehen werden können, so fallen die Bedingungen der Stromlosigkeit des Brückendrahts und der Phasendifferenz  $\pi/2$  in die eine Gleichung:

$$c_1 w_4 = c_2 w_3$$

zusammen. Demnach erfordert die Vergleichung der Capacitäten nur Widerstandsmessungen der einfachsten Art.

Diese Methode ist an sich nicht neu; doch ist meines Wissens bisher weder das Inductorium als Stromquelle noch das Electrodynamometer als Messinstrument benutzt worden. Die Versuchsanordnung gestaltet sich hiernach folgendermassen. Der eine Pol der secundären Rolle des Inductoriums wird mit den beiden äusseren Belegungen der zu vergleichenden Condensatoren verbunden. Von dem anderen Pol geht die Leitung

(vgl. Fig. 3) durch die feste Rolle  $R_1$  zu dem Verzweigungspunkt  $D$  und von dort durch die Leitungen  $DA$  und  $DC$  zu den inneren Belegungen, welche ausser-

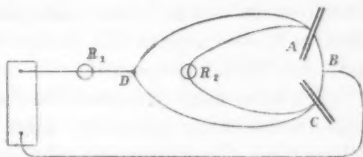


Fig. 3.

dem noch durch eine Zweigleitung verbunden sind, welche die bewegliche Rolle  $R_2$  enthält. Sind die Widerstände ( $DA = w_4$ ,  $DC = w_3$ ) so abgeglichen, dass die oben angeführte Gleichung erfüllt wird, so darf die bewegliche Rolle keine Ablenkung erfahren. Da in diesem Fall die Potentiale in  $A$  und  $C$  gleiche Werthe haben, so löst sich wiederum jeder Inductionsstoss in sehr kurze Sinusschwingungen auf. Hierdurch ist wohl die Möglichkeit einer Rückstandsbildung ganz ausgeschlossen. Der Einfluss einer inneren Leitung der isolirenden Mittel verhindert nicht die Anwendung der Methode. Auch dann darf die bewegliche Rolle keine Ablenkung erfahren, und Gl. (19) gibt die Möglichkeit, diesen Einfluss zu controliren.

Ich habe gefunden, dass die auseinandergesetzte Methode sehr brauchbar ist. Nur muss man ein nicht zu kleines

Inductorium verwenden, da sonst die Schwingungen zu kurz werden.

Selbstverständlich müssen die eingeschalteten Widerstände möglichst frei von Selbstinduction sein und dürfen selbst nicht als Condensatoren wirken. Ich habe stets den einen Zweig aus einer der oben beschriebenen Neusilberdrahtrollen gebildet. Ihr Widerstand betrug anfänglich 559,2 S.-E. Nach längerer Zeit (und bei höherer Zimmertemperatur) wurde derselbe abermals mit constantem Strom gemessen und betrug 562,3 S.-E. Der andere Zweig wurde durch den Widerstandskasten gebildet und in demselben der Widerstand so lange verändert, bis kein Ausschlag des Electrodynamometers mehr beobachtet wurde. Auch hier ist es unerlässlich, die Zweigleitung zur beweglichen Rolle mit einem Commutator zu versehen und bei beiden Stellungen desselben zu beobachten. Aus den selbstverständlich nur kleinen Abweichungen der beiden Widerstandswerthe wurde stets das Mittel genommen.

Ich habe dann jedesmal die Zweige vertauscht und eine neue Beobachtung gemacht. Hierdurch lässt sich noch der Widerstand der Drahtrolle eliminiren und berechnen, wodurch man eine recht willkommene Controle der Genauigkeit der Messung erhält. Bezeichnet man den Widerstand der Drahtrolle mit  $a$ , die beiden in dem Widerstandskasten beobachteten Widerstände mit  $x$  und  $x'$ , so gelten die Gleichungen:

$$xc_1 = ac_2, \quad x'c_2 = ac_1.$$

Also:

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{x'}{x}}, \quad a = \sqrt{x' \cdot x}.$$

Nach dieser Methode habe ich zunächst die oben besprochenen Quecksilbercondensatoren verglichen. In der folgenden Tabelle sind die hierbei erhaltenen Werthe zusammengestellt, wobei jedesmal unter der Bezeichnung des Condensators der in dem zugehörigen Zweige enthaltene Widerstand steht. Unter  $a$  sind die hieraus berechneten Widerstandswerthe der Rolle angegeben, in der letzten Columne stehen die berechneten Verhältnisse der Capacitäten.

Tabelle III.

1.	$C_I$ $a$	$C_{II}$ 870	$C_I$ 361	$C_{II}$ $a$	$a$ ber. 560,4	$C_{II}/C_I$ 0,6441
2.	$C_I$ $a$	$C_{III}$ 400,5	$C_I$ 786	$C_{III}$ $a$	$a$ ber. 561,1	$C_{III}/C_I$ 1,401
3.	$C_{II}$ $a$	$C_{III}$ 258	$C_{II}$ 1215	$C_{III}$ $a$	$a$ ber. 559,9	$C_{III}/C_{II}$ 2,170
4.	$C_I + C_{II}$ $a$	$C_{III}$ 650	$C_I + C_{II}$ 486,7	$C_{III}$ $a$	$a$ ber. 562,5	$C_I + C_{II}/C_{III}$ 1,156

Aus Reihe 1 und 2 kann man  $C_{III}/C_{II}$  und  $C_I + C_{II}/C_{III}$  berechnen. Man erhält: 2,175 und 1,170.

Derartige Versuche habe ich noch vielfach angestellt. Ich will indess nur noch auf eine früher angeregte Frage eingehen. Bei der Benutzung eines Paraffinpapiercondensators war es mir wahrscheinlich geworden, dass die Capacität desselben schnell mit der Temperatur zunimmt. Um dies genauer festzustellen, wurde um das cylindrische Gefäß eines empfindlichen Thermometers ein kleiner Condensator gelegt, bestehend aus zwei Stanniol- und zwei Paraffinpapierblättern, und diese zusammen in ein kleines Reagenzglas gesteckt, sodass die Blätter fest zusammengepresst wurden. Mit den beiden Stanniolblättern waren Drähte verbunden. Das Reagenzglas wurde in Wasser getaucht, dessen Temperatur verändert werden konnte. Es ist anzunehmen, dass der Condensator dieselbe Temperatur hatte, wie das in demselben steckende Thermometer. Die Capacität wurde dann bei verschiedenen Temperaturen nach der oben besprochenen Methode mit einem Quecksilbercondensator, dessen Capacität ich kurz durch  $C$  bezeichnen will, verglichen. Die Neusilberdrahtrolle und der Widerstandskasten wurden bald mit dem einen, bald mit dem anderen Condensator verbunden. Der Widerstand der Rolle ist hier in runder Summe zu 560 S.-E. angenommen.

Zunächst wurden einige Bestimmungen bei gewöhnlicher Zimmertemperatur gemacht; darauf wurde das Wasser bis etwa auf 40° erwärmt und dann während der langsamen

Abkühlung desselben weitere Beobachtungen angestellt. Dieselben sind in der folgenden Tabelle enthalten, und zwar gibt die erste Columnne die Temperatur des Paraffinpapiercondensators, während unter *P* und *C* diejenigen Widerstände angegeben sind, welche sich in den Zweigen des Paraffin- und des Quecksilbercondensators befanden.

Tabelle IV.

$t^{\circ}$	<i>P</i>	<i>C</i>	<i>P/C</i>		$t^{\circ}$	<i>P</i>	<i>C</i>	<i>P/C</i>	
15,6	560	402,5	0,7187	—	32,5	327,5	560	1,710	—
15,8	777,5	560	0,7219	—	25,8	560	634,5	1,133	} 1,122
16,0	560	409	0,7303	—	25,7	503,5	560	1,112	
37,2	560	1440	2,590	—	25,2	516,5	560	1,084	} 1,089
36,6	232	560	2,396	—	25,2	560	612,5	1,094	
35,6	560	1275	2,277	—	15,8	762,5	560	0,7378	—
33,4	307,5	560	1,821	} 1,826	15,2	772,5	560	0,7249	—
33,1	560	1025	1,830						

Die letzte Columnne gibt übersichtlich die Aenderungen der Capacität mit der Temperatur. Infolge der Erwärmung von 15 auf 37° steigt dieselbe auf mehr als das Dreifache, nimmt regelmässig bei der Abkühlung ab und erlangt nach derselben bei 15° einen Werth, der nur sehr wenig den Anfangswerth übertrifft.

Eine ganz ähnlich verlaufende Reihe erhielt ich, als ich das Paraffinpapier durch Schreibpapier ersetzte, welches mit Oel getränkt war.

Diese Ergebnisse sind, wie ich glaube, nicht ohne Interesse, da oft bei experimentellen Untersuchungen solche Papiercondensatoren verwandt werden. Andererseits darf aus den angestellten Versuchen noch nicht geschlossen werden, dass die dielectricischen Constanten des Paraffins und Oels sich so erheblich mit steigender Temperatur verändern. Vielmehr ist zu berücksichtigen, dass man es hierbei mit einer sehr complicirten Erscheinung zu thun hat, indem das Papier selbst als ein mässig guter Leiter angesehen werden kann, welcher nur durch die isolirenden Schichten des Paraffins an der Berührung mit den Belegungen verhindert wird. Einen Einfluss der Leitungsfähigkeit des Isolators, welcher nach Gleichung (19) zu erkennen sein müsste, wenn man den

Widerstand der Brückenleitung ( $w'$ ) vergrößert, habe ich nicht constatiren können.

Die mitgetheilten Versuche können als Bestätigung der im ersten Abschnitt entwickelten Formeln gelten. Sie zeigen gleichzeitig, dass die angewandte Methode bei verschiedenartigen electrischen Messungen benutzt werden kann. Kann man die Schwingungszahl der Wechselströme genau bestimmen, so erhält man die Potentiale von Rollen auf sich selbst und die Condensatorcapacitäten in absoluten Maassen, sobald man die Widerstandseinheit in denselben ausdrückt.

Da es sich bei dieser Methode stets darum handelt, die sichtbare Wirkung der beiden Wechselströme an dem Electrodynamometer — die Ablenkung der beweglichen Rolle — auf Null zu bringen, da ferner der Ausdruck, welcher die Grösse dieser Wirkung angibt  $\frac{1}{2} AA' \cos \epsilon$  von den Amplituden der Einzelschwingungen und ihren Phasendifferenzen abhängt, also dieselben Bestimmungsstücke enthält, welche bei der Interferenz zweier Lichtstrahlen in Betracht kommen, so möchte ich zum Schluss für diese Gruppe von Erscheinungen die Bezeichnung: „electrodynamische Interferenz der Wechselströme“ vorschlagen.

Halle a. S., August 1882.

#### IV. *Experimentaluntersuchungen über die galvanische Polarisation; von Franz Streintz.*

(Aus dem 86. Bde. der Sitzungsber. d. Acad. d. Wiss. zu Wien. II. Abth. vom 6. Juli 1882; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Hiersu Taf. VI Fig. 1.)

##### I. Abhandlung.

In einer im verflossenen Jahre veröffentlichten Arbeit<sup>1)</sup> habe ich die durch Entladung von Leydener Flaschen hervorgerufene Wasserzersetzung electrometrischen Messungen unterzogen und wurde dabei zur Prüfung einer Vorstellung, welche

1) F. Streintz, Wien. Ber. 83. p. 618. 1881. Wied. Ann. 13. p. 644. 1881.

ich mir über die Natur dieser Erscheinung gebildet hatte, auf die Untersuchung eines speciellen Falles der galvanischen Polarisation geführt. Diese Untersuchung lieferte das Ergebniss, dass die Potentialdifferenz zwischen einer durch einen galvanischen Strom von nur kurzer Dauer mit Wasserstoff bedeckten Platinelectrode und einer gasfreien im Verlaufe der Zeit eine Umkehrung erfahre. Ich habe daraus den Schluss gezogen, das sich Platin, welches Wasserstoff nur in okkludirtem Zustande enthalte, reinem Platin gegenüber electronegativer verhalte.

Den Ausgangspunkt für die vorliegende Untersuchung bildete die Frage, wie sich andere Metalle, wenn sie ähnlichen Bedingungen unterworfen werden, verhalten. Ich wählte dazu einerseits ein Metall, welches H in weitaus grösserer Menge occludirt, wie Platin, das Palladium, andererseits aber traf ich eine Auswahl unter den übrigen Metallen, welche ein Absorptionsvermögen für H, soweit wenigstens bisher bekannt, nicht besitzen.

Dabei dehnte sich die Arbeit auf die Bestimmung von Grösse und Verlauf der sogenannten einseitigen Polarisationen oberhalb der Grenze der sichtbaren Wasserzersetzung aus. Die electromotorische Kraft der einseitigen Polarisationen findet man bekanntlich, wenn man eine der beiden Electroden des Voltameters einer gleichartigen gasfreien Electrode in electrometrischer Verbindung gegenüberstellt.

Bisher beschränkte ich mich darauf, die zwischen einem mit H bedeckten und einem gasfreien Metalle auftretende Polarisation zu bestimmen; sie soll kurzweg Wasserstoffpolarisation genannt und durch die Formel  $M/(M + H)$  bezeichnet werden. Die in Bezug auf die Wasserstoffpolarisation untersuchten Metalle waren vorläufig Palladium, Platin, Gold, Silber und Aluminium.

§ 1. Die Versuche wurden nach der von Fuchs<sup>1)</sup> angegebenen, neuerdings von den Hrn. Beetz<sup>2)</sup> und Fromme<sup>3)</sup>

1) Fuchs, Pogg. Ann. 156. p. 156. 1875.

2) Beetz, Wied. Ann. 10. p. 348. 1880.

3) Fromme, Wied. Ann. 12. p. 399. 1881.

benutzten Methode in nachstehender Weise angeordnet und ausgeführt.

Die Electroden befanden sich gewöhnlich in getrennten durch Glasheber untereinander communicirenden Gefässen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (Fig. 1) und standen in folgender Verbindung: Electrode  $M$  im Gefässe  $A$  mit der drehbaren Säule  $h'$  der bei meinen eingangs erwähnten Entladungsversuchen angewendeten Vorrichtung,  $M_H$  in  $B$  sowohl mit einem Stromunterbrecher  $D$ , welcher zu dem Zinkpole der electrolysirenden Kette führte, als auch mit der Gasleitung des Hauses,  $M_0$  in  $C$  endlich mit dem Kupferpole der Kette.

Die Electroden  $M$  und  $M_H$  wechselten und bestanden aus Drähten, welche aus einem Stücke geschnitten waren und mit den der Schnittstelle zugewendeten Enden in die electrolytische Flüssigkeit tauchten.

Die Electrode  $M_0$  wurde immer durch Platin gebildet.

Die Gefässe  $A$ ,  $B$ ,  $C$  waren mit stark verdünnter Schwefelsäure, im Raumverhältnisse 1:100, gefüllt; vor jeder Versuchsreihe wurde dieselbe zur thunlichsten Befreiung von absorbirten Gasen durch zwanzig Minuten im Kochen erhalten.

Zu den Messungen benutzte ich ein von Edelmann construirtes Electrometer, dessen (Cylinder-) Quadranten paarweise mit der Klemme der festen Säule  $h$ , beziehungsweise mit der Gasleitung verbunden waren, und dessen durch einen Magnet gerichteter Bügel mit einem Pole einer aus 200 Clark-Elementen bestehender Säule (deren anderer Pol zur Gasleitung abgeleitet war) geladen wurde.

Da das Electrometer nur mässige Dämpfung besass, so wurden stets die ersten Ablenkungen beobachtet. Dieselben waren bei einer bestimmten Stellung des Bügels zu den Quadranten nach beiden Seiten gleich gross und den Potentialdifferenzen genau proportional. Die Beobachtungen geschahen mit Fernrohr und Scala, welch' letztere so aufgestellt wurde, dass ihre Mitte nach erfolgter Symmetriestellung des Bügels mit dem Faden des Fernrohres zusammenfiel. Durch vorsichtiges Handhaben der Stellschrauben des Electrometers konnte, falls eine Veränderung der Ruhelage



eingetreten war, auf die ursprüngliche Einstellung zurückgegangen werden.

Ein Daniell-Normalelement gab eine erste Ablenkung von ungefähr 100 Theilstrichen; dieselbe konnte bei Anwendung von Astasirungsmagneten bis auf 400 Theilstriche erhöht werden. Gewöhnlich wurde die geringere Empfindlichkeit angewendet, da die Schwingungsdauer des Instrumentes in diesem Falle nur 3,1 Secunden betrug.

Bei der in Fig. 1 angegebenen Stellung der Säule  $h'$  sind beide Quadrantenpaare mit der Gasleitung verbunden; wurde  $h'$  auf  $h$  niedergelassen, so zeigte das Electrometer die Potentialdifferenz zwischen den Electroden  $M$  und  $M_H$  an. Unterbrecher  $D$  und Säule  $h'$  wurden mit beiden Händen bedient und konnten sowohl gleichzeitig, als auch in beliebiger Aufeinanderfolge umgelegt werden. So war es möglich, die Potentialdifferenzen zwischen  $M$  und  $M_H$  zu ermitteln:

1. vor dem Schliessen der Kette;

2. unmittelbar, d. h. mit Rücksicht auf die Schwingungsdauer des Electrometers, und beliebig nach erfolgtem Schliessen und

3. unmittelbar und beliebig nach erfolgtem Oeffnen des Stromes. Die ersten Werthe geben die schon vorhandenen zufälligen, die zweiten die der Grösse der Wasserstoffpolarisation entsprechenden, die dritten die den Verlauf derselben bestimmenden Potentialdifferenzen an.

§ 2. Bevor ich zur Mittheilung der für die Wasserstoffpolarisation gefundenen Werthe übergehe, will ich einige Bemerkungen über die möglicher Weise störenden Nebeneinflüsse voranschicken.

Diese Nebeneinflüsse können durch die zwischen den Drähten vorhandenen zufälligen Potentialdifferenzen, ferner auch durch Diffusion und Absorption von Gasen im Electrolyten entstehen.

Die Thatsache, dass zwei gleichartige Drähte, wenn sie selbst aus einem Stücke geschnitten sind, sich in angesäuertem Wasser fast nie electrisch indifferent gegeneinander verhalten, veranlasste mich, das übliche Verfahren zur Reinigung derselben zu prüfen. Es ergab sich, dass weder



ein Glühen der Drähte noch ein Auskochen derselben in Säuren den gewünschten Erfolg lieferte. Die Potentialdifferenzen wurden dadurch zuweilen kleiner, zuweilen aber auch grösser, sie traten bald in dem einen, bald in dem anderen Sinne auf.

Wird einer von beiden Drähten allein erwärmt, sei es durch Auskochen in Säuren, sei es durch Glühen in einer Alkoholflamme, im Bunsen'schen Brenner oder im Schliessungskreise des galvanischen Stromes, und nach seiner vollständigen Abkühlung neben den anderen Draht gebracht und mit demselben verglichen, so zeigt er sich regelmässig electronegativ gegen den nicht erwärmten Draht.

Je höher die Temperatur ist, auf welche der eine Draht gebracht wurde, um so energischer ist im allgemeinen sein electrisches Verhalten.

Ich habe diese Beobachtung an Platin und Palladium gemacht.

Die zufälligen Potentialdifferenzen vollständig zu beseitigen, gelang mir nicht. Günstiger Weise sind dieselben aber meist durch lange Zeit constant, sodass man keinen grossen Fehler begehen wird, wenn man die zufälligen Potentialdifferenzen zu den gefundenen Resultaten algebraisch addirt.

Die Gefahr, dass Wasserstoff durch Diffusion aus dem Gefässe *B* in das Gefäss *A* und an die Electrode *M* wandere, suchte ich dadurch zu vermeiden, dass ich für *A* ein weites und tiefes Gefäss wählte und zur Communication zwischen *A* und *B* einen ungefähr 15 cm langen, capillar ausgezogenen Glasheber anwendete.

Um mich endlich zu überzeugen, inwiefern der an der Electrode *M* etwa haftende oder der von der Flüssigkeit in *A* absorbirte Sauerstoff der Luft die Resultate beeinträchtigen könne, stellte ich den folgenden Versuch an:

Die Electrode *M* wurde durch ein Platinblech gebildet, in welches eine grosse Anzahl feiner Löcher nach Art eines Siebes geschlagen war. Auf das Blech gekittet war ein kurzes Glasrohr, welches mit einem Kautschukschlauche verbunden zu dem Gashahne eines Hofmann'schen Volta-

meters führte. Das Glasrohr und ein Stück des Schlauches tauchten in das Gefäß *A*. Das mit dem Schlauche verbundene Rohr des Voltameters war mit Sauerstoff, welcher mehrere Stunden vor dem Versuche electrolytisch abgeschieden wurde, gefüllt.

*M* stand in dauernder Verbindung mit dem Electrometer, während an *M<sub>H</sub>* fortwährend Wasserstoff durch Electrolyse entwickelt wurde.

Zuerst war der Hahn des Voltameters geschlossen; das Electrometer zeigte die Potentialdifferenz zwischen gasfreiem und mit H bedecktem Platin an. Nachdem die Potentialdifferenz einen constanten Werth angenommen hatte, wurde der Gashahn geöffnet und während des mehrere Minuten dauernden Fliessens des O-Stromes durch das Blech das Electrometer beobachtet. Es trat keine Vergrößerung der dauernden Ablenkung ein. Daraus folgt, dass der nicht unmittelbar aus seiner Verbindung in Wasser an der Electrode selbst abgeschiedene O electricisch unwirksam ist. Der Satz ist allerdings nur in Bezug auf Platin nachgewiesen, wird aber wahrscheinlich auch für die übrigen Metalle, sofern sie nicht chemisch verändert werden, gelten.

Hr. Beetz<sup>1)</sup> hat auf den wesentlichen Unterschied zwischen activem und nicht activem O an Platin und auch an Palladium in klarer Weise aufmerksam gemacht. Wenn Hr. Franz Exner<sup>2)</sup> die Beobachtung des Hrn. Beetz trotzdem missversteht, so kann ich mir dies nur durch seine Ansicht über die allgemeine Anwendbarkeit eines bedingungslosen Satzes der Aequivalenz zwischen Verbrennungswärme und electromotorischer Kraft erklären.<sup>3)</sup>

1) Beetz, Wied. Ann. 5. p. 1. 1878.

2) Exner, Wied. Ann. 12. p. 284. 1881.

3) Ich möchte bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam machen wie sich Hr. Exner die von verschiedenen Beobachtern gefundenen, Werthe für die Verbrennungswärmen seiner Aequivalenzhypothese dienstbar zu machen bemüht. In seiner Abhandlung „Ueber die Natur der galvanischen Polarisation“ (Wied. Ann. 6. p. 364. 1879) wird zur Bestimmung der gesamten Wärmeentwicklung bei der Electrolyse von Chlornatrium für die Wärmetönung von Na, O eine Zahl 83944 und unmittelbar darauf

§ 3. Ich gehe nun daran, die Resultate mitzutheilen, welche die Frage nach der Abhängigkeit der electromotorischen Kraft der Wasserstoffpolarisation von der Natur der angewendeten Electrode ergab. Dabei musste die Bedingung erfüllt werden, dass die electromotorische Kraft der electrolysirenden Kette und der Widerstand im Stromkreise  $Cu M_O M_H Zn$  für alle Versuche constant blieben.

Letzterer Bedingung glaubte ich folgendermaassen zu genügen: die untersuchten Drähte hatten angenähert gleiche Dicke (0,4—0,5 mm), waren sämmtlich 23 mm lang und entweder direct oder mit Siegellack in Glas eingeschmolzen, wo sie die Flüssigkeitsoberfläche trafen. Die Electroden in den Gefässen *B* und *C* befanden sich stets an gleicher Stelle, die Gefässe selbst waren bis zu einer bestimmten Marke mit dem Electrolyten, dessen Zusammensetzung und Temperatur dieselbe blieb, gefüllt. Die Communication zwischen den Gefässen vermittelte ein und derselbe lange und dünne Glasheber.

In den Stromkreis  $Cu M_O M_H Zn$  war eine Sinusbussole eingeschaltet. Die damit angestellten Strommessungen ergaben, dass sich die Stromstärke bei Anwendung einer electrolysirenden Kette von drei Daniell trotzdem je nach der Natur der Electrode  $M_H$  veränderte (die Electrode  $M_O$  bestand, wie bereits erwähnt, immer aus demselben Platindraht). Da diese Veränderungen nicht im Sinne der jeweiligen electromotorischen Gegenkraft  $M|(M+H)$  erfolgten, so musste angenommen werden, dass dieselben auf Variation des Widerstandes zu schieben seien, welche das Auftreten des *H* an  $M_H$  bedingt. Die Absorption von *H* verkleinert diesen Widerstand, die Bildung grosser Gasblasen vergrössert ihn. Wie aus nachstehender Zusammenstellung ersichtlich ist, entfallen für Platin und Palladium die grössten Werthe, für Aluminium, an welches Metall sich die Gasbläschen nach Art

bei der Electrolyse von Jodnatrium für die Wärmetönung derselben Verbindung die von Favre und Silbermann bestimmte Zahl 73510 gewählt. Die glänzende Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen für die electromotorische Kraft der Polarisation braucht bei einer derartigen Procedur wahrlich nicht Staunen zu erregen.

einer Traube mit grossen Beeren ansetzen, die als relativ<sup>1)</sup> kleinsten sich ergebenden Werthe — die Intensitäten in Graden der Bussole ausgedrückt.

Pt	Pd	Au	Ag	Al
23,0	20,2	15,7	16,7	15,5
22,7	20,8	15,8	17,4	16,0
22,4	20,6	16,0	15,5	16,5
Mittel 22,7°	20,5°	15,8°	16,5°	16,0°

Die Beobachtungen wurden so aufeinander gereiht, dass auf die erste Horizontalreihe unmittelbar die zweite, auf die zweite unmittelbar die dritte folgte.

Bei Verwendung einer electrolysirenden Kette von drei Daniell erhielt ich die Tabelle I (siehe p. 849). Die erste Verticalcolumnne derselben gibt die Zeiten in Minuten, gerechnet vom Momente der Stromunterbrechung an; in den weiteren Columnnen befinden sich die den entsprechenden Metallen und Zeiten zugehörigen Potentialdifferenzen der Wasserstoffpolarisation  $M|(M+H)$  reducirt auf die Daniell-Einheit. (Das Electrometer hatte die grössere Empfindlichkeit.) Dabei sind die zu 0' gehörigen Werthe die unmittelbar vor Unterbrechung des Stromes gefundenen Potentialdifferenzen.

Der besseren Uebersichtlichkeit zuliebe sind die Zahlen, welche bei geschlossener Kette erhalten wurden, mit fetten Lettern gedruckt.

Die Tabelle gestattet folgende Schlüsse:

Die electromotorische Kraft der Wasserstoffpolarisation hängt wesentlich von der Natur der Electrode ab; sie ist am grössten für Gold, wie auch Hr. Fromme<sup>2)</sup> gefunden, am kleinsten für Aluminium.

Der Verlauf der Polarisation ist an verschiedenen Metallen verschieden und charakteristisch. Allen Metallen ist ein grösstes Absinken vom ursprünglichen Werthe in der Zeit, welche auf die Unterbrechung des Stromes unmittelbar

1) Unter Berücksichtigung von  $M|(M+H)$  (vgl. Tab. I.).

2) Fromme, l. c. p. 414.

Tabelle I.

Electrolysirende Kette = 3 D.

Zeit	Pd	Pt	Au	Ag	Al
(Zufällige Potentialdiff.)	-0,01	-0,04	+0,01	+0,02	-0,01

Der electrolysirende Strom durch 10 Secunden geschlossen:

0'	+0,571	+0,836	+0,862	+0,235	+0,320
1'	-0,051	+0,146	+0,329	+0,190	-0,004
3'	-0,073	-0,002	+0,188	+0,102	-0,012
5'	-0,074	-0,020	+0,115	+0,080	-0,020

Der electrolysirende Strom durch 1 Minute geschlossen:

0'	+0,691	+0,853	+0,937	+0,880	+0,356
1,5'	0,624	0,810	0,252	0,222	-0,052
3'	0,610	0,053	0,203	0,214	-0,055
5'	0,595	-0,008	0,150	0,207	-0,052

Der electrolysirende Strom durch 2 Minuten geschlossen:

0'	+0,759	+0,867	+0,914	+0,898	+0,140
2'	0,651	0,826	0,256	0,230	-0,059
4'	0,648	0,700	0,201	0,226	-0,066
6'	0,639	0,104	0,167	0,222	-0,079

Der electrolysirende Strom durch 5 Minuten geschlossen:

0'	+0,778	+0,875	+0,924	+0,905	+0,398
2'	0,662	0,838	0,273	0,238	-0,062
4'	0,670	0,827	0,226	0,233	-0,078
6'	0,667	0,802	0,184	0,231	-0,057

Der electrolysirende Strom durch 30 Minuten geschlossen; während der Electrolyse von 5 zu 5 Minuten gemachte Beobachtungen ergaben:

	+0,791	+0,871	+0,955	+0,921	+0,527
	0,794	0,874	0,962	0,930	0,547
	0,789	0,876	0,971	0,938	0,557
	0,796	0,874	0,973	0,938	0,568
	0,803	0,874	0,974	0,949	0,572
0'	0,804	0,868	0,970	0,951	0,575
1'	0,683	0,831	0,306	0,251	-0,050
2'	0,685	0,830	0,278	0,250	-0,060
3'	0,685	0,828	0,256	0,247	-0,042
4'	0,685	0,825	0,232	0,245	-0,055
5'	0,680	0,816	0,207	0,244	-0,057
6'	0,682	0,805	0,199	0,244	-0,050
7'	0,684	0,794	0,180	0,242	-0,049
8'	0,683	0,764	0,175	0,241	-0,049
9'	0,683	0,710	0,160	0,241	-0,047
10'	0,682	0,649	0,157	0,240	-0,046
15'	0,682	0,234	0,135	0,237	-0,037

folgt, gemeinschaftlich. Während aber die H-occludirenden Metalle, sobald ihnen nur Gelegenheit geboten war, grössere Mengen des Gases aufzunehmen, nur bis 15 Proc. ihres Anfangswerthes einbüßen, haben die Metalle Gold und Silber den weitaus überwiegenden Theil, Aluminium sogar den Gesamtwertb der electromotorischen Kraft verloren. Im ferneren Verlauf behält Palladium einen constanten Werth, während die übrigen Metalle noch weiter abnehmen.

Ein ganz abnormes Verhalten zeigt Aluminium. Sobald die Kette geöffnet ist, tritt eine Umkehrung im electrischen Verhalten ein, einerlei, ob die electrolysirende Kette kurze oder lange Zeit geschlossen war.

An Platin und an Palladium zeigen sich die Umkehrungen nur nach kurzer Dauer des electrolysirenden Stromes.

Zur Erweiterung der Kenntnisse über das von Graham zuerst untersuchte Verhalten des H zu Pd dürften vielleicht die beiden nachstehend beschriebenen Versuche beitragen.

Ein von vier Daniells gelieferter Strom wurde durch ein Voltameter mit Pd-Electroden geleitet. An der Anode begann gleich nach Stromschluss ziemlich lebhaft O-Entwicklung, während an der Kathode nicht die geringste Spur einer Gasabgabe zu bemerken war. Erst nach längerer Zeit traten einzelne kleine H-Bläschen auf, die sich allmählich vermehrten und vergrösserten. Nachdem endlich die Entwicklung an beiden Electroden lebhaft geworden war und über eine Stunde gedauert hatte, wurde der Strom unterbrochen; sofort hörte die O-Entwicklung auf, während die H-Abgabe zuerst noch mit ungeminderter Lebhaftigkeit anhielt und erst allmählich sparsamer zu werden begann.

Ich habe bei Anwendung kräftiger Ströme die H-Abgabe noch bis zu anderthalb Stunden nach Oeffnen der Kette mit der Lupe wahrnehmen können.

Wird ein schon benutztes Voltameter neuerdings in Thätigkeit versetzt, so dauert es wieder längere Zeit, bis freier H an der Kathode erscheint.

Dieser Versuch berechtigt zu der Annahme, dass der unmittelbar aus der Verbindung scheidende, also electrisch

energ  
als de

brüch  
trolyt  
frühe  
weis  
von l

H au  
benu  
wech  
Elec  
Pote  
nahm  
ginn  
und  
risat  
der  
herr  
zu v  
Ket  
laris  
und  
setz  
beid  
end

zu  
flac  
den  
dru  
Ob  
und  
H  
um  
Pro

energischere H von Pd in grösserer Menge absorbiert wird, als der nicht unmittelbar abgeschiedene.

Es ist bekannt, dass Pd durch die Aufnahme von H sehr brüchig wird; weder ein Glühen des Drahtes, noch die electrolytische Abscheidung von O an demselben stellt seine frühere Festigkeit auch nur angenähert wieder her, ein Beweis dafür, dass die Metallmoleküle auch nach ihrer Trennung von H ihre gestörte Anordnung beibehalten.

Zu einer Vorstellung über die Art des Austrittes von H aus Pd gelangt man, wenn man eine schon als Kathode benutzte Electrode zur Anode macht. Sobald der Stromwechsel eingetreten ist, hört die Gasentwicklung auf; am Electrometer ist noch die von der H-Polarisation bedingte Potentialdifferenz zu bemerken, welche in langsamer Abnahme begriffen ist. Wirkt der Strom weiter fort, so beginnen sich an der Electrode wieder Gasblasen zu bilden, und am Electrometer fängt die rasch sich erhebende O-Polarisation an, die H-Polarisation zu verdrängen. Wird aber der Strom jetzt unterbrochen, so verschwindet die vom O herrührende Potentialdifferenz rasch, um der entgegengesetzten zu weichen. Nach neuerlichem Schliessen und Oeffnen der Kette bemerkt man dieselbe Erscheinung; nur ist die O-Polarisation kräftiger, die H-Polarisation schwächer geworden, und der Uebergang findet weniger rasch statt. Ein fortgesetztes Schliessen und Oeffnen der Kette lässt das Ringen beider Polarisationen um die Herrschaft noch erkennen, bis endlich die O-Polarisation den Platz behauptet.

Dieses Phänomen glaube ich folgendermassen erklären zu können: der entwickelte O wird zuerst den an der Oberfläche des Drahtes legirten H verbrennen. Dadurch wird den um eine Schicht gegen das Innere des Drahtes vorgeordneten H-Molekülen der Weg zur Wanderung an die Oberfläche freigemacht. Es werden die zweite, dritte und alle weiteren nach Innen gelegenen Drahtschichten von H befreit, welcher nach und nach die Oberfläche erreicht, um da zu Wasser zu verbrennen. Wird während dieses Processes der Strom unterbrochen, so stossen die zuletzt



nachdrängenden H-Moleküle auf keinen weiteren O-Vorrath und bedingen dadurch die Reste der H-Polarisation.

Zur Bestätigung der aus der Tabelle I gezogenen und zur Gewinnung von neuen Folgerungen theile ich in Tabelle II noch eine weitere Reihe von Beobachtungen mit, welche ich mit einer electrolysirenden Kette von fünf Daniells erhalten habe.

Die Electroden waren zu Beginn der Versuche gleichfalls noch unverwendet; der Strom blieb durch 61 Minuten geschlossen, während welcher Zeit in zuerst kürzeren, dann längeren Intervallen die Potentialdifferenzen gemessen wurden.

Die ersten der Werthe, welche den Verlauf der Polarisationen an den verschiedenen Metallen bestimmen, sind unmittelbar nach Unterbrechung des Stromes gefunden. Ich habe ihnen die Zeitbestimmung 1,5 Secunden, die halbe Schwingungsdauer des diesmal weniger empfindlich gemachten Electrometers, beigefügt:

Tabelle II.

Electrolysirende Kette = 5 Daniell.

Zeit	Pd	Au	Ag	Al
(Zufällige Potentialdiff.)	-0,005	0	+0,062	-0,01
Der electrolysirende Strom wird durch 61 Minuten geschlossen:				
nach 10'	+0,737	+0,863	+0,330	+0,600
" 3'	0,800	0,892	0,836	0,653
" 5'	0,806	0,969	0,837	0,659
" 10'	0,814	1,014	0,848	0,653
" 15'	0,829	1,035	0,854	0,635
" 20'	0,837	1,048	0,856	0,624
" 25'	0,840	1,064	0,857	0,606
" 30'	0,844	1,078	0,859	0,600
" 35'	0,846	1,088	0,861	0,590
" 40'	0,845	1,096	0,862	0,578
" 45'	0,854	1,102	0,867	0,575
" 50'	0,855	1,111	0,867	0,568
" 55'	0,857	1,116	0,867	0,558
" 60'	0,859	1,123	0,867	0,548



Der Strom wird geöffnet und der Verlauf beobachtet:

Zeit	Pd	Au	Ag	Al
nach 1,5''	—	+0,358	+0,357	—0,091
" 1'	+0,688	0,237	0,181	—
" 2'	0,684	0,176	0,176	—0,150
" 3'	0,684	0,147	0,175	—
" 4'	0,684	0,131	0,174	—
" 5'	—	0,122	0,173	—0,154
" 6'	0,681	0,114	0,172	—0,155
" 7'	0,682	0,107	0,171	—0,166
" 8'	0,683	0,105	0,171	—0,177
" 9'	—	0,100	0,171	—0,181
" 10'	0,683	0,098	0,170	—0,170
" 15'	0,683	0,085	0,170	—0,140
" 20'	0,682	0,075	—	—0,135
" 25'	0,683	0,068	0,170	—0,120
" 30'	0,683	0,063	—	—0,115
18 Stunden	+0,669	+0,003	+0,005	—0,006

Die neu gewonnene Tabelle bestätigt die früher gezogenen Schlüsse und lässt auch den Einfluss erkennen, welchen die Zeitdauer der Schliessung der Kette auf die Grösse der H-Polarisation nimmt. So ist an Pd und Au ein stetes Ansteigen der Potentialdifferenzen zu beobachten, während an Ag ein constanter grösster Werth nach 45' erreicht ist, an Al hingegen ein Ansteigen nur in den ersten 5' stattfindet, worauf die Polarisation wieder continuirlich fällt, um im weiteren Verlaufe noch unter den der ersten Beobachtung bei geschlossener Kette zukommenden Werth herabzusinken.

Vergleicht man Tabelle II mit I, so bemerkt man, dass bei Anwendung der kräftigeren Kette die gleichen Zeiten entsprechenden H-Polarisationen an Pd, Au und Al grösser, an Ag kleiner ausgefallen sind.

Die folgende Tabelle III ist eine Fortsetzung der vorhergehenden Tabelle, da die Beobachtungen mit dem in II benutzten Voltmeter ausgeführt wurden. Zuerst wurde drei Stunden hindurch mit fünf Daniell Wasser zersetzt und unmittelbar nach Stromschluss, ferner nach Ablauf der ersten und letzten Stunde je eine Beobachtung gemacht, dann trat zu den fünf Elementen nach sehr kurzer Stromunterbrechung.

eine Noë'sche Thermosäule hinzu, welche eine electromotorische Kraft von fünf bis sechs Daniell entwickelte. Die so entstehende Kette blieb durch 15' geschlossen, während welcher Zeit drei in gleichen Intervallen liegende Beobachtungen erfolgten.

Tabelle III.

Zeit	Pd	Au	Ag	Al	Electrolys. Kette
Der electrolys. Strom durch 3 Stunden geschlossen:					5 Daniell
nach 1,5''	+0,960	+1,028	+0,963	+0,432	
„ 60'	0,944	1,116	0,942	0,426	
„ 180'	0,960	1,274	0,909	0,444	
Der electrolys. Strom durch 15 Minuten geschlossen:					10—11 Dan.
nach 5'	+1,018 <sup>1)</sup>	+1,350	+0,971	+0,532	
„ 10'	1,021	1,359	0,973	0,528	
„ 15'	1,021	1,365	0,968	0,532	
Der Strom wird geöffnet und der Verlauf beobachtet:					
nach 1,5''	+0,703	+0,410	+0,215	+0,184	
„ 1'	0,709	0,383	0,181	+0,004	
„ 2'	0,710	0,348	0,177	0	
„ 3'	0,716	0,273	0,176	-0,010	
„ 4'	0,709	0,236	0,174	-0,012	
„ 5'	0,709	0,217	0,173	-0,012	
„ 10'	0,707	0,190	0,165	-0,012	
„ 20'	0,704	0,189	0,153	-0,015	

Kaum ist der Strom von neuem geschlossen, so haben die Potentialdifferenzen ihre charakteristischen Werthe erreicht. Pd und Ag sind im Vergleiche zu der letzten bei geschlossener Kette angegebenen Beobachtung (s. Tab. II) sogar noch um 0,1 Daniell gestiegen, während Au und Al um ein Gleiches gefallen sind.

Die neue Kette von doppelter electromotorischer Kraft treibt diesmal alle Werthe in die Höhe.

Am Pd ist beim Beginne der freien Gasentwicklung kein Sprung in der Potentialdifferenz zu beobachten; Al hat durch den langen Stromschluss seine Energie zur Umkehrung bedeutend eingebüsst.

Da der Widerstand im Voltameter wegen des Verbindungsbügels zwischen den Gefässen B und C sehr beträchtlich

1) Beginn der Gasabgabe an der Electrode.

war, so werden sich die Stromstärken der electrolysirenden Kette in beiläufiger Annäherung wie deren electromotorische Kräfte, nämlich wie 3:5:10 verhalten. Die Vergrößerung der Gegenkraft  $M/(M+H)$ , zu der sich, wie ich hier nebenbei bemerke, auch eine vergrößerte Gegenkraft  $(M+O)/M$  gesellt, wird die Zahlen fünf und zehn allerdings herabdrücken.

§ 4. Es ist aus den bisher mitgetheilten Tabellen nicht zu ersehen, ob die geänderten Werthe für die H-Polarisation lediglich auf Rechnung der gesteigerten electromotorischen Kräfte der Kette, oder ob sie auch auf Rechnung der gleichfalls erhöhten Stromstärken zu setzen seien. Soll eine Abhängigkeit der Potentialdifferenzen der H-Polarisation von der Intensität der electrolysirenden Kette zu constatiren sein, so musste zu dem verhältnissmässig verringerten Widerstand des Voltameters noch ein beliebig zu verändernder Widerstand hinzugefügt werden.

Dazu tauchten die beiden, durch eine mit Siegelack überzogene Glasplatte parallel geführten und starr mit einander verbundenen Electroden  $M_H$  und  $M_O$  von 22,5 mm Länge und 17,5 mm gegenseitiger Entfernung in das über  $B$  mit  $A$  verbundene Gefäss  $C$ , während in den Stromkreis ein Siemens'scher Stöpselatalon, 10 000 S.-E. enthaltend, eingeschaltet wurde.

Um festzustellen, ob sich die Fuchs'sche Methode auch hier, wo das Potentialgefälle in der zwischen  $M_H$  und  $M_O$  gelegenen Flüssigkeitsschicht sehr bedeutend geworden, praktisch verwerthen lasse, wurde eine aus zwölf Chromsäure-Elementen bestehende Kette mit dem Voltameter  $C$  verbunden und die Electrode  $M_H$ , welche auf dem früher angegebenen Weg zur Erde führte, durch einen Draht, dessen Widerstand den nun entfernten Verbindungsbügeln gleichkam, mit der gasfreien, in das Gefäss  $A$  tauchenden Electrode  $M$  verbunden. Während der im Voltameter vor sich gehenden rapiden Gasentwicklung wurde  $M$  mit dem Electrometer in Contact gebracht. Es zeigte sich keine Veränderung der Ruhelage; es war also durch das starke Gefälle in  $C$  keine Störung entstanden, und die Methode mithin brauchbar.

Die folgende Tab. IV. (p. 857) wurde nur mit Pt-Electroden ausgeführt. Zur Electrolyse dienten sechs Bunsen'sche Elemente, deren Gesamtwiderstand ungefähr 3 S.-E. betrug. Die Kette blieb für jede Versuchsreihe durch elf Minuten geschlossen; während dieser Zeit geschahen die Beobachtungen in den auf der ersten Verticalcolumnne angegebenen Zwischenräumen. Die erste Horizontalcolumnne enthält die bei den verschiedenen Versuchsreihen verwendeten Rheostatenwiderstände  $\rho$  in Siemens-Einheiten ausgedrückt.

Der Verlauf der Polarisation liess sich hier nicht bestimmen, da wegen der Diffusion der in unmittelbarer Nachbarschaft entwickelten Ionen Störungen eintreten. Es sind deshalb nur die unmittelbar nach Unterbrechung der Kette gefundenen Zahlen mitgetheilt.

Ich will auf die folgende Tabelle IV noch die Tabellen V und VI folgen lassen, um sie gemeinschaftlich besprechen zu können. Die Tabellen V, VI, welche wie IV mit bis dahin noch unbenutzten Electroden (ausgenommen Al in V) ausgeführt sind, geben die Beziehungen, welche zwischen der H-Polarisation und Stromintensität der electrolysirenden Kette bestehen, auch für Au- und Al-Electroden an. Der electrolysirende Strom bleibt während der von zwei zu zwei Minuten vorsichgehenden Veränderung des Rheostatenwiderstandes  $\rho$  stets geschlossen; die erste Verticalcolumnne gibt die Zeiten nach dem Schliessen des Stromes an.

Je weniger die Kette Widerstand zu überwinden hat, desto grösser werden die Potentialdifferenzen an den Electroden, und sie erreichen Werthe, welche meines Wissens bisher von keinem Beobachter gefunden wurden. Auch hier besitzt Au immer den grössten, Al den kleinsten Werth.

Da die O-Polarisation bei Verringerung des Widerstandes ebenfalls ansteigt, so wird man in Bezug auf die Gasamtpolarisation sagen können, dass die electrolysirende Kette eine bedeutendere Energie an das Voltameter abgibt; als zur Trennung des  $H_2O$  in gewöhnlichen H und O und zur Wärmeerzeugung nach Joule's Gesetz erforderlich wäre.<sup>1)</sup>

1) Danach müsste daselbst auch mehr Wärme auftreten, als Joule's Gesetz fordert, und müsste dieser Ueberschuss erzeugter Wärme besonders

-Elec-  
n'sche  
etru.  
nuten  
bach-  
enen  
t die  
Rheo-  
  
t be-  
ach-  
sind  
Kette  
  
en V  
a zu  
ahin  
aus-  
H.  
ette  
tro-  
Mi-  
der-  
gibt  
  
nat,  
ec-  
ens  
ier  
  
er-  
die  
de  
ot;  
nd  
1)  
s's  
rs

Pt-Electroden.

Tabelle IV.

Electrolysirende Kette = 6 Bunsen.

Zeit	(Zufällige Potentialdiff.)		+0,095		+0,067		-0,011		-0,013		-0,038		-0,018		-0,020		-0,030		+0,082		+0,085		+0,068	
	q = 10,000		9,000		8,000		7,000		5,000		1,000		500		20		15		10					
nach 1,5"	0,924	0,906	0,889	0,882	0,861	0,904	0,980	1,802	2,696	2,801	3,575													
" 5'	0,950	0,900	0,898	0,889	0,868	0,921	1,030	2,061	2,801	2,991	3,680													
" 10'	0,965	0,905	0,897	0,891	0,881	0,937	1,092	2,113	2,830	3,030	3,703													
Der electrolysirende Strom wird durch 11 Minuten geschlossen.																								
nach 1,5"	0,877	0,870	0,868	0,860	0,820	0,800	0,780	0,730	0,728	0,720	0,710													
Der Strom wird geöffnet.																								

Tabelle V.

Electrolysirende Kette = 6 Bunsen.

Zeit	q	Pt (zufällige Potentialdifferenzen) +0,004	Au +0,030		Al +0,194	
			0,867		0,543	
1,5"	9000	0,877	0,896		0,534	
2'	9000	0,876	0,916		0,532	
4'	8000	0,867	0,932		0,526	
6'	7000	0,876	0,952		0,524	
8'	6000	0,877	0,974		0,520	
10'	5000	0,879	0,997		0,533	
12'	4000	0,894	1,025		0,546	
14'	3000	0,908	1,068		0,571	
16'	2000	0,936	1,135		0,631	
18'	1000	0,944				

Tabelle VI.

Electrolysirende Kette = 6 Bunsen.

Zeit	q	Pt (zufällige Potentialdifferenzen) +0,008	Au +0,040		Al -0,030	
			Pt	Potentialdifferenzen	Pt	Potentialdifferenzen
1,5"	1000	0,934	1,116	0,578		
2'	1000	0,944	1,171	0,573		
4'	800	0,957	1,200	0,601		
6'	600	0,984	1,241	0,622		
8'	400	1,038	1,302	0,677		
10'	200	1,203	1,412	0,769		
12'	100	1,472	1,663	0,932		
14'	80	1,616	1,763	1,010		
16'	60	1,778	1,912	1,150		
18'	40	2,030	2,412	1,403		
20'	20	2,533	3,060	1,958		
22'	10	3,136	3,370	2,553		
24'	5	3,690	3,978	3,063		
26'	0	4,728	5,090	4,010		

Demnach wird man von einem Polarisationsmaximum in dem bisher gebrauchten Sinne nicht mehr sprechen können.

Das plötzliche Absinken der Polarisation (Tabelle IV) unmittelbar nach Unterbrechung des Stromes auf einen zwischen kleinen Grenzen gelegenen Werth macht es erklärlich, dass diese Frage bisher noch nicht entschieden wurde. Es sind eben die Untersuchungen über die Polarisation bis in die jüngste Zeit fast durchweg nach Unterbrechung der electrolysirenden Kette vorgenommen worden, und so haben sie zum Theile die Begriffe über die „Natur“ dieser Erscheinungen nur verwirrt; die Herren Beetz und Fromme<sup>1)</sup> aber bedienten sich bei ihren im Laufe der letzten zwei Jahre veröffentlichten Arbeiten über diesen Gegenstand bedeutend schwächerer Ströme, da beide Herren als Hauptziel im Auge hatten, die erwähnte Hypothese des Hrn. Prof. Exner experimentell zu widerlegen.

Physik. Inst. der Univers. Graz.

#### V. Ueber Hrn. A. Guébard's Darstellung der Aequipotentialcurven; von E. Mach.

(Aus dem 86. Bde. d. Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wiss. zu Wien. II. Abth. am 9. Juni 1882; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. VI Fig. 2. 3.)

Auf der im Sommer 1881 zu Paris abgehaltenen Ausstellung electrischer Apparate war vorwiegend die Electro-technik vertreten. Unter den Objecten, welche mehr den Theoretiker anzogen, zeichneten sich Hrn. Guébard's nach dem Principe der Nobili'schen Ringe dargestellte Aequipotentialcurven durch ihre wunderbare Schönheit aus. Ueber die Natur und Bedeutung dieser Curven bestand aber zwischen

bei grosser Stromstärke bedeutend sein. (vgl. Wiedemann, Galvanismus, 2. Aufl., 2. Abth., p. 503).

1) Und vor einem Monate, als die vorliegende Untersuchung schon abgeschlossen war, Hr. Hallock (Wied. Ann. 16. p. 56. 1882).

Hrn. Guébhard und mir eine Meinungsdifferenz, welche mündlich nicht zum Austrag gebracht werden konnte. Da, wie ich aus neuerlichen Publicationen ersehe, auch andere sich nicht unbedingt Hr. Guébhard's Meinung anschliessen konnten, so will ich hier meine Ansicht kurz darlegen.

Wir denken uns eine planparallele Flüssigkeitsplatte, welche durch Eingiessen einer Metallsalzlösung in eine Cüvette erhalten wird. Der Boden der Cüvette ist mit einer sehr dünnen, ebenen, versilberten Kupferplatte (paillon) bedeckt. Die Electroden sind Drähte, welche, ohne die Metallplatte zu berühren, in die Flüssigkeit eintauchen. Gibt man nun der Flüssigkeit durch Wachs oder einen anderen Isolator eine cylindrische Grenze, deren Leitlinie als Stromcurve zu den Fusspunkten der Electroden als Ein- und Ausströmungspunkten passt, so sollen durch die Electrolyse auf der Kupferplatte die Potentialniveaucurven der betreffenden ebenen Strömung sichtbar werden.

Thatsächlich sind nun die so entstehenden Curven in Fällen, welche sich berechnen lassen, den Potentialniveaucurven ausserordentlich ähnlich, und es wäre daher doch etwas gewagt, ohne weiteres zu behaupten, wie es geschehen ist, dass Hr. Guébhard's Verfahren einfach auf einem Irrthum beruhe. Aber auch Hr. Guébhard kann nicht vollständig Recht haben, wie aus folgender Ueberlegung hervorgeht.

Electrolytische Abscheidung kann nur stattfinden, wo der Strom die Grenze eines Electrolyten passirt. Wäre es nicht durch die Versuchsanordnung schon für sich klar, so würden die Abscheidungen auf der Kupferplatte es nachweisen, dass wir es mit einer Strömung im Raume zu thun haben, welche theilweise aus der Flüssigkeit in die Kupferplatte übergeht. Gleiche Newton'sche Farbe erhalten wir, wo gleiche dicke Schichten sich ausgeschieden, also gleiche starke Stromcomponenten die Plattengrenze normal passirt haben. Die entstehenden Curven sind also zweifellos Curven gleicher Stromstärke, oder wie man hier auch sagen kann, Curven gleicher Stromdichte. Sie haben also an sich mit den Niveaucurven einer ebenen Strömung nichts



zu schaffen. Die Frage steht vielmehr jetzt so: „Wie können in dem gegebenen Falle einer Strömung im Raume die Potentialniveaucurven einer ebenen Strömung durch die bezeichneten Curven gleicher Stromstärke abgebildet werden?“

Die Antwort auf diese Frage ergibt sich schon durch eine unbefangene qualitative Untersuchung der Verhältnisse bei dem fraglichen Experiment. Wir verwenden aus Gründen, die sofort einleuchten werden, eine Holzschvette mit einem dünnen Blechboden, füllen dieselbe mit Flüssigkeit und tauchen die Electroden ein. Untersuchen wir nun den Verlauf der Potentialfunction  $u$  bei dieser Anordnung.

Die beiden Enden eines Multiplicatordrahtes können leicht so in die Flüssigkeit getaucht werden, dass kein Ausschlag erfolgt. Eine geringe passende Verschiebung des einen Drahtes aus dieser Stellung bringt aber einen mächtigen Ausschlag hervor.

Legen wir die Enden des Multiplicatordrahtes von unten an den Blechboden an, so erhalten wir überhaupt nur sehr kleine Ausschläge. Die Werthe von  $u$  sind also sehr verschieden in der Flüssigkeit, nahezu gleich im Blechboden.

Kräftige Ausschläge erhalten wir im allgemeinen, wenn der eine Draht in die Flüssigkeit getaucht, der andere von unten an den Blechboden angelegt wird. Die Werthdifferenzen des  $u$  im Blechboden und der darüber befindlichen Flüssigkeit sind also im allgemeinen bedeutend.

Wir legen die bis an die Spitzen isolirten Enden des Multiplicatordrahtes (Fig. 2) geradlinig so zusammen, dass der eine Draht die Verlängerung des anderen bildet, und tauchen diese Combination in die Flüssigkeit ein. Hierbei ergibt sich fast gar kein Ausschlag. Erst wenn das tiefere Drahtende den Blechboden fast berührt, wird der Ausschlag plötzlich sehr kräftig.

Die Strömung ist daher in der flüssigen Planplatte wirklich merklich eine ebene und geht parallel dem Blechboden vor; sie wird nur in der Nähe des Bodens durch diesen modificirt.

Nehmen wir nun den extremen Fall an, der von der Wahrheit nicht weit abweicht, dass der Werth des  $u$  in dem Blech-



boden überall = 0 werde, so ist das Gefälle aus der Flüssigkeit in den Blechboden an allen Stellen merklich proportional dem Werth von  $u$  in der darüber stehenden Flüssigkeit. Die Normalstromcomponenten in die Metallplatte sind also selbst proportional  $u$ , womit die Antwort auf obige Frage gegeben ist.

Sollen die Werthe von  $u$  in der Flüssigkeit wirklich einer ebenen Strömung entsprechen, so darf der Stromtheil, welcher durch die Metallplatte geht, nur unbedeutend sein. Inwiefern diese Bedingung erfüllt ist, lehrt folgender Versuch. Wir nehmen zwei gleiche Cüvetten  $A, B$  aus isolirendem Material, leiten den Strom der Kette  $K$  (Fig. 2) durch dieselben und durch einen Draht  $PP$ . Nach dem Principe der Wheatstone'schen Brücke vergleichen wir durch den in den Brückendraht  $NQ$  eingeschalteten Multiplicator die nahe gleichen Widerstände von  $A$  und  $B$ . Legt man nun in die eine Cüvette  $B$  einen dünnen Metallboden ein, wie ihn Hr. Guébhard zu verwenden pflegt, so vermindert sich der Widerstand von  $B$  um etwa 10 Proc. Es geht also kein zu grosser Stromtheil durch die Metallplatte hindurch. Die Sache ändert sich natürlich wesentlich, wenn eine oder gar beide Electroden in  $B$  mit der Metallplatte in Berührung kommen. Der Widerstand  $B$  verschwindet im letzteren Falle. Solche Anordnungen sind unbrauchbar.

Betrachten wir nun die Sache von einer anderen Seite. Im allgemeinen kann zu einer ebenen, stationären Strömung (parallel der  $XY$ -Ebene) keine  $Z$ -Componente hinzutreten, ohne dass die erstere gestört wird. Fragen wir, ob eine solche Combination überhaupt möglich sei. Soll eine Strömung im Raume zugleich (mit Ausschluss der  $Z$ -Componente) eine ebene Strömung parallel der (horizontalen)  $XY$ -Ebene vorstellen, so hat die Potentialfunction  $\varphi$  die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

zugleich zu erfüllen, oder  $\varphi$  hat der Gleichung (2) und:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

zugleich zu genügen. Aus (3) folgt  $\varphi$  in der Form:

$$\varphi = u \cdot z + v,$$

wobei  $u, v$  Functionen von  $x, y$  bedeuten. Dieser Ausdruck genügt auch (2), wenn  $u$  und  $v$ , für  $\varphi$  in (2) eingesetzt, diese Gleichung erfüllen. Die  $Z$ -Componente bildet in ihrer Intensität das  $\varphi$  der ebenen Strömung ab, wenn:

$$\varphi = u \cdot z, \quad \text{und demnach:} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u.$$

Dieser Fall ist der einzige, in welchem die bezeichnete Aufgabe exact gelöst ist. Man sieht aber zugleich, dass derselbe physikalisch nicht realisirbar ist, denn  $\partial \varphi / \partial z$  ist von  $z$  unabhängig, und es müssten also durch die obere Flüssigkeitsgrenze dieselben Ströme eintreten, durch welche die entsprechenden Punkte der unteren austreten. Einer angenäherten physikalisch realisirbaren Lösung der Aufgabe steht aber nichts im Wege. Man erhält eine solche z. B. durch  $\varphi = u \cdot \cos \mu z$ , wobei  $u$  der Gleichung (2) genügt, und  $\mu$  eine sehr kleine Zahl ist. Denkt man sich die Flüssigkeit durch  $z = 0$  und  $z = +1$  begrenzt, so ist für erstere Grenze  $\partial \varphi / \partial z = 0$ , für letztere  $\partial \varphi / \partial z = -\mu \sin \mu u$ . An letzterer Grenze wird also durch die Stromintensitäten die Potentialfunction  $u$  abgebildet, welche der Gleichung  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 - \mu^2 u = 0$  genügt, die also für sehr kleine Werthe von  $\mu$  sehr nahe einer ebenen stationären Strömung entspricht. Die Betrachtung des particulären Integrales  $e^{\alpha x + \beta y + \gamma z}$  der Gleichung (1), welches man so einrichtet, dass es angenähert auch der Gleichung (2) genügt, führt leicht auf die angegebene Form.

Die experimentelle Untersuchung und die theoretische Ueberlegung führen also zu dem Resultate, dass bei Hrn. Guébhard's Versuchen eine Strömung im Raume stattfindet, bei welcher aber durch Curven gleicher Stromintensität die einer ebenen Strömung entsprechenden Curven gleicher Potentialfunction angenähert abgebildet werden können.

Hr. Guébhard hatte die Freundlichkeit, mir einige von ihm dargestellte Figuren zu übersenden. Ich habe nach seinem Verfahren selbst mehrere sehr schöne Figuren er-

halten, welche berechneten und für die Zwecke der Vorlesung graphisch dargestellten Fällen entsprachen. Meine hier mitgetheilten Anschauungen haben sich hierbei durchaus bestätigt.<sup>1)</sup>

Ich will bei dieser Gelegenheit noch eine allgemeine Bemerkung über die physikalische Bedeutung der Gleichung (1) hinzufügen, die bekanntlich in den verschiedensten Gebieten eine Rolle spielt. Die Grösse  $\varphi$  können wir uns als eine mittelbar oder unmittelbar wahrnehmbare physikalische Charakteristik eines materiellen Punktes denken, welche nach Umständen der Temperatur, der Potentialfunction, dem Geschwindigkeitspotential, der Concentration einer Lösung u. s. w. entspricht. Das Bestehen des Gleichgewichtes, das Beharren eines stationären Vorganges, sowie jede Veränderung ist durch die Werthdifferenzen der physikalischen Charakteristik eines Punktes und der denselben umgebenden Punkte bestimmt. In einem physikalischen Continuum wird also, kurz gesagt, das Verhalten eines jeden Punktes durch die Abweichung des Werthes der physikalischen Charakteristik von einem gewissen Mittelwerth der Umgebung bestimmt sein. Sei  $\varphi = f(x, y, z)$ , so ist für einen Nachbarpunkt der Werth von  $\varphi$  gegeben durch  $f(x + h, y + k, z + l)$ , und wenn  $\psi \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$  eine in jedem Falle besonders zu bestimmende Function der Entfernung bedeutet, welche den gegenseitigen Einfluss der Punkte bestimmt, und die im allgemeinen sehr schnell mit dem Wachsen der Entfernung abnimmt, so nimmt der massgebende Mittelwerth meist die Form an:

---

1) Die Aehnlichkeit, welche Hr. Guébbard zwischen seinen Figuren und meinen Explosionsfiguren auf Russ findet, muss ich als eine sehr äusserliche betrachten. Sie würde nur dann grösser sein, wenn letztere Figuren statt der Interferenzlinien den Verlauf des Geschwindigkeitspotentials einer dauernden Schallbewegung sichtbar machen würden, was nicht der Fall ist. Dagegen möchte ich hier kurz bemerken, dass ich die unter dem Namen der „electrischen Schattenbilder“ von Hrn. Holtz beschriebene schöne Erscheinung mit schattengebenden Isolatoren und Leitern electrolytisch nachgeahmt habe. Ueber die Natur der Holtz'schen Erscheinung soll damit nicht gesprochen sein.

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h, y+k, z+l) \psi \sqrt{h^2+k^2+l^2} \cdot dh \cdot dk \cdot dl}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \sqrt{h^2+k^2+l^2} \cdot dh \cdot dk \cdot dl}.$$

Entwickelt man  $f(x+h, y+k, z+l)$  nach der Taylor'schen Reihe bis zu den zweiten Potenzen von  $h, k, l$ , und integrirt durch alle acht Octanten um den Punkt  $x, y, z$  herum, so fallen wegen des Zeichenwechsels alle mit ungeraden Potenzen von  $h, k, l$  behafteten Glieder aus, und es bleibt als Ausdruck des Mittelwerthes:

$$(4) \quad \varphi + \frac{m}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right),$$

$$\text{wobei:} \quad m = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \psi \sqrt{h^2+k^2+l^2} \cdot h^2 dh dk dl}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \psi \sqrt{h^2+k^2+l^2} \cdot dh dk dl}.$$

Die Abweichung des  $\varphi$  vom Mittelwerthe der Umgebung ist demnach durch den zweiten Theil des Ausdrucks (4) gegeben. Die allgemeine Bedeutung des Ausdrucks (4) wird durch die angedeutete Betrachtung sehr nahe gelegt. Man erkennt aber zugleich, dass die Verwendung der Form (4) auf einer Näherung beruht. Nimmt der Werth von  $\psi$  mit dem Wachsen der Entfernung langsamer ab, so genügt die Entwicklung bis zu den zweiten Differentialquotienten nicht; man muss dann bis zu den vierten, sechsten u. s. w. fortschreiten. Alle Complicationen ergeben sich, wenn die Werthe von  $\varphi$  selbst auf jene von  $\psi$  Einfluss haben, wie dies z. B. aus den Versuchen von Forbes über Wärmeleitung hervorgeht. Ebenso wenig sind die sogenannten Artunterschiede der Electricität durch die jetzt gebräuchliche Annäherung darstellbar.

Dass die Tragweite der angedeuteten Betrachtung über das Gebiet der eigentlichen Physik hinausreicht, dass sie eine allgemeinere phänomenologische Bedeutung hat, wird am besten durch ein Beispiel klar. Ein Raum sei im

electrostatistischen Gleichgewicht. Dann ist (nach der Laplace'schen Gleichung) die Abweichung des Werthes von  $\varphi$  vom Mittelwerthe der Umgebung überall = 0. Nur an der Grenze von Isolatoren und Leitern besteht eine solche Abweichung, die wir Ladung nennen, ohne uns hierbei einen ladenden Stoff vorstellen zu müssen. Denken wir uns nun den Raum mit der Lichtintensität  $\varphi$  leuchtend, so würde das Auge jene positiven und negativen Abweichungen vom Mittelwerthe, jene Ladungen, sofort als Erhellungen und Verdunkelungen sehen. Die Abweichung vom Mittel spielt nämlich auch im Gebiete der Lichtempfindung eine Rolle, wie dies anderwärts ausgeführt worden ist.<sup>1)</sup>

#### VI. *Die electromotorische Kraft des Daniell'schen Elements; von Erasmus Kittler.*

(Aus den Berichten der math.-phys. Classe der k. bayr. Acad. d. Wiss. zu München. Heft 4. 1882; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

##### Einleitung.

Die meisten numerischen Angaben über die Grösse der electromotorischen Kraft galvanischer Combinationen sind auf die des Daniell'schen Elementes als Einheit bezogen. Nun werden einerseits für diese empirische Norm von verschiedenen Physikern verschiedene Flüssigkeiten in Anwendung gebracht, indem entweder verdünnte Schwefelsäure oder eine Lösung von Zinksulfat oder auch Salzlösungen aus der Reihe der Chloride mit dem Zink in Berührung treten; andererseits hat man bis in die jüngste Zeit der durch Concentrationsunterschiede bedingten Veränderlichkeit der electromotorischen Kraft nicht genügend Rechnung getragen. So lässt es sich verstehen, dass fast jeder Arbeit ein anderes Daniell'sches Element als Norm zu Grunde gelegt ist, ohne dass man diese verschiedenen Einheiten selbst in genaue Beziehung zu einander gebracht hätte. Auf diesen

1) Mach, Wien. Ber. 57. II. Abth. Jan.-Heft. 1868.

Uebelstand, der es fast zur Unmöglichkeit macht, werthvolle Angaben verschiedener Autoren einem strengen Vergleiche zu unterziehen, ist übrigens schon mehrfach hingewiesen worden. Ich denke hierbei vorzugsweise an die Abhandlung Fromme's „über die constanten Ketten“<sup>1)</sup>, in welcher auch das Daniell'sche Element in der Zusammensetzung mit Zinksulfat einer umfassenden Untersuchung unterzogen wurde. Fromme bestätigt hierin die bereits von Svanberg<sup>2)</sup> angeführte Thatsache, dass die electromotorische Kraft der Combination:



mit Verdünnung der Zinksulfatlösung zu-, mit dem Gehalt an Kupfersulfat dagegen abnimmt. Kurz vor der Fromme'schen Arbeit sind zwei Berichte<sup>3)</sup> über denselben Gegenstand veröffentlicht worden, die in ihren Resultaten mehr oder minder von obigem abweichen. Insbesondere sind die theoretischen Erwägungen und praktischen Versuche Baumgartner's mit allem in dieser Richtung vorhandenen in directem Widerspruche, indem mit Verdünnung der Kupfersulfatlösung eine Erhöhung der electromotorischen Kraft eintreten sollte, während das Experiment selbst vollständige Constanz ergibt. Dieser Umstand findet nach Fromme's Ansicht in der von Baumgartner angewandten Methode eine hinreichende Erklärung, und man kann wohl über die wirklichen Verhältnisse im  $\text{ZnSO}_4$ -Element nicht mehr im Zweifel sein.

Dagegen lassen die bisher angestellten Versuche über das Daniell'sche Element:



noch mancherlei Lücken. Zwar ist längst bekannt, dass eine stärkere Säure die electromotorische Kraft erhöht; es ist dies von Poggendorf<sup>4)</sup>, Svanberg<sup>5)</sup> und Baumgartner<sup>6)</sup>

1) Fromme, Wied. Ann. 8. p. 326. 1879.

2) Svanberg, Pogg. Ann. 73. p. 290. 1848.

3) F. Streintz, Carl's Rep. 15. p. 6. 1879. G. Baumgartner ibid., p. 105.

4) Poggendorff, Pogg. Ann. 70. p. 60. 1845.

5) Svanberg, Pogg. Ann. 73. p. 290. 1848.

6) Baumgartner, Carl's Rep. 15. p. 105. 1879.

übereinstimmend constatirt, wenn auch J. Thomsen<sup>1)</sup> in seiner vielgenannten Arbeit über „chemische Energie und electromotorische Kraft“ für eine schwächere Säure eine grössere electromotorische Kraft findet. Dagegen blieb bis jetzt unerörtert, wie sich im  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Element die freie Spannung ändert, wenn bei gleichbleibender Säure ein Unterschied in den Concentrationsverhältnissen des Kupfersulfats herrscht. Es liegt die Vermuthung nahe, dass auch hier mit Verdünnung des Kupfersulfats eine Minderung der electromotorischen Kraft sich geltend machen müsse; und es hat fast den Anschein, als ob man in dieser Voraussetzung experimentelle Studien unterlassen hätte. In Wirklichkeit bieten aber beide Elemente vollständig verschiedene Verhältnisse dar.

Die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes ist mitbedingt durch die an der Berührungsstelle der beiden Flüssigkeiten auftretende freie Spannung, diese selbst aber wird im allgemeinen je nach dem Concentrationsgrade der einen oder der anderen Flüssigkeit verschiedene Werthe annehmen. Während nun in der Combination  $\text{Zn}$ ,  $\text{ZnSO}_4$ ,  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{Cu}$  zwei Salze zur Verwendung kommen, die in ihren verschiedenprocentigen Lösungen eine dem Volta'schen Spannungsgesetze ähnliche Gesetzmässigkeit befolgen<sup>2)</sup>, zeigen die im  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Element benutzten Flüssigkeiten diese Eigenthümlichkeit nicht. Es ist dies eine durch zahlreiche Beobachtungen erwiesene Thatsache, die ihre Richtigkeit behält, mag man die an der Berührungsstelle der Flüssigkeiten auftretenden Spannungsdifferenzen mit den dort sich abspielenden chemischen Processen und deren Wärmetönungen in Zusammenhang bringen oder nicht. Gerade diese Thatsache aber ist es, die in beiden Combinationen eine nicht unwesentliche Rolle spielt. Es seien  $+D_1$  und  $+D_2$  die freien Spannungen in zwei verschiedenen, offen gedachten Daniell'schen Elementen, in welchen die das Zink umgebende Flüssigkeit F die gleiche ist, während

1) Thomsen, Wied. Ann. 11. p. 246. 1880.

2) Wild, Pogg. Ann. 103. p. 353. 1858. Kittler, Wied. Ann. 12. p. 572. 1881. Sitzungsber. d. kgl. Acad. d. Wissensch. p. 113. 1881.



das erste Element eine concentrirte Kupfersulfatlösung  $V_1$ , das andere eine Verdünnung  $V_2$  enthält. Dann ist:

$$+ D_1 = \text{Cu} | V_1 + V_1 | F + F | \text{Zn}, \\ + D_2 = \text{Cu} | V_2 + V_2 | F + F | \text{Zn},$$

und beide Elemente sind unterschieden durch die Grösse:

$$\Delta = D_1 - D_2 = \text{Cu} | V_1 + V_1 | F + F | V_2 + V_2 | \text{Cu}.$$

Ist nun  $F$  eine Zinsulfatlösung  $L$ , so gilt die Beziehung:

$$V_1 | L + L | V_2 = V_1 | V_2,$$

und die Differenz  $D_1 - D_2$  lässt sich ausdrücken durch:

$$\Delta_L = D_1 - D_2 = \text{Cu} | V_1 + V_1 | V_2 + V_2 | \text{Cu}.$$

Es wird nun:  $D_1 \leq D_2$ ,

je nachdem  $\Delta_L$ , d. h. die electromotorische Kraft der Combination:

$$\text{Cu} | V_1 + V_1 | V_2 + V_2 | \text{Cu}$$

eine in obigem Sinne positive oder negative Grösse ist. Die directe Beobachtung liefert für die Potentialdifferenz:

$$\text{Cu} | V_1 + V_1 | V_2 + V_2 | \text{Cu}$$

einen positiven Werth, d. h. es ist:

$$D_1 > D_2;$$

die electromotorische Kraft des Elements:

$$\text{Zn}, \text{ZnSO}_4, \text{CuSO}_4, \text{Cu}$$

nimmt mit Verdünnung der Kupfersulfatlösung ab.

Da ferner die Grösse  $V_1 | V_2 = V_1 | L + L | V_2$  unabhängig von dem Concentrationsgrade der  $\text{ZnSO}_4$ -Lösung, d. h.:

$$V_1 | V_2 = V_1 | L_1 + L_1 | V_2 = V_1 | L_2 + L_2 | V_2 = \dots$$

so folgt, dass die Abnahme  $\Delta_L$  zweier Elemente für zwei bestimmte  $\text{CuSO}_4$ -Lösungen  $V_1$  und  $V_2$  und beliebig concentrirte Lösungen  $L$  die nämliche ist.

Diese Schlüsse werden hinfällig, wenn an Stelle der Salzlösung  $L$  eine Schwefelsäurelösung  $S$  tritt. In diesem Falle ist:

$$D_1 - D_2 = \text{Cu} | V_1 + V_1 | S + S | V_2 + V_2 | \text{Cu} = \Delta_s.$$

Es ist aber:

$$V_1 | S + S | V_2 \text{ nicht gleich } V_1 | V_2$$

sondern:  $V_1 | S + S | V_2 = V_1 | V_2 \pm \alpha$ ,

wobei  $\alpha$  eine Function des Gehaltes an Schwefelsäurehydrat. Somit wird auch die Differenz:

$$\Delta_s = D_1 - D_2$$

für zwei Daniell mit Kupfersulfatlösungen  $V_1$  und  $V_2$  nicht constant, sondern mit dem Concentrationsgrade der Schwefelsäure variiren.

Es kann daher nur eine speciellle Untersuchung der einzelnen Fälle zur richtigen Entscheidung führen, und ich habe in Folgendem die Lösung dieser keineswegs leichten Aufgabe versucht.

#### § 1. Anordnung der Versuche.

Zur Bestimmung electromotorischer Kräfte bediene ich mich seit mehreren Jahren eines Edelmann'schen Cylinderquadrantenelectrometers, eines Instruments, dessen Güte ich durch zahlreiche Messungen hinreichend erprobt habe. Von dem Gebrauche einer Zamboni'schen Säule, wie ich sie früher zum Laden der Aluminiumnadel benutzt hatte, musste ich aber diesmal absehen. Die Versuche fallen in die Wintermonate, zu welcher Zeit trockene Säulen unter äusserst ungünstigen Heizungsverhältnissen unserer Laboratoriums-räume zu leiden haben.

Als Ladungssäule diente vielmehr eine von Hrn. Dr. Edelmann construirte Wasserbatterie aus 180 Volta'schen Elementen: Zink, Brunnenwasser, Kupfer.

Das Wasser befand sich in Reagenscylindern, die von unten durch eine Glasplatte getragen und voneinander durch Reihen von Glasstreifen getrennt gehalten wurden. Die freie Spannung dieser Kette erwies sich bald nach der Zusammensetzung als äusserst constant, sodass die durch ein und dieselbe galvanische Combination erzielte Ablenkung der Nadel wochenlang einen fast gleichen Werth annahm.

Diesem Umstande ist es wohl hauptsächlich zuzuschreiben, dass die einzelnen Messungen, die oft Monate auseinander liegen, meist nur Differenzen von 0,1 bis 0,2 Procent aufweisen, und dass die Grenze der Beobachtungsfehler 0,5 Procent niemals übersteigt.

Als sehr zweckmässig bewährten sich auch die in meiner letzten Arbeit erwähnten Heber, welche die Verbindung zwischen den getrennt stehenden Flüssigkeiten herstellten. Es sind dies rechtwinklig umgebogene, etwa 1 cm weite Glas-

röhren, die in der Mitte eine zum Eingiessen der Flüssigkeit bestimmte, mit Kork verschliessbare Oeffnung, an den Enden aber sehr enge Röhrchen tragen, sodass die Flüssigkeiten zwar in unmittelbare Berührung, aber nur in kleiner Fläche treten können.

Für jede Messung wurden sowohl die Flüssigkeiten als auch die Heber erneuert, ein zwar zeitraubendes Verfahren, aber unerlässlich, wenn die Resultate den Grad obiger Genauigkeit erreichen sollen.

Die in den Elementen verwendeten Substanzen waren als chemisch rein bezogen und von mir noch besonders auf ihre Reinheit geprüft worden. Die Salzlösungen und Verdünnungen des Schwefelsäurehydrats sind durch das spec. Gewicht, theilweise auch durch den Procentgehalt an Salz oder Säure charakterisirt. Da wir in unserem Laboratorium einen Destillationsapparat für Wasser besitzen, so konnte bezüglich der Gewinnung des zum Verdünnen bestimmten destillirten Wassers grosse Sorgfalt beobachtet werden. Von Metallen kommen Zink und Kupfer in Betracht. Das Zink war vollständig frei von Blei, Arsen, Antimon und sonstigen Verunreinigungen und in Stangen gegossen; zum Amalgamiren nahm ich verdünnte Schwefelsäure in dem Concentrationsgrade, in dem eben das Zink gebraucht werden sollte.

Die Kupferdrähte waren gleichfalls chemisch rein und ohne grosse Schwierigkeit sehr gleichmässig zu erlangen.

Die gesammte Aufstellung und Anordnung des Versuchsmaterials war insbesondere durch Anwendung des Beetz'schen<sup>1)</sup> Doppelschlüssels für electriche Leitungen so günstig und bequem, dass das Ablesen der Ruhelage der Electrometernadel, das gleichzeitige Einsenken der Metalle und des Hebers in die bereitstehenden Flüssigkeiten, sowie die Beobachtung der Ablenkung das Werk weniger Secunden war.

Da ich beim Beginne meiner Arbeit keine sicheren Anhaltspunkte über den Einfluss der Temperatur auf die electromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes besass, so

1) Beetz, Ber. d. kgl. b. Akad. d. Wiss. 1880. p. 451. — Wied. Ann. 10. p. 348. 1880.

musste ich dafür Sorge tragen, dass die zu verschiedenen Zeiten angestellten Beobachtungen auf möglichst gleiche Temperaturen bezogen sind.

## § 2. Das Normalelement.

Eine ganz besondere Aufmerksamkeit muss jener Combination geschenkt werden, die als Einheit allen anderen Bestimmungen zu Grunde gelegt wurde. Es ist dies ein Daniell'sches Element in der Zusammensetzung:

Amalgamirtes, chemisch reines Zink in verdünnter Schwefelsäure vom specifischen Gewicht 1,075 bei 18° C., chemisch reines Kupfer in concentrirter Kupfersulfatlösung vom spec. Gewicht 1,190 bis 1,200.

Die an dem nichtabgeleiteten Pole (Zink) auftretende freie Spannung wurde am Electrometer vor, zwischen und nach jeder Versuchreihe bestimmt, wobei jedesmal das Element vollständig neu hergestellt wurde. Ich hätte mir allerdings, wie ich am Abschlusse meiner Arbeit bemerkte, diesen Zeitaufwand theilweise ersparen können; es erwies sich nämlich mein Normalelement auch bei längerer Zusammensetzung als sehr constant.

Ich gebe in nachfolgender Tabelle eine der Versuchsreihen, die ich zur Prüfung des Elementes auf seine Constanz angestellt habe. Es wurde zunächst der Ausschlag für ein eben zusammengesetztes Element (Normalelement bez.) ermittelt. Alsdann blieb der Verbindungsheber mehrere Stunden in den beiden Flüssigkeiten, während die Metalle nicht eintauchten, sondern nur für den Moment der Beobachtung mit denselben in Berührung traten. Endlich liess ich auch die Metalle in den Flüssigkeiten und bestimmte von Zeit zu Zeit die Ablenkung der Nadel, während natürlich auch immer wieder das eigentliche Normalelement auf seinen Effect geprüft wurde.

Charakter des Elements	Zeitdauer der Zusammensetzung	Effect in Doppelmill. (2 m Abstand)	
Normalelement I	frisch zusammengesetzt	63,2	Normal- element 63,2
Normalelement II	" "	63,1	63,1
Normalelement III	" "	63,2	63,2
der Heber immer in den Flüssigkeiten, die Metalle nur wäh- rend der Beobachtung	1 Stunde	63,2	
	2 Stunden	63,1	
	3 Stunden	63,2	63,1
Heber und Metalle in den Flüssigkeiten	4 Stunden	63,2	
	5 Stunden	63,0	
	6 Stunden	63,0	63,0
	20 Stunden	62,7	63,1

Es war also innerhalb sechs Stunden eine wesentliche Aenderung der electromotorischen Kraft nicht eingetreten, und erst nach 20stündiger Zusammensetzung des Elements zeigte sich eine Abnahme von nur 0,6 Proc. Zu anderer Zeit angestellte Beobachtungen lieferten bei 24stündiger Zusammensetzung eine Abnahme von 0,5 bis 0,8 Proc., innerhalb der ersten sechs bis acht Stunden jedoch war niemals eine merkbare Differenz zu verzeichnen.

Dabei beliefen sich die Temperaturschwankungen im Maximum auf 2°.

Es entsteht die Frage, welchen Einfluss grössere Temperaturdifferenzen auf die electromotorische Kraft des Normalelementes haben.

Auch in dieser Richtung stellte ich vielfache Beobachtungen an. Ein Normalelement wurde mehrere Stunden lang in einem Wasserbade auf constanter Temperatur gehalten; dabei zeigte sich keine Aenderung der freien Spannung, obwohl die Combination zusammengesetzt blieb. Hierauf wurden die Flüssigkeiten in den Gläsern und im Heber auf dieselbe höhere Temperatur gebracht und von Zeit zu Zeit, während sich die Flüssigkeiten langsam abkühlten, die Ablenkung der Nadel bestimmt.

Temp. $t^{\circ}$	Ausschlag in Doppelmill.	Normal- element	Temp. $t^{\circ}$	Ausschlag in Doppelmill.	Normal- element
18,3	—	63,8	21,8	63,7	—
18,3	—	63,8	21,0	63,8	—
18,3	—	63,8	20,5	63,8	—
24,0	63,8	—	18,3	63,7	—
23,5	63,8	—	18,3	—	63,8
22,5	63,8	63,8	17,5	—	63,8

Es zeigte sich also innerhalb der  $6\frac{1}{2}^{\circ}$  Temperaturdifferenz keine merkbare Aenderung der freien Spannung.

Diese Eigenschaft zeichnet die beschriebene Combination vortheilhaft vor dem in England vielfach gebrauchten Elemente von Latimer Clark aus, das allerdings eine seltene Constanz, aber auch einen ziemlich hohen Temperaturcoefficienten besitzt. Ich werde übrigens diesen Gegenstand in § 5 noch ausführlicher behandeln und bemerke nur noch an dieser Stelle, dass

1 Latimer Clark bei  $18^{\circ}$  C.

= 1,217 Einh.

1 Element: Zink, conc. Zinksulfat, conc. Kupfersulf., Kupfer = 0,886 Einh.

der von mir gewählten Combination beträgt, sodass die drei Elemente für die Temp.  $t = 18^{\circ}$  C. in dem Verhältnisse stehen:

886 : 1000 : 1217.

§ 3. Ueber die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft des Daniell'schen Elementes von dem Concentrationsgrade der Schwefelsäure.

Aus reinem Schwefelsäurehydrat vom specifischen Gewicht 1,84 und destillirtem Wasser stellte ich eine Anzahl Verdünnungen her, von denen die an Schwefelsäure reicheren durch das specifische Gewicht, die übrigen durch spec. Gewicht und Volumenverhältniss des Wassers zu verdünnten Säuren charakterisirt sind.

Die Beobachtungen beziehen sich auf Lösungen vom spec. Gewicht 1,357 herab bis zu einer Verdünnung, die in einem Liter Wasser einen Tropfen Schwefelsäure vom spec. Gewicht 1,075 enthält. Ich habe bereits erwähnt, dass ich als Amalgamsäure Schwefelsäure, und zwar in dem Concentrationsgrade wählte, der für die betreffenden Messungen selbst angewandt werden sollte. Dies ist natürlich nur bis

zu einer gewissen Grenze möglich; ist die Säure zu schwach, so vermag dieselbe das Zink nicht mehr von der Oxydschicht zu befreien, und es ist die Verwendung eines stärkeren Concentrationsgrades nicht zu umgehen.

Da nun aber das so amalgamirte Zink mit schwachen Säuren in Berührung treten soll, so muss dafür gesorgt werden, dass letztere durch die stets am amalgamirten Zink sich vorfindenden Säurereste nicht in ihrem Charakter eine Aenderung erleiden. Man muss also das Zink vor dem Gebrauche längere Zeit in derjenigen Verdünnung abwaschen, deren Verhalten eben geprüft werden soll.

Aus diesem Grunde ist es geradezu unmöglich, das Verhalten von amalgamirtem Zink in reinem Wasser zu constatiren; auch das sorgfältigste Abwaschen und Abreiben genügt nicht, um die letzten Spuren der Amalgamsäure zu verwischen, und es ist infolge dessen eine Constanz der freien Spannung von vornherein nicht zu erwarten.

Ich habe wohl noch Verdünnungen in das Bereich meiner Untersuchungen gezogen, die noch weit unter der vorhin gegebenen Grenze liegen; ich bemerke aber ausdrücklich, dass die Mischung 1 l Wasser + 1 Tropfen verdünnter Säure vom spec. Gew. 1,075 das Minimum der Verdünnung sein dürfte, für welche noch constante Resultate erwartet werden konnten.

Es soll nun gezeigt werden, wie sich die freie Spannung im Daniell'schen Elemente ändert, wenn bei gleichbleibender Kupfersulfatlösung eine Aenderung in dem Verdünnungsgrade des Schwefelsäurehydrats eintritt. Die sich gleichbleibende  $\text{CuSO}_4$ -Lösung kann dabei entweder in allen Combinationen concentrirt oder in irgend einem bestimmten Grade der Verdünnung angewendet werden. Wir untersuchen zunächst den Einfluss der Concentrationsunterschiede der Säure, wenn eine gesättigte Kupfersulfatlösung das Kupfer umgibt.

Die in den nachfolgenden Tabellen gegebenen einzelnen Beobachtungsergebnisse entstammen meist ganz verschiedenen Zeiten; trotzdem sind dieselben von grosser Uebereinstimmung. Ich füge in der letzten Columnne unter der Bezeich-

nung  
betro

Con

Portl. Nr.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13



nung  $\delta_m$  das Maximum der Beobachtungsdifferenzen für die betreffende Combination bei.

Tabelle I.

Concentrirte Kupfersulfatlösung vom spec. Gewicht  
1,190 bis 1,200.

Temperatur der Flüssigkeiten: 17–19° C.

Fortl. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Electromotorische Kraft Normalelement = 1		$\delta_m$
		Einzelne Beobachtungen	Mittel	
1	$A = 1,357$ bei 17°	0,978 0,978 0,978	0,978	0,0 ‰
2	$A = 1,266$ bei 19°	0,996 0,998 0,996 0,996 0,996 0,996 0,996 0,996	0,996	0,2 „
3	$A = 1,222$ bei 16°	1,003 1,003 1,003 1,002 1,003	1,003	0,1 „
4	$A = 1,186$ bei 16°	1,007 1,007 1,007 1,009 1,007 1,008 1,008 1,008	1,008	0,2 „
5	$A = 1,133$ bei 16°	1,005 1,006 1,005 1,005 1,005 1,005 1,005	1,005	0,1 „
6	$A = 1,075$ bei 18°	Normalelement	1,000	—
7	$A = 1,050$ bei 16°	0,997 0,997 0,997 0,998 0,997	0,997	0,1 „
8	$A = 1,037$ bei 17°	0,992 0,992 0,992 0,991 0,992 0,991 0,990 0,992 0,992	0,992	0,2 „
9	$A = 1,007$ bei 19°	0,981 0,980 0,979 0,975 0,976 0,978 0,976 0,979 0,979 0,979	0,979	0,5 „
10	$A = 1,0051$ bei 16: 750 cem $H_2O$ + 75 cem verd. $H_2SO_4$ v. spec. G. 1,050	0,977 0,977 0,977 0,977 0,977 0,977 0,976 0,978 0,978	0,977	0,2 „
11	$A = 1,0035$ bei 17°: 750 cem $H_2O$ + 50 cem verd. $H_2SO_4$ v. spec. G. 1,050	0,971 0,973 0,973 0,972 0,972 0,972	0,972	0,2 „
12	$A = 1,0011$ bei 16°: 750 cem $H_2O$ + 100 cem verd. $H_2SO_4$ v. spec. G. 1,007	0,965 0,965 0,966 0,966 0,965 0,967 0,967 0,966 0,967 0,967 0,966 0,966 0,967 0,966 0,965 0,965 0,966 0,966	0,966	0,2 „
13	11 $H_2O$ + 20 Tropf. verd. $H_2SO_4$ v. spec. G. 1,250	0,954 0,954 0,954	0,954	0,0 „

Foord. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Electromotorische Kraft Normalelement = 1					$\delta_m$
		Einzelne Beobachtungen				Mittel	
14	1 l H <sub>2</sub> O + 11 Tropfen verd. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> v. spec. G. 1,250	0,952	0,952	0,951	0,951	0,952	0,1 %
15	1 l H <sub>2</sub> O + 6 Tropfen verd. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> v. spec. G. 1,250	0,948	0,947	0,948	0,948	0,948	0,1 „
16	1 l H <sub>2</sub> O + 2 Tropfen verd. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> v. spec. G. 1,250	0,938	0,938	0,938		0,938	0,0 „
17	1 l H <sub>2</sub> O + 1 Tropfen verd. H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> v. spec. G. 1,075	0,920	0,920	0,921		0,920	0,1 „

Aus dieser Tabelle ergibt sich folgendes Resultat.

Die electromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes, in welchem das Kupfer von concentrirter Kupfersulfatlösung umgeben ist, wächst mit dem Gehalte an Schwefelsäurehydrat, jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze; der Maximalwerth wurde beobachtet für einen Concentrationsgrad vom spec. Gewicht 1,186 (nach Gewichtstheilen circa 25 Proc. H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>), während die Anwendung einer Säure vom spec. Gewicht 1,222 (circa 30 Proc.) bereits wieder eine Abnahme der freien Spannung erzielte. Das Maximum liegt also zwischen:

$$\Delta = 1,19 \quad \text{und} \quad \Delta = 1,22,$$

d. h. zwischen C = 25 und 30 Proc.

So lange keine zuverlässigen Messungen über die Potentialdifferenzen Zink|Schwefelsäure und Schwefelsäure|Kupfersulfat und deren Aenderungen mit dem Procentgehalt an Säure vorhanden sind, lässt sich wohl schwerlich entscheiden, wodurch der Zuwachs an freier Spannung bedingt ist. Die diesbezüglichen Angaben sind einander so widersprechend, dass sie unmöglich Anhaltspunkte zur Beantwortung obiger Frage bieten können. Dagegen dürfte die allmählich schwächer werdende Zunahme und der plötzliche Abfall der electromotorischen Kraft für stärkere Säuren eine Erklärung in dem allmählich sich steigenden Auflösen des Zinks und der

damit vermehrten Bildung von Zinksulfat finden, da ja bekanntlich diejenigen Daniell'schen Elemente, in denen das Zink von vornherein mit  $\text{ZnSO}_4$  umgeben ist, eine kleinere electromotorische Kraft als das  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Element aufweisen.

Eine ähnliche Ansicht entwickelt Fromme<sup>1)</sup>, der in seinen Untersuchungen über constante Ketten im Grove'schen Element ein durch die Schwefelsäure bedingtes Maximum der electromotorischen Kraft beobachtet, und zwar an der gleichen Stelle (zwischen 25- und 35 procentiger  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ), wie ich sie für das Daniell'schen Element gefunden.

Auch den Beobachtungsreihen Baumgartner's<sup>2)</sup>:

40 Vol.-Th. $\text{H}_2\text{SO}_4$ + 100 Th. $\text{H}_2\text{O}$	$e = 1,06$
50 „ „ + 100 „ „	$e = 1,06$
80 „ „ + 100 „ „	$e = 1,07$
100 „ „ + 100 „ „	$e = 1,04$

ist zu entnehmen, dass eine stärker concentrirte Säure im Daniell'schen Element einen Abfall der electromotorischen Kraft bedingt.

In den nun folgenden tabellarischen Zusammenstellungen ist die concentrirte Kupfersulfatlösung durch irgend eine Verdünnung dieses Salzes ersetzt, während die verschiedenen Schwefelsäurelösungen den gleichen Procentgehalt wie in Tabelle I besitzen.

Tabelle II.

Verdünnte Kupfersulfatlösung vom spec. Gewicht 1,062 bei 17°.

(10 Gewichtsth.  $\text{CuSO}_4$  + 100 Gewichtsth.  $\text{H}_2\text{O}$ ).

Fortl. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Electromotorische Kraft Normalelement = 1			$\delta_m$
		Einzelne Beobachtungen		Mittel	
1	$\Delta = 1,357$ bei 17°	0,991	0,991	0,991	0,0 %
2	$\Delta = 1,266$ bei 19°	1,008	1,008	1,008	0,0 „
3	$\Delta = 1,222$ bei 16°	1,015	1,015	1,015	0,0 „
4	$\Delta = 1,186$ bei 16°	1,020	1,021	1,020	0,1 „
		1,020		1,020	

1) Fromme, Wied. Ann. 8. p. 342. 1879.

2) Baumgartner, Carl's Rep. 15. p. 209. 1879.

Forth. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Electromotorische Kraft Normalelement = 1				$\delta_m$
		Einzelne Beobachtungen			Mittel	
5	$\Delta = 1,133$ bei $16^\circ$	1,017	1,017	1,016	1,017	0,1 „
6	$\Delta = 1,075$ bei $18^\circ$	1,012	1,012	1,011	1,012	
		1,012	1,011	1,012	1,012	
		1,009	1,011	1,012	1,011	0,3 „
7	$\Delta = 1,050$ bei $16^\circ$	1,005	1,006	1,005	1,006	0,1 „
8	$\Delta = 1,087$ bei $17^\circ$	1,001	1,001	1,001	1,000	
		1,000	1,000	1,000	1,000	0,1 „
9	$\Delta = 1,007$ bei $19^\circ$	0,986	0,988	0,986	0,987	
		0,987			0,987	0,2 „
10	$\Delta = 1,0051$ bei $16^\circ$	0,981	0,981	0,981	0,981	0,0 „
11	$\Delta = 1,0035$ bei $17^\circ$	0,973	0,973		0,973	0,0 „
12	$\Delta = 1,0011$ bei $16^\circ$	0,965	0,965		0,965	0,0 „
13	1 l $H_2O$ + 20 Tropfen (1,250)	0,951	0,951	0,951	0,951	0,0 „
14	1 l $H_2O$ + 11 Tropfen (1,250)		—		—	—
15	1 l $H_2O$ + 6 Tropfen (1,250)	0,944	0,944	0,944	0,944	0,0 „
16	1 l $H_2O$ + 2 Tropfen (1,250)	0,933	0,934	0,934	0,933	
		0,933			0,933	0,1 „
17	1 l $H_2O$ + 1 Tropfen (1,075)		—		—	—

Tabelle III.

Verdünnte Kupfersulfatlösung vom spec. Gewicht  
1,0045 bei  $18^\circ$ .  
(0,6 Gewichtsth.  $CuSO_4$  + 100 Gewichtsth.  $H_2O$ ).

Forth. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Electromotorische Kraft Normalelement = 1				$\delta_m$
		Einzelne Beobachtungen		Mittel		
1	$\Delta = 1,357$ bei $17^\circ$	1,022	1,019	1,019	1,020	0,3 ‰
2	$\Delta = 1,266$ bei $19^\circ$	1,027	1,027	1,027	1,027	0,0 „
3	$\Delta = 1,222$ bei $16^\circ$	1,032	1,033	1,033	1,034	
		1,034			1,033	0,2 „
4	$\Delta = 1,186$ bei $16^\circ$	1,038	1,039	1,039	1,039	
		1,039	1,038	1,038	1,039	
		1,038	1,041	1,041	1,039	0,3 „
5	$\Delta = 1,133$ bei $16^\circ$	1,034	1,033	1,033	1,034	
		1,033	1,031	1,033	1,033	0,3 „

Foord. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Electromotorische Kraft Normalelement = 1		$\delta_m$
		Einzelne Beobachtungen	Mittel	
6	$\Delta = 1,075$ bei $18^\circ$	1,023 1,022 1,022 1,022 1,025 1,024 1,026 1,026 1,025 1,022 1,025 1,024 1,024 1,024 1,024 1,024 1,024	1,024	0,4 ‰
7	$\Delta = 1,050$ bei $16^\circ$	1,020 1,021 1,020	1,020	0,1 ‰
8	$\Delta = 1,037$ bei $17^\circ$	1,015 1,013 1,013 1,013 1,014 1,013 1,014 1,014 1,015	1,014	0,2 ‰
9	$\Delta = 1,007$ bei $19^\circ$	0,999 1,001 1,999 1,000 1,001 1,000 1,000 1,999 0,999 0,999 0,998	0,999	0,3 ‰
10	$\Delta = 1,0051$ bei $16^\circ$	0,989 0,989 0,989 0,989 0,989 0,989	0,989	0,0 ‰
11	$\Delta = 1,0035$ bei $17^\circ$	0,975 0,975 0,975 0,976	0,975	0,1 ‰
12	$\Delta = 1,0011$ bei $16^\circ$	0,966 0,967 0,966 0,966 0,966 0,965 0,965	0,966	0,2 ‰
13	1 l $H_2O$ + 20 Tr. (1,250)	0,944 0,944 0,944	0,944	0,0 ‰
14	1 l $H_2O$ + 11 Tr. (1,250)	0,935 0,935 0,935 0,934 0,934 0,933 0,933 0,931 0,933 0,933	0,934	0,4 ‰
15	1 l $H_2O$ + 6 Tr. (1,250)	0,932 0,932 0,932	0,932	0,0 ‰
16	1 l $H_2O$ + 2 Tr. (1,250)	0,920 0,920 0,920	0,920	0,0 ‰
17	1 l $H_2O$ + 1 Tr. (1,075)	0,897 0,899	0,898	0,2 ‰

Tabelle IV.

Verdünnte Kupfersulfatlösung vom spec. Gewicht  
1,0015 bei  $16^\circ$ .

(0,2 Gewichtsth.  $CuSO_4$  + 100 Gewichtsth.  $H_2O$ .)

Foord. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Electromotorische Kraft Normalelement = 1		$\delta_m$
		Einzelne Beobachtungen	Mittel	
1	$\Delta = 1,357$ bei $17^\circ$	—	—	—
2	$\Delta = 1,266$ bei $19^\circ$	1,037 1,038 1,037 1,037	1,037	0,1 ‰
3	$\Delta = 1,222$ bei $16^\circ$	1,043 1,044 1,044 1,044	1,044	0,1 ‰
4	$\Delta = 1,186$ bei $16^\circ$	1,048 1,048 1,049 1,049	1,049	0,1 ‰
5	$\Delta = 1,133$ bei $16^\circ$	1,042 1,042 1,042 1,041 1,041	1,042	0,1 ‰

Portl. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Electromotorische Kraft Normalelement = 1				$\delta_n$
		Einzelne Beobachtungen			Mittel	
6	$A = 1,075$ bei $18^\circ$	1,033	1,034	1,033	1,033	0,1 %
7	$A = 1,050$ bei $16^\circ$	1,028	1,028	1,029	1,028	0,1 "
8	$A = 1,037$ bei $17^\circ$	1,019	1,020	1,019	1,019	0,1 "
9	$A = 1,007$ bei $19^\circ$	1,004	1,004	1,004	1,005	0,1 "
		1,005			1,004	0,1 "
10	$A = 1,0051$ bei $16^\circ$	0,994	0,994	0,994	0,994	0,0 "
11	$A = 1,0035$ bei $17^\circ$	0,976	0,976	0,976	0,976	0,0 "
12	$A = 1,0011$ bei $18^\circ$	0,965	0,965	0,966	0,965	0,1 "
		0,965			0,965	0,1 "
13	1 l $H_2O$ + 20 Tr. (1,250)	0,938	0,936	0,936	0,937	0,2 "
14	1 l $H_2O$ + 11 Tr. (1,250)	0,931	0,931		0,931	0,0 "
15	1 l $H_2O$ + 6 Tr. (1,250)	0,926	0,926		0,926	0,0 "
16	1 l $H_2O$ + 2 Tr. (1,250)	0,915	0,915	0,915	0,915	0,0 "
17	1 l $H_2O$ + 1 Tr. (1,075)	—	—	—	—	—

Tabelle V.

Charakter der Schwefelsäure S		Concentrationsgrad der Kupfer- sulfatlösungen (Gewichtsth. Salz + 100 Gewichtsth. Wasser)			
		conc.	10 : 100	0,6 : 100	0,2 : 100
		$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$S_1$	$A = 1,357$ bei $17^\circ$	0,978	0,991	1,020	—
$S_2$	$A = 1,266$ bei $19^\circ$	0,996	1,008	1,027	1,037
$S_3$	$A = 1,222$ bei $16^\circ$	1,003	1,015	1,033	1,044
$S_4$	$A = 1,186$ bei $16^\circ$	<b>1,008</b>	<b>1,020</b>	<b>1,039</b>	<b>1,049</b>
$S_5$	$A = 1,133$ bei $16^\circ$	1,005	1,017	1,033	1,042
$S_6$	$A = 1,075$ bei $18^\circ$	<b>1,000</b>	1,011	1,024	1,033
$S_7$	$A = 1,050$ bei $16^\circ$	0,997	1,006	1,020	1,028
$S_8$	$A = 1,037$ bei $17^\circ$	0,992	1,000	1,014	1,019
$S_9$	$A = 1,007$ bei $19^\circ$	0,979	0,987	0,999	1,004
$S_{10}$	$A = 1,0051$ bei $16^\circ$	0,977	0,981	0,989	0,994
$S_{11}$	$A = 1,0035$ bei $17^\circ$	0,972	0,973	0,975	0,976
$S_{12}$	$A = 1,0011$ bei $16^\circ$	<b>0,966</b>	<b>0,965</b>	<b>0,966</b>	<b>0,965</b>
$S_{13}$	1 l $H_2O$ + 20 Tr. S. v. sp. G. 1,250	0,954	0,951	0,944	0,937
$S_{14}$	1 l $H_2O$ + 11 Tr. S. v. sp. G. 1,250	0,952	—	0,934	0,931
$S_{15}$	1 l $H_2O$ + 6 Tr. S. v. sp. G. 1,250	0,948	0,944	0,932	0,926
$S_{16}$	1 l $H_2O$ + 2 Tr. S. v. sp. G. 1,250	<b>0,938</b>	<b>0,933</b>	<b>0,920</b>	<b>0,915</b>
$S_{17}$	1 l $H_2O$ + 1 Tr. S. v. sp. G. 1,075	0,920	—	—	—

Um die in den Tabellen I bis IV niedergelegten Beobachtungen von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus betrachten zu können, stelle ich die als Mittel für die electromotorischen Kräfte gefundenen Resultate in Tabelle V (p. 880) übersichtlich zusammen.

Das Normalelement, dessen electromotorische Kraft = 1 gesetzt ist, enthält Schwefelsäure vom spec. Gewicht 1,075 bei 18° C. und concentrirten Kupfervitriol.

Als untere Grenze der electromotorischen Kraft des Daniell'schen Elementes wähle ich die 16. Horizontalreihe; die in derselben aufgeführten vier Combinationen haben die Säure  $S_{16}$  (1 Liter + 2 Tropfen verdünnte Schwefelsäure vom spec. Gewicht 1,25) gemeinsam, unterscheiden sich aber durch den verschiedenen Procentgehalt ( $V_1, V_2, V_3, V_4$ ) an Kupfersulfat.

Ich bezeichne der Reihe nach die freien Spannungen der genannten vier Elemente mit:

$$D_{16,1} \quad D_{16,2} \quad D_{16,3} \quad D_{16,4},$$

wobei sich also der erstere Index auf die Säure, der andere auf die Kupfersulfatlösung bezieht; dann ist:

$$D_{16,1} = \text{Zn} | S_{16} + S_{16} | V_1 + V_1 | \text{Cu} = 0,938 \text{ D}$$

$$D_{16,2} = \text{Zn} | S_{16} + S_{16} | V_2 + V_2 | \text{Cu} = 0,933 \text{ D}$$

$$D_{16,3} = \text{Zn} | S_{16} + S_{16} | V_3 + V_3 | \text{Cu} = 0,920 \text{ D}$$

$$D_{16,4} = \text{Zn} | S_{16} + S_{16} | V_4 + V_4 | \text{Cu} = 0,915 \text{ D.}$$

Um nun den durch eine Verstärkung der Säure bedingten Zuwachs der electromotorischen Kraft zu erhalten, brauche ich nur obige Werthe  $D_{16,1}, D_{16,2}, D_{16,3}, D_{16,4}$  der Reihe nach von den in derselben Verticalreihe aufgeführten Zahlen zu subtrahiren.

Nehme ich beispielsweise die erste Verticalreihe, dann ist:

$$D_{1,1} - D_{16,1} = 0,978 - 0,938 = 0,040 \text{ D}$$

$$D_{2,1} - D_{16,1} = 0,996 - 0,938 = 0,058 \text{ D}$$

$$D_{15,1} - D_{16,1} = 0,948 - 0,938 = 0,010 \text{ D;}$$

für die zweite Verticalreihe:

$$D_{1,2} - D_{16,2} = 0,991 - 0,933 = 0,058 \text{ D}$$

$$D_{2,2} - D_{16,2} = 1,008 - 0,933 = 0,075 \text{ D}$$

u. s. f.



Auf diese Weise entsteht das nachfolgende Schema, das uns die Zunahme der electromotorischen Kraft in Tausendstel Einheiten veranschaulicht.

Tabelle VI.

Schwefelsäure		Kupfersulfat			
		conc.	10:100	0,6:100	0,2:100
		$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$S_1$	$\Delta = 1,357$	40	58	100	—
$S_2$	$\Delta = 1,266$	58	75	107	122
$S_3$	$\Delta = 1,222$	65	82	113	129
$S_4$	$\Delta = 1,186$	70	87	119	134
$S_5$	$\Delta = 1,133$	67	84	113	127
$S_6$	$\Delta = 1,075$	62	78	104	118
$S_7$	$\Delta = 1,050$	59	73	100	113
$S_8$	$\Delta = 1,037$	54	67	94	104
$S_9$	$\Delta = 1,007$	41	54	79	89
$S_{10}$	$\Delta = 1,0051$	39	48	69	79
$S_{11}$	$\Delta = 1,0035$	34	40	55	61
$S_{12}$	$\Delta = 1,0011$	28	32	46	50
$S_{13}$	20 Tropfen	16	18	24	22
$S_{14}$	11 „	14	—	14	16
$S_{15}$	6 „	10	11	12	11
$S_{16}$	2 „	0	0	0	0

Es zeigt sich somit, dass die aus Tabelle I gefolgerten Schlüsse auch dann noch ihre Gültigkeit haben, wenn an die Stelle einer concentrirten  $\text{CuSO}_4$ -Lösung irgend welche Verdünnung dieses Salzes tritt:

Die electromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes:



nimmt mit dem Procentgehalt der Säure zu; sie erreicht ein Maximum, das bei Anwendung concentrirter oder verdünnter Kupfervitriollösungen an der gleichen Stelle, nämlich für 25 bis 30 procentige Schwefelsäure eintritt; bei weiterem Gehalt an Schwefelsäurehydrat nimmt die freie Spannung wieder ab.

Die Erhöhung der electromotorischen Kraft vollzieht sich jedoch für die verschiedenen Concentrationsgrade des  $\text{CuSO}_4$  nicht in dem gleichen Verhältnisse. Es ist ja:

$$\begin{aligned}
 D_{4,1} - D_{16,1} &= 0,070 \text{ D.} & \text{und } D_{16,1} : D_{4,1} &= 1000 : 1075 \\
 D_{4,3} - D_{16,3} &= 0,087 \text{ D.} & D_{16,3} : D_{4,3} &= 1000 : 1093 \\
 D_{4,3} - D_{16,3} &= 0,119 \text{ D.} & D_{16,3} : D_{4,3} &= 1000 : 1130 \\
 D_{4,4} - D_{16,4} &= 0,134 \text{ D.} & D_{16,4} : D_{4,4} &= 1000 : 1146
 \end{aligned}$$

d. h. der Zuwachs wird um so bedeutender, je verdünnter die  $\text{CuSO}_4$ -Lösung genommen wird, und er ist am grössten, wenn das Kupfer von reinem Wasser umgeben ist. Dies ergibt sich aus nachfolgender Zusammenstellung über die electromotorische Kraft der Combination  $\text{Zn}$ ,  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Cu}$  für verschiedenprocentige  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Lösungen.

Tabelle VII.

$\Delta = 1,075$	$\Delta = 1,050$	$\Delta = 1,037$	$\Delta = 1,007$	$\Delta = 1,0051$	$\Delta = 1,0035$	$\Delta = 1,0011$	$\frac{11 \text{ H}_2\text{O}}{+ 15 \text{ Tropfen}} \text{ H}_2\text{SO}_4 (1,25)$	$\frac{11 \text{ H}_2\text{O}}{+ 11 \text{ Tropfen}}$	$\frac{11 \text{ H}_2\text{O}}{+ 6 \text{ Tropfen}}$	$\frac{11 \text{ H}_2\text{O}}{+ 2 \text{ Tropfen}}$	$\frac{11 \text{ H}_2\text{O}}{+ 1 \text{ Tropfen}} (1,075)$
$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$	—	$S_{14}$	$S_{15}$	$S_{16}$	$S_{17}$
1,076	1,069	1,058	1,039	—	1,019	1,004	0,973	0,956	0,944	0,907	0,874

Bezeichne ich das Element mit der Säure 16 und destillirtem Wasser mit  $D_{16,0}$ , das Element mit  $S_6$  und  $\text{H}_2\text{O}$  mit  $D_{6,0}$ , so berechnet sich das Verhältniss:

$$D_{16,0} : D_{6,0} = 1000 : 1231,$$

während:

$$D_{16,4} : D_{6,4} = 1000 : 1129 \quad D_{16,3} : D_{6,3} = 1000 : 1084$$

$$D_{16,3} : D_{6,3} = 1000 : 1113 \quad D_{16,1} : D_{6,1} = 1000 : 1064.$$

Die Beobachtung der Potentialdifferenz derjenigen Combinationen, in denen das Kupfer von  $\text{H}_2\text{O}$  umgeben ist, hat mit der grössten Vorsicht zu geschehen; sobald nur eine Spur Schwefelsäure mit dem Wasser sich vermischt hat, sinkt sofort die electromotorische Kraft. Ich vermuthe daher, dass die oben gegebenen Zahlen namentlich für die stärkeren Säuren zu klein ausgefallen sind. Die erhebliche Veränderung, die der Zusatz einer Spur  $\text{H}_2\text{SO}_4$  zu destillirtem Wasser hervorruft, constatirt auch Fromme<sup>1)</sup> gelegentlich einer Untersuchung über den Einfluss der Concentration auf die

1) Fromme, Wied. Ann. 12. p. 418 ff. 1881.

electromotorische Kraft des Elementes  $\text{Zn}, \text{H}_2\text{SO}_4, \text{Cu}$ . Fromme bringt einen Zinkcylinder in verdünnte Schwefelsäure, einen Kupferdraht in destillirtes Wasser und verbindet beide Flüssigkeiten durch einen capillar ausgezogenen, ebenfalls mit verdünnter Säure gefüllten Heber. Während nun die Potentialdifferenz dieser Combination, d. h.:

$$\text{Zn} | \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 | \text{H}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} | \text{Cu} = 1,095$$

in der von Fromme gewählten Einheit beträgt, sinkt dieselbe sofort auf 1,016, wenn auch nur die minimalste Menge Säure dem Wasser zugesetzt wird.

§ 4. Ueber die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft des Daniell'schen Elementes von dem Concentrationsgrade der Kupfersulfatlösung.

Ein Blick auf die in Tabelle V gegebene Zusammenstellung sämtlicher Resultate überzeugt uns sofort, dass Veränderungen der Kupfersulfatlösung bei gleichbleibender Schwefelsäure ganz eigenthümliche Verhältnisse hervorrufen.

Die vierte Horizontalreihe enthält die numerischen Werthe der electromotorischen Kräfte in den vier Combinationen:

$$D_{4,1} D_{4,2} D_{4,3} D_{4,4},$$

in welchen die Säure  $S_4$  die gleiche, dagegen der Kupfervitriol verschieden ist.

Da

$$D_{4,1} < D_{4,2} < D_{4,3} < D_{4,4},$$

so ergibt sich für diese Reihe eine Erhöhung der Potentialdifferenz mit Verdünnung der Kupfersulfatlösung; dagegen zeigt die zwölfte Horizontalreihe die Beziehung:

$$D_{12,1} = D_{12,2} = D_{12,3} = D_{12,4},$$

d. h. keine durch Konzentrationsunterschiede im  $\text{CuSO}_4$  bedingte Aenderung, und Reihe 16 eine Abnahme der electromotorischen Kraft mit Verdünnung des Kupfersulfats:

$$D_{16,1} > D_{16,2} > D_{16,3} > D_{16,4}.$$

Die nachfolgende Tabelle soll uns nun einen Gesamtüberblick über den Einfluss des Concentrationsgrades der  $\text{CuSO}_4$ -Lösung verschaffen, zu welchem Zwecke das erste Glied jeder Horizontalreihe von den darauffolgenden Zahlen der Reihe nach subtrahirt wurde:

$$D_{1,2} - D_{1,1} = 0,991 - 0,978 = 0,013 \text{ D}$$

$$D_{1,3} - D_{1,1} = 1,020 - 0,978 = 0,042 \text{ D}$$

$$D_{1,4} - D_{1,1} = \dots \dots \dots$$

Tabelle VIII.

Schwefelsäure		Kupfersulfat			
		conc.	10:100	0,6:100	0,2:100
		$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$S_1$	$A = 1,357$	0	+13	+42	—
$S_2$	$A = 1,266$	0	+12	+31	+41
$S_3$	$A = 1,222$	0	+12	+30	+41
$S_4$	$A = 1,186$	0	+12	+31	+41
$S_5$	$A = 1,133$	0	+12	+28	+37
$S_6$	$A = 1,075$	0	+11	+24	+33
$S_7$	$A = 1,050$	0	+9	+23	+31
$S_8$	$A = 1,037$	0	+8	+22	+27
$S_9$	$A = 1,007$	0	+8	+20	+25
$S_{10}$	$A = 1,0051$	0	+4	+12	+17
$S_{11}$	$A = 1,0035$	0	+1	+2	+4
$S_{12}$	$A = 1,0011$	0	— 1	± 0	— 1
$S_{13}$	20 Tropfen	0	— 3	—10	—17
$S_{14}$	11 „	0	—	—18	—21
$S_{15}$	6 „	0	— 4	—16	—22
$S_{16}$	2 „	0	— 5	—18	—23

Während also bei Anwendung stärkerer Säuren die freie Spannung im Daniell'schen Element um so grösser wird, je verdünnter die Kupfersulfatlösung, zeigt sich bei Anwendung sehr schwacher Säuren eine Abnahme der electromotorischen Kraft mit zunehmender Verdünnung. Der Uebergang von dem einen in das andere Extrem erfolgt allmählich; d. h. der Zuwachs wird nach und nach kleiner und geht durch Null hindurch ins Negative.

Dabei erfolgt der Durchgang durch den Nullpunkt für die vier  $\text{CuSO}_4$ -Lösungen fast gleichzeitig; mit andern Worten: es existirt ein Konzentrationsgrad der Säure, für welchen ein Daniell'sches Element die gleiche Spannung liefert, mag der  $\text{CuSO}_4$  concentrirt oder irgendwie verdünnt sein.

Die betreffende Schwefelsäurelösung hat das spezifische Gewicht 1,0011 bei 16° und ist zusammengesetzt aus 750 ccm H<sub>2</sub>O und 100 ccm verdünnter H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> vom spec. Gewicht 1,007.

Unter dieser Grenze nimmt die electromotorische Kraft mit zunehmender Verdünnung um so rascher ab, je mehr sich die Schwefelsäure dem Wasser nähert.

Dieses charakteristische Verhalten lässt vermuthen, dass bei der Aenderung der electromotorischen Kraft, bedingt durch die Concentration der Flüssigkeiten, nicht nur die Grenze zwischen den Metallen und den Flüssigkeiten, sondern auch die an der Berührungsstelle der beiden Flüssigkeiten selbst auftretenden Potentialdifferenzen von wesentlichem Einflusse seien.

Es lässt sich dies übrigens direct beweisen, indem man die in den Tabellen VI und VIII gebildeten Zahlen durch die entsprechenden Spannungsdifferenzen ausdrückt. Wir entnehmen z. B. der vierten Horizontalreihe in Tabelle VI:

$$D_{4,1} - D_{16,1} = \{Zn | S_4 + S_4 | V_1 + V_1 | Cu\} \\ - \{Zn | S_{16} + S_{16} | V_1 + V_1 | Cu\}, \text{ d. i. :}$$

$$D_{4,1} - D_{16,1} = Zn | S_4 + S_4 | V_1 + V_1 | S_{16} + S_{16} | Zn = 0,070 \text{ D} \\ D_{4,2} - D_{16,2} = Zn | S_4 + S_4 | V_2 + V_2 | S_{16} + S_{16} | Zn = 0,087 \text{ D} \\ D_{4,3} - D_{16,3} = Zn | S_4 + S_4 | V_3 + V_3 | S_{16} + S_{16} | Zn = 0,119 \text{ D} \\ D_{4,4} - D_{16,4} = Zn | S_4 + S_4 | V_4 + V_4 | S_{16} + S_{16} | Zn = 0,134 \text{ D}.$$

Da in diesen vier Combinationen je die ersten und letzten Glieder identisch sind, so folgt, dass die Summe der beiden mittleren Glieder, resp.

$$S_4 | V_1 + V_1 | S_{16} \\ S_4 | V_2 + V_2 | S_{16} \\ S_4 | V_3 + V_3 | S_{16} \\ S_4 | V_4 + V_4 | S_{16}$$

eine mit dem Concentrationsgrade des Kupfervitriols variable Grösse ist, etwa:

$$S_4 | V + V | S_{16} = S_4 | S_{16} \pm f(V),$$

und allgemein:

$$(I) \quad S_a | V + V | S_b = S_a | S_b \pm f(V).$$

Ferner ist mit Bezugnahme auf die 4., 12. und 16. Horizontalreihe der Tabelle VIII:

$$\begin{aligned}
 D_{4,4} - D_{4,1} &= \text{Cu} | V_1 + V_1 | S_4 + S_4 | V_4 + V_4 | \text{Cu} = +0,041 \text{ D} \\
 D_{12,4} - D_{12,1} &= \text{Cu} | V_1 + V_1 | S_{12} + S_{12} | V_4 + V_4 | \text{Cu} = -0,001 \text{ D} \\
 D_{16,4} - D_{16,1} &= \text{Cu} | V_1 + V_1 | S_{16} + S_{16} | V_4 + V_4 | \text{Cu} = -0,023 \text{ D},
 \end{aligned}$$

d. h.:

$$(II) \quad V_a | S + S | V_b = V_a | V_b \pm \varphi(S).$$

Ist aber die Differenz:

$$S_a | V - S_b | V$$

abhängig von V und:

$$V_a | S - V_b | S$$

abhängig von S, so sind auch die einzelnen Glieder:

$$S_a | V, S_b | V, V_a | S, V_b | S$$

und allgemein die Potentialdifferenz  $\text{H}_2\text{SO}_4 | \text{CuSO}_4$  von dem Gehalte an Säurehydrat oder Kupfersulfat wesentlich beeinflusst, sodass die Gesamtänderungen der electromotorischen Kraft des Daniell'schen Elementes mit der Concentration gerade durch die zwischen den Flüssigkeiten sich abspielenden Prozesse ein eigenthümliches Gepräge erhalten.

Bevor ich dazu schreite, aus diesen Thatsachen weitere Schlüsse zu ziehen, muss ich noch eine Reihe von Versuchen erwähnen, die für die Beurtheilung der eigenthümlichen Verhältnisse von Interesse sind.

Dieselben beziehen sich auf die Veränderungen der electromotorischen Kräfte des Daniell'schen Elementes mit der Zeit.

Die Erzielung gleichmässiger Resultate bei Anwendung stärkerer Säuren und verdünnter Kupfervitriollösungen ist an die Bedingung geknüpft, dass die Ermittlung des Effectes möglichst rasch vollzogen werde, und dass für jede neue Messung sowohl die Flüssigkeiten als die Heber erneuert werden. Während nämlich diejenigen Combinationen, die eine gesättigte  $\text{CuSO}_4$ -Lösung enthalten, eine grosse Constanz auch bei längerer Zusammensetzung besitzen, nimmt die freie Spannung in jenen Elementen, die mit verdünnten Salzlösungen bereitet sind, mit der Zeit ziemlich rasch ab.

Ich kann natürlich unmöglich alle in dieser Richtung gemachten Beobachtungen hier aufzählen, sondern entnehme meinen Versuchsreihen nur etliche charakteristische Beispiele; bezüglich des Normalelements verweise ich übrigens auf § 2.

I. Element.  $S_3$  (1,222) und  $V_1$  (concentrirt).

	frisch zusammengesetzt: 1,002				1,003 D.
nach	20	60	90	120	150 Minuten:
	1,003	1,000	1,000	1,002	1,002 D.
	frisch zusammengesetzt: 1,002 D.				

NB. Wegen des hohen Concentrationsgrades der Säure wurde das Zink jedesmal erneuert.

II. Element.  $S_{12}$  (1,0011) und  $V_1$  (concentrirt).

	frisch bereitet: 0,966				0,966 D.
nach	5	10	20	40	60 70 80 200 Minuten:
	0,968	0,966	0,966	0,968	0,968 0,966 0,966 0,966 D.

III. Element.  $S_3$  (1,222) und  $V_3$  (0,6:100).

	frisch zusammengesetzt: 1,034		1,034 D.
nach	5	30	80 Minuten:
	1,033	1,017	1,017 D.

IV. Element.  $S_6$  (1,075) und  $V_3$  (0,6:100).

	Normal: 1,024 D.							
nach	10	20	30	90	100	150	160	200 Minuten:
	1,021	1,021	1,019	1,018	1,014	1,009	1,009	1,003 D.

Die Abnahme infolge längerer Zusammensetzung der Elemente erfolgt um so schneller, je verdünnter die Kupfersulfatlösung ist, und je stärker die Säure genommen wird.

Dieser Umstand in Verbindung mit den früher angeführten Thatsachen, dass erstens die durch Concentration der Säure veranlasste Zunahme der freien Spannung um so beträchtlicher wird, je verdünnter die Kupfersulfatlösung; dass zweitens bei Anwendung nicht allzuschwacher Säuren ein Element mit verdünntem Kupfervitriol, resp. Wasser einen grösseren Effect liefert, als ein Element mit gesättigter Salzlösung, legt den Gedanken nahe, es möchte die Potentialdifferenz  $H_2SO_4 | CuSO_4$  selbst um so bedeutender sich gestalten, je grösser die Verdünnung von  $CuSO_4$ , und je reicher die Säure an Schwefelsäurehydrat ist. Nun scheinen ferner an der Grenze zwischen  $H_2SO_4$  und verdünnten  $CuSO_4$ -Lösungen sich Wärmeprocesses zu vollziehen, die in ihrem Verlaufe Analogien mit der eben vermutheten Veränderung der Potentialdifferenz  $H_2SO_4 | CuSO_4$  darbieten müssten.



Wenn eine Säurelösung durch Zusatz von Wasser noch weitere Verdünnung erfährt, so wird hierdurch eine bestimmte Wärmemenge frei.

Trifft mit demselben Concentrationsgrade der Schwefelsäure eine verdünnte Kupfersulfatlösung zusammen, so ist es höchst wahrscheinlich, dass letztere einen Theil ihres Wassers zur weiteren Verdünnung der Säure abgibt. Ist nun auch zunächst mit der Abgabe von Wasser ein Wärmeverbrauch verbunden, so wird in zweiter Linie durch Verdünnung der ursprünglich gegebenen Säure Wärme erzeugt und jedenfalls eine Menge, die an Grösse das gebundene Wärmequantum überwiegt. Die so frei werdende Wärme muss aber um so beträchtlicher ausfallen, je mehr die  $\text{CuSO}_4$ -Lösung sich dem Charakter reinen Wassers nähert, und je concentrirter die Schwefelsäure genommen wird.

Sucht man in diesen Wärmetönungen die Ursache der Erhöhung der freien Spannung, dann finden die im Daniell'schen Elemente beobachteten Erscheinungen eine einfache Erklärung.

Bleiben  $\text{H}_2\text{SO}_4$  und  $\text{CuSO}_4$  längere Zeit in Berührung, so ist ein Uebergang von Säure in Kupfersulfat unvermeidlich. Dadurch erhält aber die verdünnte Kupfersulfatlösung einen sauren Charakter, und die ursprünglich gegebene Wärmequelle wird wesentlich beeinträchtigt; d. h. es müsste nach obiger Hypothese die electromotorische Kraft sofort abnehmen, was auch mit der Erfahrung übereinstimmt. Die minimalste Spur Schwefelsäure, die dem das Kupfer umgebenden Wasser oder verdünntem  $\text{CuSO}_4$  zugesetzt wird, bewirkt ein rasches Sinken der freien Spannung.

Wie weit diese Schlüsse Berechtigung haben, lässt sich allerdings erst dann entscheiden, wenn die zwischen Schwefelsäure und Kupfersulfat statthabenden Wärmetönungen calorimetrisch ermittelt sind; doch kann man sich leicht durch den Versuch überzeugen, dass beim Vermischen von Schwefelsäure und verdünntem Kupfervitriol Temperaturerhöhungen eintreten.

§ 5. Ueber das Verhältniss des Normalelementes zu anderen praktischen Einheiten.

I. Das meinen Messungen als Einheit zu Grunde gelegte Normalelement besitzt eine wesentlich höhere electromotorische Kraft als der gewöhnliche Daniell'sche Becher, in welchem die beiden Flüssigkeiten durch ein Thondia-phragma geschieden sind. Diese Verschiedenheit kann zunächst in der Anwendung eines Thoncylinders, aber auch in einer verschiedenartigen Beschaffenheit der käuflichen Metalle gegenüber den von mir gebrauchten chemisch reinen Stangen-zink und Kupferdraht begründet sein. Um beides scharf auseinander zu halten, stellte ich zunächst eine Reihe von Elementen her, in denen ich die Metalle meines Normal-elementes beibehielt; anstatt aber die beiden Lösungen (con-centrirter Kupfervitriol und verdünnte Schwefelsäure vom spec. Gewicht 1,075) durch einen Heber zu verbinden, trennte ich beide durch Thoncylinder, die Tage lang in destillirtem Wasser gelegen und mehrere Stunden vor dem Gebrauche in verdünnte Säure gestellt worden waren. Nach jeder Beobachtung wurden die Metalle aus den Flüssigkeiten entfernt, um eine Aenderung der electromotorischen Kraft durch Oberflächenänderung der Metalle vollständig auszuschliessen. Während nun in den ersten Minuten die Ablenkungen der Electrometernadel genau den Werth des Normalelementes ergaben, zeigte sich, nachdem das Diaphragma zwanzig Minuten in den Flüssigkeiten geblieben war, bereits eine Ab-nahme der electromotorischen Kraft von 1 Proc., nach zwei Stunden von 1,5 Proc., nach neun Stunden von 3 Proc.

In der gleichen Zeit ändert das Normalelement unter sonst gleichen Umständen sich nicht merklich, sodass also die geringere freie Spannung im gewöhnlichen Daniell'schen Element theilweise aus dem Gebrauche des porösen Cylinders sich erklärt.

In einer zweiten Versuchsreihe wurde der chemisch reine Kupferdraht durch einen Cylinder von Kupferblech ersetzt; dieser Austausch bewirkte keine wesentliche Aen-derung. Als aber endlich auch noch das chemisch reine

Zink gegen einen sorgfältig amalgamirten Zinkcylinder ausgetauscht wurde, zeigte der Ausschlag am Electrometer einen plötzlichen Abfall der electromotorischen Kraft. Wenn man dann umgekehrt den Zinkcylinder durch chemisch reines Zink ersetzte, stieg die freie Spannung sofort wieder um mehrere Procente. Hiermit ist der Beweis geliefert, dass das gewöhnliche amalgamirte Zink, wie es zu Zinkcylindern verarbeitet wird, in verdünnter Schwefelsäure sich anders verhält, als das chemisch reine, sei es nun, dass Verunreinigungen des ersteren durch Blei, Arsen, Antimon u. dgl. hieran die Schuld tragen, oder dass das Amalgamiren einer grösseren Fläche nicht so vollständig gelingt, als bei einem etwa 4 mm dicken Stabe.

Als Maximalbetrag für die electromotorische Kraft des gewöhnlichen Daniell'schen Elementes erhielt ich den Werth 0,955 in Einheiten meines Normalelementes, in den meisten Fällen jedoch nur Zahlen von 0,94 bis 0,92.

II. In England wird als praktische Einheit vielfach das Element von Latimer Clark angewandt, eine Combination von äusserst constanter electromotorischer Kraft. Dasselbe besitzt als positiven Pol reines Quecksilber, bedeckt mit einem durch Kochen von Quecksilbersulfat ( $\text{Hg}_2\text{SO}_4$ ) in einer concentrirten Zinksulfatlösung erhaltenen Teige, und als negativen Pol chemisch reines amalgamirtes Zink, welches in den Brei taucht. Der Contact mit dem Quecksilber wird durch einen Platindraht hergestellt.

Die electromotorische Kraft dieses Elementes, gemessen bei  $15,5^\circ \text{C}$ . beträgt nach Clark:

$$1,457 \text{ Volts,}$$

d. h. in absolutem Maasse:

$$1,457 \times 10^9 \text{ c}^{\frac{1}{2}} \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-2}.$$

Kennt man also das Verhältniss des von mir benutzten Normalelementes zu dem Elemente von Clark, so lassen sich die früher gegebenen Zahlenreihen in Volts umrechnen und damit auf absolutes Maass zurückführen.

Zu diesem Zwecke stellte ich mehrere Elemente genau

nach der Originalabhandlung<sup>1)</sup> zusammen und verglich dieselben:

1) mit der von mir als „Normalelement“ bezeichneten Combination:

amalg. chem. reines Zink in verd.  $H_2SO_4$  v. spec. Gew. 1,075,  
chem. reines Kupfer in conc.  $CuSO_4$  v. spec. Gew. 1,197.

2) mit einem Daniell'schen Elemente:

amalg. chem. reines Zink in conc.  $ZnSO_4$  v. spec. Gew. 1,463,  
chem. reines Kupfer in conc.  $CuSO_4$  v. spec. Gew. 1,197.

### Ablenkungen der Electrometernadel in Doppel- millimetern.

Latimer Clark		Normal- element		Daniell mit $ZnSO_4$		Latimer Clark		Normal- element		Daniell mit $ZnSO_4$		
I.	$t$		$t$		$t$	II.	$t$		$t$		$t$	
77,7	18°	63,8	18°	56,5	18°	77,6	17,7°	63,8	17,9°	—	—	
77,7	18			56,6	18	77,6	18					
77,7	18			56,6	18	77,7	18,3					
77,6	18,3			56,6	18	77,7	18,4					
77,6	18,3					77,7	18,3					
77,6	18,3					77,6	18,3					
77,6	18,3	63,8	18	56,5	17,9	77,6	18,3	63,8	18	56,5	18°	
77,6	18,3			56,6	18	77,6	18,3			56,5	18	
77,6	18,3			56,6	18	III.	77,7			18	56,5	18
77,7	18			56,5	18		77,7			18		
77,7	18						77,6			18		
77,7	17,8						77,7			18		
II.	77,6	63,9	18	56,6	18	77,6	18	63,9	18	—	—	
	77,6			17,8	56,5	18,1	77,7					18
	77,6			17,7	56,5	18	77,7					18
	77,6			17,7								
						Mittel	77,65	18°	63,83	18°	56,53	18°

Die electromotorischen Kräfte der drei Elemente stehen somit in dem Verhältnisse:

$$1217:1000:886$$

für die Temperatur  $t = 18^\circ C$ .

Während nun das Normalelement innerhalb geringer Temperaturschwankungen sich nicht ändert, zeigt das Clark'sche Element einen ziemlich hohen Temperaturcoefficienten. Derselbe bezieht sich

1) Latimer Clark, Proc. Lond. Roy. Soc. 20. p. 444 bis 448.

nach Clark als:

0,06 Proc. Abnahme pro Centigrad Temp.-Erhöhung,  
nach Helmholtz<sup>1)</sup> als:

0,08 Proc. Abnahme pro Centigrad Temp.-Erhöhung,  
nach eigenen Beobachtungen als:

0,08 Proc. Abnahme pro Centigrad Temp.-Erhöhung.

Es ist somit die electromotorische Kraft des L. Cl.-Elementes gemessen bei 15,5° C. in Einheiten des Normalelementes = 1,219.

Hieraus berechnet sich dann die freie Spannung des Normalelementes:

$$\text{zu } 1,195 \text{ Volts} = 1,195 \cdot 10^8 c^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} s^{-2},$$

die des Elementes mit conc. Zink- und Kupfersulfatlösung:

$$\text{zu } 1,059 \text{ Volts} = 1,059 \cdot 10^8 c^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} s^{-2}.$$

Für die gewöhnlichen Daniell'schen Elemente, welche Schwefelsäure und Kupfersulfat in gleicher Concentration wie das Normalelement, aber durch einen Thoncylinder geschieden, enthalten, in denen ferner die beiden Pole aus Cylindern von Zink und Kupferblech gebildet sind, erhält man auf Grund der vorhin gegebenen Zahlen im Maximum:

$$1,14 \text{ Volts}$$

in den meisten Fällen nur:

$$1,13 \text{ bis } 1,10 \text{ Volts und darunter.}$$

III. In der Einleitung zu dieser Abhandlung habe ich auf die durch Concentrationsunterschiede bedingte Aenderung der freien Spannung in dem mit Zinksulfat construirten Daniell'schen Elemente hingewiesen. Zur Bestätigung der dort gegebenen Auseinandersetzungen führe ich die folgenden Versuchsreihen an. (Siehe Tabelle p. 894).

$$D_1 = 0,886 \quad D = 1,059 \text{ Volts.}$$

$$D_2 = 0,865 \quad D = 1,034 \text{ Volts.}$$

$$D'_1 = 0,982 \quad D = 1,114 \text{ Volts.}$$

$$D'_2 = 0,910 \quad D = 1,087 \text{ Volts.}$$

$$D_1 - D_2 = 0,021 \text{ D.}$$

$$D'_1 - D'_2 = 0,022 \text{ D.}$$

1) Helmholtz, Thermodynamik chemischer Vorgänge. Sitzber. d. kgl. Acad. der Wiss. zu Berlin 1882.

Electromotorische Kraft der Combination Zn, ZnSO<sub>4</sub>,  
CuSO<sub>4</sub>, Cu in Einheiten des Normalelementes.

$t = 18^\circ$ .

Concentrirte Zinksulfatlösung L $d = 1,463$ bei $19,7^\circ$		Verdünnte Zinksulfatlösung L' 0,5 Gwth. Zinksulf. + 100 Gwth. H <sub>2</sub> O	
Kupfersulfatlös. $V_1 = \text{conc.}$	Kupfersulfatlös. $V_2 (d = 1,004)$	Kupfersulfatlös. $V_1 = \text{conc.}$	Verd. Kupfersulfatlös. $V_2 (d = 1,004)$
$D_1$	$D_2$	$D_1$	$D_2$
0,886	0,865	0,932	0,910
0,886	0,865	0,931	0,909
0,885	0,865	0,932	0,910
0,885	0,865	0,932	0,910
0,885	—	0,931	0,910
0,885	—	0,931	—
0,884	—	0,932	—
0,886	—	—	—
0,886	—	—	—
0,886	—	—	—
0,886	—	—	—
0,886	—	—	—
0,886	—	—	—
0,885	—	—	—
0,885	—	—	—
0,885	—	—	—
0,886	—	—	—
0,885	—	—	—
0,886	—	—	—
Mittel: 0,886 D.	0,865 D.	0,932 D.	0,910 D.

Enthalten zwei Elemente  $D_1$  und  $D_2$  die gleiche ZnSO<sub>4</sub>-Lösung L, aber zwei verschiedenprocentige Kupfersulfatlösungen  $V_1$  und  $V_2$ , so besitzt das Element  $D_2$  mit der Verdünnung  $V_2$  eine geringere electromotorische Kraft als die Combination  $D_1$  mit der concentrirten Lösung  $V_1$ ; die Differenz:

$$D_1 - D_2 = \text{Cu} | V_2 + V_2 | L + L | V_1 + V_1 | \text{Cu}$$

bleibt dabei constant, welches auch der Concentrationsgrad der Zinksulfatlösung L sei, und zwar ist:

$$D_1 - D_2 = D'_1 - D'_2 = \dots = \text{Cu} | V_2 + V_2 | V_1 + V_1 | \text{Cu},$$

$$\text{d. h. } V_2 | L + L | V_1 = V_2 | L' + L' | V_1 = \dots = V_2 | V_1.$$

Ist z. B.:

$V_1$  eine conc. Kupfervitriollösung,

$V_2$  eine Verdünnung vom spec. Gewicht 1,004,

so ist:

$$D_1 - D_2 = 0,022 \text{ D.},$$

welches auch der Concentrationsgrad des Zinkvitriols in den beiden Elementen  $D_1$  und  $D_2$  sei. Diese Zahl stimmt zur Gönüge mit dem in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> direct und indirect gefundenen Werthe:

$$\text{Cu} \left| \begin{array}{c} V_2 + V_2 \\ 1,0038 \end{array} \right| \begin{array}{c} V_1 + V_1 \\ \text{conc.} \end{array} \text{Cu} = 0,023 \text{ D.}$$

überein.

### Anhang.

Die electromotorische Kraft des Elementes Zink, Schwefelsäure, Kupfer.

Ich benutzte die mannigfachen Verdünnungsgrade des Schwefelsäurehydrats, die mir für meine Untersuchungen über das Daniell'sche Element zu Gebote standen, gleichzeitig dazu, den Einfluss der Concentration auf die freie Spannung in der Combination:

amalgamirtes Zink, Schwefelsäure, Kupfer

zu studiren. Mittlerweile hatte ich auch noch eine zweite Sorte chemisch reinen Kupferdrahtes aus der Hamburger Affinerie erhalten, der, in einer  $\text{CuSO}_4$ -Lösung, d. h. zur Construction des Daniell'schen Elementes verwendet, durchweg die gleichen Resultate wie das früher erwähnte reine Kupfer liefert, dagegen in mehreren Concentrationsgraden der Schwefelsäure jenem gegenüber ein abweichendes Verhalten zeigt. Ich stelle die Beobachtungsergebnisse in folgender Tabelle übersichtlich zusammen und kennzeichne die mit dem Hamburger Kupfer erhaltenen Zahlen durch ein †.

Ord. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Einzelne Beobachtungen Normalelement = 1	Mittel
1	$A = 1,266$	0,906 0,906 0,906	0,906
2	$A = 1,252$	0,907 0,906 0,905 0,907 0,906 0,905	0,906
3	$A = 1,186$	0,907 0,907 0,905 0,904 0,904 0,907† 0,906†	0,906
4	$A = 1,133$	0,914 0,911 0,911 0,912 0,914 0,912 0,933† 0,932† 0,930† 0,933†	0,912 0,933†

1) Kittler, Sitzungsab. d. kgl. b. Acad. d. Wiss. p. 9. 1882. Wied. Ann. 15. p. 396. 1882.



Fortl. Nr.	Charakter der Schwefelsäure	Einzelne Beobachtungen Normalelement = 1	Mittel
5	$\Delta = 1,075$	0,913 0,913 0,913 0,912 0,914 0,915 0,912 0,912 0,913 0,915 0,916 0,915 0,913 0,913 0,913 0,913 0,928 0,930 0,930 0,933+ 0,930+ 0,932+ 0,924 0,924 0,924 0,923 0,923 0,924 0,924+ 0,923+	0,914 0,929 0,932+ 0,924
6	$\Delta = 1,050$	0,922 0,022 0,921+ 0,920+ 0,921	0,921
7	$\Delta = 1,037$	0,921	0,921
8	$\Delta = 1,007$	0,917 0,920 0,919 0,919 0,917 0,919 0,919+ 0,919+ 0,919 0,919 0,915 0,915 0,913	0,919 0,914
9	$\Delta = 1,0035$	0,908 0,907 0,906 0,907 0,906 0,907	0,907
10	$\Delta = 1,0025$	0,898 0,899 0,899 0,898 0,898 0,897 0,897	0,898
11	$\Delta = 1,0011$	0,883 0,884 0,884 0,883 0,885 0,884	0,884
12	1 l $H_2O$ + 20 Tr. $H_2SO_4$ vom spec. Gew. 1,25	0,871 0,870 0,871 0,869 0,871	0,870
13	1 l $H_2O$ + 10 Tr. $H_2SO_4$ vom spec. Gew. 1,25	0,863 0,863 0,865 0,865	0,864
14	1 l $H_2O$ + 5 Tr. $H_2SO_4$ vom spec. Gew. 1,25	0,863 0,862 0,861 0,861 0,863 0,862	0,862
15	1 l $H_2O$ + 1 Tr. $H_2SO_4$ vom spec. Gew. 1,075	0,856 0,856 0,856 0,853 0,854 0,854 0,851 0,854 0,853 0,851 0,854	0,854
16	Aeusserste Verdünnung		

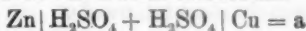
Die electromotorische Kraft amalg. Zink, Wasser, Kupfer konnte nicht ermittelt werden; auch das sorgfältigste Abwaschen des Zinks in destillirtem Wasser genügt nicht, die letzten Spuren der Amalgamsäure zu vertilgen, sodass jede neue Messung einen andern Werth ergibt.

Wie man aus obiger Zusammenstellung unmittelbar erkennt, wächst die electromotorische Kraft mit dem Gehalt an Säurehydrat anfangs rasch, dann langsamer und erreicht einen Maximalwerth, der im allgemeinen früher eintritt, als im Daniell'schen Elemente. Ferner variirt das Maximum mit verschiedenen Kupfersorten, ein Umstand, der auf eine

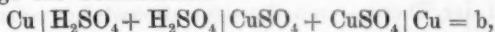
Oberflächenänderung des Kupfers in stärkeren Säuregraden schliessen lässt.

Ist das spec. Gewicht der Schwefelsäure = 1,050, so liefern beiderlei Kupfer die Potentialdifferenz 0,924 D.; für  $A = 1,075$  zeigt das ältere Kupfer das Maximum = 0,929 D., meist jedoch nur 0,914 D., während die Hamburger Sorte erst in der Säure vom spec. Gewicht 1,133 den Maximalbetrag = 0,933 D. liefert. Stärkere Säuren lassen in dem Verhalten der verschiedenen Kupferdrähte einen Unterschied nicht mehr erkennen.

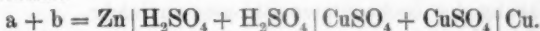
Addirt man zu der Potentialdifferenz:



diejenige der Combination:



so resultirt die electromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes:



Für Schwefelsäure vom spec. Gewicht 1,075 und Kupfersulfat vom spec. Gewicht 1,004 ist:

$$a = 0,914 \text{ D.}, \quad b = 0,109 \text{ D.}^1)$$

Somit  $a + b = 1,023 \text{ D.}$ , während die directe Beobachtung 1,024 D. ergibt.

München, im Juli 1882.

## VII. Ueber Amalgamationsströme; von H. Haga.

(Hierzu Taf. VI Fig. 4—5 a—g).

Der Moser'sche Versuch<sup>2)</sup>, wobei die Amalgamation von Zink einen galvanischen Strom hervorzurufen im Stande ist, veranlasste Obach<sup>3)</sup> zur Untersuchung, ob nicht etwa durch die der Amalgamation begleitenden Temperaturänderung bedingte Thermoströme mit im Spiele wären. Rasch nacheinander wurden die Ausschläge des Amalgamations-

1) Diese Zahl entstammt einer früheren Arbeit: Sitzungsab. der kgl. Acad. d. Wiss. p. 14. 1882. Wied. Ann. 15. p. 399. 1882.

2) Dove's Repertorium 2. p. 117—118. 1838. Wied. Galvan. 1. p. 790. 1872.

3) Obach, Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 300. 1876.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVII.

stromes und des durch ein dem Zink ganz nahe liegendes Thermoelement fließenden Stromes bestimmt, und sehr deutlich zeigte die graphische Darstellung der Versuche ein gleichzeitiges Wachsen und Abnehmen beider Ströme. Bei den anderen untersuchten Metallen Zinn und Cadmium wurde dasselbe gefunden.

Doch machte neulich in diesen Annalen Exner die Bemerkung, dass trotzdem ein wirklicher Amalgamationsstrom bestehen könnte, und in der That vermögen die Obacht-schen Versuche nicht zu entscheiden, ob nicht entweder die Summe oder die Differenz eines Amalgamationsstromes und des Thermostromes beobachtet wurde.

Meiner Meinung nach genügt es nicht, blos den gleichen Verlauf der Thermo- und Amalgamationsströme anzuzeigen, sondern durch quantitative Versuche zu entscheiden, ob die bei der Amalgamation entstehende Temperaturdifferenz zur Erklärung des beobachteten Stromes ausreicht.

Die Vorrichtung, welche sich am zweckmässigsten erwies, war folgende. An einer Röhre *A* (125 mm lang, 17 mm Durchmesser) war ein 400 mm langes Capillarrohr angeschmolzen, welches rechtwinklig umgebogen wurde (Fig. 4) und mittelst eines gut schliessenden Kautschukstopfens in einem Tubulus einer Röhre *B* endete, welche sich in einem grossen Gefäss *C* befand. In *A*, das Capillarrohr, und *B* wurde reines Quecksilber gegossen. Ein chemisch reiner Zinkstab 7,5 mm Durchmesser, an dem ein Zinkdraht angelöthet war, wurde in *A* hineingetaucht; die Löthstelle wurde sorgfältig lackirt. Um den Stab wurde eine aus Platin- und Eisendraht bestehende Thermonadel spiralförmig gewunden. In *B* war ein Eisendraht dessen anderes Ende, wie die der drei aus *A* kommenden Drähte, an Kupferdrähte angelöthet waren; die Löthstellen waren ganz nahe bei *B* zusammengebunden, wurden also durch das Wasser in *C* auf gleicher Temperatur gehalten.

Die Kupferdrähte führten zu zwei Commutatoren und zum Thomson'schen Galvanometer mit kleinem Widerstande; auch war ein Stöpselrheostat eingeschaltet. Es konnten also beobachtet werden die durch den Strom in der

Thermonadel und die durch den Amalgamationsstrom verursachte Ablenkung; durch Einschaltung bekannter Widerstände konnte der Widerstand leicht gefunden werden. Das Wasser in *C* wurde ein wenig erwärmt und einige Zeit mittelst Circulation auf constanter Temperatur erhalten, die etwa  $5^{\circ}$  höher war als in *A*, damit ohne grosse Fehler Proportionalität angenommen werden konnte zwischen der Intensität des Thermostromes und der Temperaturdifferenz; durch Einschaltung bekannter Widerstände wurde der Ausschlag innerhalb der Scala gehalten. So konnte berechnet werden: die Grösse des Ausschlages bei  $1^{\circ}$  C. Temperaturdifferenz und einem Widerstande von 1 S.-E. in der Thermonadel und auch in der Kette: Zink — Zinkamalgam — Quecksilber — Eisen. Die Temperaturänderung bei der Amalgamation konnte also mittelst der Thermonadel gefunden werden und verglichen mit der aus dem Amalgamationsstrom abgeleiteten. Falls kein wahrer Amalgamationsstrom besteht, müssen die beiden Bestimmungen einander gleich sein.

Vor dem Anfang der Versuche wurde immer so lange gewartet, bis alles dieselbe Temperatur angenommen hatte; die Ausschläge waren anfangs sehr klein, nahmen aber rasch zu, sodass genaue Messungen unmöglich waren, erst nach einiger Zeit wurde dieses möglich, wenn nämlich das flüssige Amalgam stieg, und dadurch oben die Amalgamation geringer wurde (am Ende des Versuchs waren die Stäbe immer conisch); die Wärme drang von aussen allmählich durch, und es entstand ein Wendepunkt, wenn gleichviel Wärme von aussen zugeführt wurde, wie zu der Amalgamation nöthig war. In der Nähe dieses Wendepunktes wurden die Versuche genommen. Immer wurden drei Ablesungen bei verschiedenen Ständen der Commutatoren gemacht, und abwechselnd wurde der Strom in der Thermonadel und der Amalgamationsstrom beobachtet. Als Beispiel theile ich folgenden Versuch mit; die Zahlen sind doppelte Ausschläge in Scalentheilen (mm):

Amalgamationsstrom:	127,5	149,7	163,0	167,2	166,4	160,4
Strom in der Thermonadel:	161,0	179,7	190,3	192,2	189,2	

Widerstand der Kette: Zn — Hg — Fe 1,2 S.-E.

„ „ Thermonadel: 2,95 S.-E.

57\*

In der Kette gab  $1^{\circ}\text{C.}$  bei 1 S.-E. einen doppelten Ausschlag von 127,6 Scalentheilen. In der Thermonadel gab  $1^{\circ}\text{C.}$  bei 1 S.-E. einen doppelten Ausschlag von 342,4 Scalentheilen.

Hieraus berechnet man die

	Temperaturdifferenz					
aus dem Amalgamationsstrom:	1,19°	1,41	1,53	1,57	1,665	1,51
Thermostrom:		1,38	1,55	1,64	1,69	1,63

Graphisch (Fig. 5<sub>a</sub>) sieht man die Uebereinstimmung besser; in derselben Weise habe ich die anderen Versuche dargestellt. Die aus dem Amalgamationsstrom berechneten Temperaturänderungen sind mit (\*), die aus dem Thermostrome abgeleiteten mit (⊙) angedeutet. Eine Ordinate von der Länge von 0,5 cm entspricht  $0,1^{\circ}\text{C.}$  über die unten stehende Temperaturänderung.

Die Unterschiede zwischen den Curven rühren zum grössten Theile von der nicht sehr genauen Bestimmung der thermoelectrischen Constante her: ein kleiner Fehler in der Temperatur hat ja schon merklichen Einfluss, und dass es Beobachtungsfehler sind, zeigt sich dadurch deutlich, dass bisweilen die Temperaturänderung mittelst der Thermonadel, bisweilen die aus dem Amalgamationsstrom bestimmte, die grössere ist.

Folgender Umstand ist die Ursache der Unterschiede in den absoluten Werthen der Temperaturänderungen bei der Amalgamation: Ein neuer Zinkstab, auch wenn er mit Glasscherben von der äusseren Schicht befreit war, amalgamirte viel schwerer, als wenn er nach einmaligem Gebrauch wieder in reines Quecksilber eingetaucht wurde.

Die übrigen von Obach untersuchten Combinationen stimmen so sehr mit der Kette Zn — Hg überein, dass, sie in ähnlicher Weise zu prüfen, mir überflüssig schien, und ebenfalls die von Ayrton und Perry<sup>1)</sup> angegebene Combination (Mg—Hg—Pt) nach den Versuchen Goossens.<sup>2)</sup>

Die Gründe, weshalb diese Kette sich ganz anders wie Zn—Hg—Pt verhalten sollte, sind, mir wenigstens, nicht sehr klar; nimmt man reines Zink, so verschwindet der Einfluss

1) Ayrton u. Perry, Proc. Lond. Roy. Soc. 27. p. 221. 1878.

2) Goossens, Wied. Ann. 16. p. 551. 1882.

der Beimischungen, die bei Ayrton und Perry eine so grosse Rolle spielen.

Ich glaube deshalb behaupten zu können, dass die Ströme, welche man beim Eintauchen von Metallen in Quecksilber beobachtet, nur die durch die bei der Amalgamation stattfindenden Temperaturänderungen bedingten Thermoströme sind.

Physik. Cabinet d. Polytechnic. Delft, Juli 1882.

### VIII. *Erklärung der electrischen Schatten in freier Luft; von P. Riess.*

Diese Schatten sind vielfach beobachtet, aber, so viel ich weiss, noch nicht erklärt worden. Eine einfache Erklärung der Entstehung der Schatten und ihrer Eigenthümlichkeiten lässt sich aus dem Satze herleiten, den ich in diesen Annalen 15. p. 336 aufgestellt habe. Dieser Satz lautet: Eine electrisirte Fläche leuchtet in freier Luft nur an den Stellen, die von einem entgegengesetzt electrischen Luftstrome getroffen werden. — An den Stellen also, wo dieser Luftstrom entladen worden (durch einen in ihn gestellten Körper, den Zwischenkörper, wenn er leitend ist) leuchtet die Fläche nicht, es entsteht auf ihr der Schatten, dessen Form von der des Zwischenkörpers und von der entladenen Luftmenge bestimmt wird. Ist der Luftstrom nicht entladen, sondern nur abgelenkt durch einen nichtleitenden Zwischenkörper, so entsteht kein Schatten, weil der abgelenkte Strom durch Abstossung von dem stehn gebliebenen Theile des Stromes in seine frühere Richtung zurückgebracht ist. Diese Abstossung wird, wie folgt, augenfällig gemacht. Bei schwach wirkender Maschine wirft ein schmaler nichtleitender Zwischenkörper einen Schatten, der bei stärker wirkender Maschine verschwindet. Die ungenügende electrische Dichtigkeit des Luftstroms und damit die Abstossung seines abgelenkten Theiles ist hier ver-

grössert und dadurch fähig gemacht worden, den Luftstrom völlig in seine frühere Richtung zu bringen. Die Schattenlosigkeit verlangt, dass der Zwischenkörper nur schmal sei, damit die abgelenkte Luftmenge kleiner sei als die stehen gebliebene.

Der Umstand, dass ein leitender Streifen als Zwischenkörper fast denselben Schatten wirft, er mag seine Kante oder seine Fläche dem Luftstrome zukehren<sup>1)</sup>, lehrt, dass in beiden Fällen eine fast gleiche Luftmenge entladen worden, und Dies zeigt, dass von einem electrischen Luftstrome ein desto grösserer Theil entladen wird, je kleiner der Winkel ist, mit dem er auf die Fläche des Zwischenkörpers auffällt. Bei der dem Luftstrome zugekehrten Kante kommt eine kleinere Menge Luft mit den Flächen des Zwischenkörpers in Berührung, als bei zugekehrter Fläche, wird aber viel vollständiger entladen, weil ihr Auffallswinkel sehr klein ist.

Diese Abhängigkeit der Entladung von dem Auffallswinkel erklärt auch die seltsame Anschwellung des Schattens an den beiden Enden eines leitenden Streifens<sup>2)</sup>, dessen Mitte von dem kegelförmigen electrischen Luftstrome normal getroffen wird. An den Enden fällt der Luftstrom unter einem kleinern Winkel auf und wird daher vollständiger entladen, als an jeder der Mitte näheren Stelle.

Diese Anschwellung gibt den Grund, weshalb ein Schlitz, der mit durchweg gleicher Breite in eine Cartonscheibe geschnitten ist, wenn man ihn in den electrischen Luftstrom stellt, auf der leuchtenden Fläche mit verdünnten Enden erscheint.<sup>3)</sup>

Die gegebene Erklärung bezieht sich auf electrische Schatten in Luft von gewöhnlicher Dichte. Wollte man electrische Schatten in stark verdünnter Luft herstellen, so bleibt zu berücksichtigen, dass darin eine positiv electrische, von einem negativ electrischen Luftstrome bestrichene Fläche dunkel bleibt, und nur eine negative Fläche leuchtet, die ein positiver Luftstrom bestreicht.<sup>4)</sup> Die von Hittorf ent-

1) Holtz, Gött. Nachr. p. 551. 1880.

2) l. c. p. 610. (Figur).

3) l. c. p. 617. (Figur).

4) Riess, Pogg. Ann. 91. p. 292. 1854.



deckten<sup>1)</sup> in äusserst verdünnter Luft auf einer durch electrischen Einfluss fluorescirenden Glaswand dargestellten Schatten stehn für jetzt mit jenen Schatten in dünner Luft nur in losem Zusammenhange, da sie nur durch Einfluss von negativer Electricität erhalten werden, und bei ihnen das verschiedene Verhalten der leitenden und isolirenden Zwischenkörper noch nicht geprüft ist.

### IX. *Ueber die materiellen Theile im electrischen Funken; von Friedrich Wächter.*

(Aus dem 85. Bd. d. Sitzungsber. der Acad. d. Wiss. zu Wien, II. Abth. vom 2. März 1882 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

In zwei früheren Abhandlungen<sup>2)</sup> haben Hr. Prof. Reitlinger und der Verfasser vorliegender Schrift Beweise dafür beigebracht, dass jene glühenden Electrodenheilchen, welche den electrischen Funken bilden, ausschliesslich nur durch den Austritt der positiven Electricität von den Electroden losgerissen und fortgeführt werden. Andererseits ist jedoch durch die Versuche von Plücker, Gassiot, Hittorf, J. Puluj u. a. bekannt, dass unter gewissen Umständen ausschliesslich an der negativen Electrode ein Losreissen und Fortführen von Electrodenheilchen stattfindet. Es entsteht daher die Frage, in welcher Weise diese beiden Beobachtungen in Einklang miteinander zu bringen sind, resp. welche Unterschiede zwischen der electropositiven und electronegativen Losreissung von Electrodenheilchen bestehen?

Um zur Beantwortung dieser Frage zu gelangen, habe ich die Fortführung von Electrodenmaterie durch positive und negative Electricität einem vergleichenden Studium unterzogen, dessen Resultate im Nachfolgenden dargelegt werden sollen.

1) Hittorf, Pogg. Ann. 136. p. 8. 1869.

2) Reitlinger u. Wächter, Wien. Ber. 82. p. 180. 1880 und 83. p. 677. 1881.

§. 1. Zunächst sei vorausgeschickt, dass nur die Fortführung von Electrodentheilchen durch die discontinuirliche Funkenentladung einer gewöhnlichen Reibungselektromaschine, einer Influenzmaschine, Leydener Flasche oder Batterie, oder der secundären Spirale eines Inductionsapparates in Betracht gezogen ist, nicht aber die Fortführung von Electrodentheilchen im Voltabogen oder beim Oeffnungsfunken einer galvanischen Batterie oder einer dynamoelectrischen Maschine.

Die Thatsache, dass der Voltabogen durch die von der positiven Electrode losgerissenen Theilchen erzeugt wird, ist allgemein bekannt. Nicht das Gleiche gilt jedoch von der Fortführung der Electrodentheilchen durch statische Electricität. Alle mir bekannten Hand- und Lehrbücher der Physik gehen von der Anschauung aus, dass der electrische Funke in gleicher Weise durch beide Electricitätsarten hervorgebracht werde. So wird in Gehler's physikalischem Wörterbuch<sup>1)</sup> gesagt:

„Soviel ist indess als Thatsache entschieden, dass im eigentlichen electrischen Funken stets die Thätigkeit beiderlei Electricitäten concurrirt, wodurch derselbe sich von den blossen Feuerbüscheln und dem leckenden electrischen Lichte unterscheidet, bei denen man allerdings bis auf einen gewissen Grad bloss eine einseitige Thätigkeit einer einzelnen Electricität annehmen kann.“

Ebenso bezeichnet P. Riess<sup>2)</sup> die Richtung des Stromes, in Bezug auf die Losreissung von Electrodentheilchen, als unwesentlich. Es heisst daselbst:

„Wenn ein electrischer Strom, gleichgiltig von welcher Richtung, aus einer vollkommen reinen Metallmasse in Luft übertritt und darin intermittirt, so beginnt die Intermittenz schon im Metalle selbst. Der intermittirende Strom erhitzt, zerreisst, zerschmelzt das Metall, wie er es in einem dünnen Drahte thut, den er durchströmt.“

1) Gehler, Artikel „Funke, electrischer“ und „Electricität, Theorie derselben.

2) P. Riess, Abhandlungen zu der Lehre von der Reibungselekticität. Berlin 1867. p. 274.

In derselben Abhandlung theilt jedoch Riess die Erscheinung mit, dass bei häufig wiederholten Entladungen einer Leydener Flasche oder eines Inductoriums zwischen den Kugeln eines Funkenmikrometers zwar beide Kugeln desselben Lossreissungsspuren in Form kleiner Grübchen erkennen lassen, dass jedoch an der positiven Electrode diese Grübchen viel tiefer sind, als an der negativen Electrode. In den oben citirten Abhandlungen haben nun Hr. Prof. Reitlinger und ich gezeigt, dass diese Erscheinung durch alternirende Entladung bewirkt wird, und man bei einseitiger Entladung die Lossreissungsspuren nur an der positiven Electrode wahrnimmt, dass somit nur die positive Electricität den electrischen Funken erzeugt.

Zugleich wiesen wir nach, dass es hierfür eine untere Druckgrenze gibt (in atmosphärischer Luft bei ca. 10 mm Quecksilberhöhe), während es uns nicht möglich war, eine obere Druckgrenze zu finden, obwohl wir unsere Versuche bis zu sechs und acht Atmosphären ausdehnten.

Zum Nachweise dafür, dass in dem angegebenen Druckintervalle nur jene Lossreissung der Electrodentheilchen in Betracht kommt und wahrnehmbar ist, welche durch den Austritt der positiven Electricität aus Metall in Luft oder einen anderen sogenannten Isolator bewirkt wird, dienen drei verschiedene Erscheinungen: 1. Das Hervorbringen von Lossreissungsspuren auf den Electroden in Form der erwähnten kleinen Gruben, welche bei grösserer Zahl den von uns als „centrale Aufreissungsscheibe“ bezeichneten Theil der Priestley'schen Ringfiguren bilden. 2. Das Auffangen der losgerissenen Electrodentheilchen auf einer unterstehenden Platte, wobei man „Aufstreuungsringe“ erhält, wenn die auffangende Platte aus Metall besteht, und Lichtenberg'sche positive oder „Strahlenfiguren“, wenn die auffangende Platte ein Isolator ist; 3. Das Ablenken der Electrodentheilchen durch einen kräftigen Magnet.

Diese Wirkungen des Funkens, welche wir in unseren eingangs citirten beiden Abhandlungen beschrieben haben, können, mit Ausnahme der Lichtenberg'schen Figuren, nur mittelst stärkerer Leydener Batterien oder Inductions-

apparaten grösster Art, deutlich wahrnehmbar hervorgebracht werden. Der Funke der Reibungselectrisirmaschine und Influenzmaschine ohne Condensator, sowie von kleineren und mittleren Inductionsapparaten ist hierfür zu schwach.

Eine weitere Erscheinung, welche mittelst der Reibungselectrisirmaschine erhalten werden kann, und die ebenfalls dafür spricht, dass der electrische Funke nur von der positiven Seite ausgehe, wurde von Van Marum<sup>1)</sup> mitgetheilt. Derselbe fand nämlich bei Versuchen mit seiner grossen Electrisirmaschine, dass in dem Falle, wenn zwischen einem negativ electrisirten und einem mit dem Erdboden in Verbindung stehenden, also im natürlichen Zustande sich befindenden Leiter ein Funke überspringt, die aus letzterem ausfahrenden Strahlen und Feuerbüschel ihre Richtung stets nach dem negativen Leiter hin haben. Ebenso beobachtete er beim Ueberspringen des Funkens zwischen einem positiv electrisirten und einem negativen oder mit der Erde verbundenen Leiter die Aeste des Funkens von dem positiven Leiter ausgehend. Van Marum folgerte hieraus, dass der electrische Funke ausschliesslich durch den Austritt der positiven Electricität hervorgebracht werde.

Bequemer als mit der Reibungselectrisirmaschine lassen sich solche verästelte Funken mit einem Inductionsapparate beobachten. Bringt man zwei Metallspitzen in eine etwas grössere Entfernung als jene, bei welcher noch ein continuirlicher Funkenstrom übergeht, so bemerkt man im Dunkeln an der positiven Electrode astförmige Funken, deren Stamm auf der positiven Electrode aufsitzt, während die negative Electrode diese Erscheinung niemals zeigt. Noch deutlicher lässt sich dies in verdünnter Luft (700 bis etwa 50 mm Druck) wahrnehmen.

Eine weitere Erscheinung, welche ebenfalls für die einseitige Richtung des electrischen Funkens spricht, und die

1) Van Marum, Schweigg. Journ. 29. p. 475. 1800. Uebrigens scheint nach einer Anmerkung in Gilbert's Ann. 8. p. 333. 1806 dieselbe Erscheinung schon früher von Deimann und Troostwyck beobachtet worden zu sein.

meines Wissens zuerst von P. Riess<sup>1)</sup> mitgetheilt wurde, ist folgende: Lässt man zwischen einer Metallspitze und einer Metallplatte den Funkenstrom eines Inductionsapparates überspringen, so geht in dem Falle, wo die Metallplatte die positive, die Metallspitze die negative Electrode bildet, der Funke stets unveränderlich von einem und demselben, genau unter der Spitze befindlichen Punkte der Platte aus, ist hingegen die Platte negativ, die Spitze positiv, so trifft jede einzelne Funkenentladung auf eine andere Stelle der Platte auf, und der Funkenstrom ist infolge dessen in beständiger sehr rascher Bewegung begriffen. Im ersteren Falle bildet der Funkenstrom eine unbewegliche gerade Linie, im letzteren Falle sich hin und her bewegendende Curven, welche durch ihre rasche Aufeinanderfolge den Eindruck einer glockenförmigen Entladung machen.

Ohne auf eine Erklärung dieser Erscheinung einzugehen, scheint mir dieselbe jedenfalls ein Beleg dafür zu sein, dass der electriche Funke, oder was dasselbe ausdrückt, die Losreissung der Electrodentheilchen eine bestimmte Richtung habe, somit nicht von beiden Electroden ausgehe, sondern nur von einer derselben.

Die Fortführung von Electrodentheilchen durch negative Electricität wurde zuerst von Plücker<sup>2)</sup> beobachtet. Derselbe sagt: „Das Metall der Electroden (in Geissler'schen Röhren), namentlich der negativen, wird zu dem Glase der Röhre übergeführt. Es ist dies sogar bei Platinelectroden der Fall.“

Gassiot<sup>3)</sup> untersuchte diese Erscheinung genauer und constatirte, dass es nicht „namentlich“, sondern ausschliesslich die negative Electrode sei, von welcher durch die Entladung in sehr verdünnten Gasen Electrodentheilchen fortgeführt werden. Er wandte vierzehn verschiedene Metalle als Electroden an und fand, dass Aluminium- und Eisenelectroden einen fast unmerklich geringen Beschlag an der Glas-

1) P. Riess, Abhandl. zu der Lehre von der Reibungselectricität, p. 284.

2) Plücker, Pogg. Ann. 103. p. 88. 151. 1858.

3) Gassiot, Rep. of Brit. Assoc. 161. p. 38.

wand absetzen, während Platin, Silber, Kupfer und andere Metalle in verhältnissmässig kurzer Zeit eine Fortführung von Theilchen erkennen lassen.

Die allgemeine Aufmerksamkeit auf die durch negative Electricität bewirkte Verflüchtigung der Electroden wurde durch die Publicationen von W. Crookes<sup>1)</sup> hingelenkt. Derselbe bezeichnete die von der Kathode fortgeschleuderten Theilchen bekanntlich als „strahlende Materie“ oder „vierten Aggregatzustand“.

Nähere Untersuchungen über die Bewegungsrichtung und die Entfernungen, bis zu welchen die von der Kathode losgerissenen Theilchen bei verschiedener Dichte der umgebenden Gase geführt werden, wurden von W. Hittorf<sup>2)</sup> und Puluj<sup>3)</sup> gemacht, von deren Arbeiten noch im Nachstehenden gesprochen wird. In Bezug auf die Abhängigkeit der Fortführung der Kathodentheilchen von der Dichte des Gases, in welchem die Entladung stattfindet, gibt J. Puluj als grössten Druck, bei welchem er die sogenannte Electrodennmaterie beobachtet hat, 1,46 mm Quecksilberhöhe an.

Ich war nun zunächst bestrebt, zu eruiren, ob die Fortführung von Electrodentheilchen durch den Austritt der negativen Electricität an bestimmte Grade der Luftverdünnung gebunden sei, und an welche?

§ 2. Die Losreissung von Electrodentheilchen durch positive Electricität beobachteten Hr. Prof. Reitlinger und ich innerhalb eines Luftdruckes von 4500 bis 10 mm; für die Losreissung durch negative Electricität gibt J. Puluj die Druckintervalle von 1,46 bis 0,005 mm an. Hiernach könnte man zu der Vermuthung geführt werden, dass bei einem Luftdrucke, der zwischen 10 und 1,46 mm liegt, gleichsam ein Umkehrungspunkt sein müsse, bei welchem die Disaggregationswirkung von der Anode zur Kathode übergehe. Dies ist jedoch nicht der Fall.

1) William Crookes, Strahlende Materie oder der vierte Aggregatzustand. Deutsch von Dr. H. Gretscher. Leipzig 1879.

2) Hittorf, Pogg. Ann. 136. p. 1 und 197. 1869.

3) Puluj, Wien. Ber. 81. II. Abth. p. 864. 1880.

Es muss hier darauf hingewiesen werden, dass zur Erkennung der Fortführung von Electrodentheilchen durch negative Electricität nur zwei Erscheinungen dienen: das Hervorbringen des Metallanfluges an der Glaswand und die Fluorescenz des Glases. Der Metallanflug tritt hierbei meiner Erfahrung gemäss niemals ein, ohne dass vorher Fluorescenz sichtbar gewesen wäre. Bei dem gleichen Verdünnungsgrade der Luft wird aber das Auftreten dieser beiden Erscheinungen noch durch drei andere Umstände sehr wesentlich beeinflusst, nämlich erstens durch die Entfernung der Electrode von der Glaswand, zweitens durch die mehr oder weniger alternirende Entladung des Inductionsapparates, drittens durch die Intensität des Funkenstromes.

Je geringer die Entfernung zwischen der negativen Electrode und der Glaswand ist, bei einem um so höheren Luftdrucke kann man Fluorescenz und Metallanflug erhalten. Indem ich immer engere Glasröhren zur Evacuation anwandte, beobachtete ich stets bei höherem Drucke die Fortführung der Electrodentheilchen. Dies lässt nachstehende kleine Tabelle erkennen. Hierbei bezeichnet  $d$  die Distanz zwischen der drahtförmigen Electrode und der Glaswand, und  $p$  den Druck, bei welchem Fluorescenz und Metallanflug sichtbar wurden. Die Electroden bestanden hierbei aus einem Platindraht von 40 mm Länge und 0,3 mm Dicke.

$d =$	15	10	6	3,4	2,7	2	0,9	0,6
$p =$	0,04	0,2	1	5	6	8	15	30

Man ersieht hieraus, dass der Metallanflug bei 15 mm Entfernung der Electrode von der Glaswand erst bei einer Verdünnung von 0,04 mm auftritt, während derselbe bei 0,6 mm Entfernung schon bei 30 mm, also einem 750mal grösserem Drucke erscheint. Bei noch engeren Röhren konnte ich weder Fluorescenz, noch Metallanflug wahrnehmen und möchte diesen Umstand hauptsächlich der starken Erwärmung der Glaswand zuschreiben, welche stets an jenen Stellen eintritt, wo das Glimmlicht bis an die Glasfläche reicht.

In ähnlicher Weise macht sich der Einfluss der alter-



nirenden Entladung geltend. Verbindet man nämlich die drahtförmigen Electroden einer evacuirten Glasröhre direct mit den beiden Polen eines Inductionsapparates, so muss man die eingeschlossene Luft auf eine erheblich geringere Dichte bringen, um Fluorescenz und Metallanflug zu erhalten, als wenn man gleichzeitig noch mit Hülfe eines Funkenmikrometers eine Luftstrecke einschaltet. Um hierbei das Maximum der Fluorescenz zu erreichen, genügt es nicht, dass überhaupt noch eine Luftstrecke eingeschaltet wird, sondern dieselbe muss auch eine bestimmte Länge haben, welche je nach der Schlagweite des Funkens und der Grösse des Apparates zwischen 1 und 50 mm variirt. Zur Erläuterung hierfür führe ich folgenden Versuch an. In einer 40 mm weiten Glasröhre wurde der negativen scheibenförmigen Platinelectrode eine mit Kreidepulver bestrichene Glimmerplatte in einer Entfernung von 75 mm gegenübergestellt. Wurde nun die Luft in der Glasröhre bis auf 0,17 mm Druck ausgepumpt, so konnte man bei einer Schlagweite des Inductionsfunkens von 31 mm ohne Einschaltung einer Luftstrecke noch keine Fluorescenz des Kreidepulvers wahrnehmen. Wurde aber nun mit dem Funkenmikrometer eine Luftstrecke eingeschaltet, so fing bei einer Länge derselben von 10 mm die Fluorescenz an, sichtbar zu werden; bei einer Länge der Luftstrecke von 14 mm war sie sehr deutlich, und bei etwa 16 mm trat das Maximum der Helligkeit ein. In gleicher Weise wie auf die Fluorescenz wirkt das Einschalten einer Luftstrecke von bestimmter Länge auch auf die Fortführung von Kathodentheilchen befördernd ein, wie ich mich durch zahlreiche Versuche überzeugt habe.

In den Lehrbüchern der Physik wird gewöhnlich angeführt, dass nur der Oeffnungsstrom des Inductionsapparates eine merkliche Schlagweite besitzt, und dass die Einschaltung einer noch so kleinen Luftstrecke genüge, um das Uebergehen des Schliessungsstromes vollständig zu verhindern. Diese Anschauung widerspricht aber den von Hrn. Prof. Reitlinger und mir gefundenen Thatsachen. Bei Erzeugung Priestley'scher Ringfiguren beobachteten wir selbst bei Einschaltung einer 30 bis 40 mm langen Strecke nicht

verdünnter Luft gleichzeitig an beiden Electroden Sauerstoff- und Wasserstoffabscheidung, resp. Oxydation und Reduction der Oberfläche von polirten Metallkugeln oder Platten. Ebenso kann man in verdünnter Luft gleichzeitig an beiden Electroden Büschel- und Glimmlicht wahrnehmen, wenngleich in dem Schliessungskreise noch eine Strecke Luft von gewöhnlicher Dichte sich befindet. Auch die oben mitgetheilte Erscheinung, dass die Fluorescenz und der Metallanflug erst bei Einschaltung einer Luftstrecke von bestimmter Länge ihr Maximum erreichen, scheint mir ein weiterer Beweis dafür zu sein, dass beide Ströme durch Luft von gewöhnlicher Dichte übergehen.

Wenn in den Schliessungskreis eines Inductionsapparates, der eine Schlagweite von etwa 170 mm besitzt, gleichzeitig ein Galvanometer, ein Voltameter mit Wollaston'schen Spitzen und eine Luftstrecke eingeschaltet sind, so wird die Ablenkung am Galvanometer und die Wasserersetzung im Voltameter am grössten, wenn die eingeschaltete Luftstrecke ca. 10 mm beträgt. Verkleinert oder vergrößert man die Luftstrecke, so nehmen Ablenkung und Wasserersetzung ab. Dieser Umstand ist sehr leicht erklärlich, wenn man in Betracht zieht, dass auch der Schliessungsstrom in Luft von gewöhnlicher Dichte eine merkliche Schlagweite erreicht. Einerseits wird nämlich der Schliessungsstrom durch das Einsetzen einer grösseren Luftstrecke immer mehr und mehr zurückgedrängt, seine paralisirende Wirkung auf den Oeffnungsstrom daher vermindert, und der letztere nimmt an Stärke zu. Andererseits wird aber der Widerstand des gesamten Stromkreises durch das Einschalten einer Luftstrecke vermehrt und der Oeffnungsstrom dadurch geschwächt, jedoch in geringerem Maasse als der Schliessungsstrom. Es muss daher einen gewissen Mittelwerth für die Grösse der Luftstrecke geben, bei welchem die Intensität des Oeffnungsstromes ein Maximum erreicht.<sup>1)</sup>

Nicht nur die relativ grössere Intensität des Oeffnungs-

1) Man vergleiche hiermit die Anschauung von Koosen, Pogg. Ann. 107. p. 193. 1859. — Wüllner, Physik 4. p. 953. 1875.

stromes gegenüber dem Schliessungsstrom, sondern auch eine absolut grössere Intensität bringt eine stärkere Fortführung von Electrodenheilchen hervor. Bei gleichem Abstände der Electroden von der Glaswand kann man daher mittelst intensiverer Funken die Fluorescenz und den Metallanflug bei grösserer Dichte der Luft erzeugen, als mittelst schwächeren Funken. Indem ich in einer 1,2 mm weiten Glasröhre einen sehr kräftigen Funken (17 mm Schlagweite) übergehen liess, konnte ich so bei einem Quecksilberdrucke von 63 mm Fluorescenz und Metallanflug hervorrufen. Um die sogenannte strahlende Electrodenmaterie wahrzunehmen, ist es somit nicht nöthig, Verdünnungsgrade von 0,00076 mm anzuwenden, wie W. Crookes angibt, sondern man kann diese Erscheinung auch schon bei 63 mm, also einem etwa 80000-mal höherem Drucke beobachten.

§ 3. Die Dichte der Luft wirkt auf die Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen auch noch in anderer Weise ein. Während nämlich die Quantität der in gleichen Zeiten und unter sonst gleichen Umständen durch den Austritt der positiven Electricität losgerissenen Electrodenheilchen mit geringer werdendem Luftdrucke ebenfalls geringer wird, nimmt die Quantität der in gleichen Zeiten fortgeführten Kathodentheilchen mit dem abnehmenden Luftdrucke zu. Der Nachweis hierfür kann zwar nicht direct durch Wägung der Electroden, d. h. durch die Gewichtsabnahme derselben bestimmt werden, weil die fortgeführten Quantitäten Electrodenmaterie in den meisten Fällen viel zu klein sind, um selbst an einer empfindlichen Wage einen Ausschlag hervorzubringen; dagegen lässt sich dies auf andere Weise erkennen. Versucht man einen „Aufstreuungsring“<sup>1)</sup> mittelst einer kleinen Palladium- oder Antimonkugel in einer Wasserstoffatmosphäre bei etwa 400 mm Quecksilberdruck hervorzubringen, so muss die Stromdauer viermal so lange und länger währen, als zur Erzeugung eines gleich deutlich sichtbaren Ringes bei gewöhnlichem Luftdrucke erforderlich ist.

1) Man sehe die Abhandlung von Reitlinger u. Wächter, Wien. Ber. 82. II. Abth. p. 200. 1880.

Bei einem Drucke von ca. 250 mm und darunter ist es aber überhaupt nicht mehr möglich, Aufstreuungsringe zu erhalten. Die Quantität der durch positive Electricität fortgeführten Theilchen nimmt somit mit dem geringer werdenden Luftdrucke ab.

Lässt man dagegen einen Funkenstrom gleichzeitig durch zwei mit Metallelektroden versehene Glasröhren von gleichen Dimensionen gehen, wobei jedoch die Luft in der einen Glasröhre stärker verdünnt ist als in der anderen, so entsteht der Metallanflug in der Nähe der negativen Electrode weit früher und ist stets viel stärker in jener Röhre mit der höheren Verdünnung. Die Quantität der fortgeführten Kathodentheilchen ist somit bei geringerem Luftdrucke grösser.

§ 4. Auch die Entfernungen, bis auf welche Anoden- und Kathodentheilchen unter gleichen Verhältnissen geführt werden, sind verschieden. Die Anodentheilchen werden im allgemeinen so weit geführt, als die Schlagweite des Funkens ist, welchen sie bilden. Dies lässt sich mit Hülfe von positiven Lichtenberg'schen Figuren erkennen. Man kann mit einer durchlöchernten Harzplatte noch in einer Entfernung, welche an der Grenze der Schlagweite des Funkens aufgestellt ist, Strahlenfiguren erhalten. Bei einer Schlagweite von 200 mm in freier Luft werden also auch die Anodentheile 200 mm weit geschleudert. Dies lehrt auch die spectralanalytische Untersuchung des Funkens. Die Funkenlänge ist aber nach den Versuchen von Harris<sup>1)</sup> bekanntlich umgekehrt proportional der Dichte der Luft.

Nicht das Gleiche scheint für die Kathodentheilchen zu gelten. W. Crookes gibt an, dass die Entfernung, bis zu welcher die strahlende Electrodenmaterie geführt wird, gleich der mittleren Weglänge der Gasmoleculé sei. J. Puluj hat jedoch diese Behauptung durch seine Messungen nicht bestätigt gefunden. Nach seinen Beobachtungen ist die Länge des dunklen Raumes an der negativen Electrode, welcher ja eben aus Kathodentheilchen besteht, einerseits überhaupt grösser als die mittlere Weglänge, und die Verbreiterung

1) Harris, Phil. Trans. 1834.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVII.

des dunklen Raumes mit dem geringer werdenden Luftdrucke wächst auch nicht in jenem Verhältnisse, wie die mittlere Weglänge der Gasmoleculé.

Hierbei ist jedoch ein Umstand zu berücksichtigen, auf welchen schon W. Hittorf hinwies. Wenn nämlich die Oberfläche der Kathode grösser ist als die Entwicklung des Glimmlichtes auf derselben, sodass also nicht die ganze Kathode mit Glimmlicht überzogen ist, so hat der dunkle Raum zwischen Kathode und Glimmlicht seine normale Ausdehnung. Ist dagegen die Oberfläche der Kathode kleiner als die Ausbreitung des Glimmlichtes zufolge des vorhandenen Luftdruckes betragen würde, so wird das Glimmlicht auf der Kathode gleichsam zusammen gepresst, und die Länge des dunklen Raumes ist grösser, als sie bei ungehinderter Ausbreitung des Glimmlichtes sein würde. Man müsste daher wohl, um vergleichbare Zahlen zu erhalten, die Länge des dunklen Raumes stets auf Electroden von so grosser Ausdehnung messen, dass dieselben nie vollständig mit Glimmlicht überzogen sind. Diese Bedingung ist jedoch bei geringen Drucken mit mancherlei Schwierigkeiten verbunden, und es war mir bisher nicht möglich, derartige Messungen auszuführen.

Um einen approximativen Vergleich dafür zu gewinnen, wie weit Anoden- und Kathodentheilchen unter gleichen Verhältnissen geführt werden, mag Folgendes dienen. Bei einer Schlagweite des Inductionsapparates von 170 mm in freier Luft wurde das Auftreten von Fluorescenz und Metallanflug an der Kathode in einer Entfernung von 0,6 mm erst bei einem Drucke von 63 mm Quecksilberhöhe beobachtet. Nach den Versuchen von Harris müsste aber ein Funke, der in der Luft unter gewöhnlichem Drucke (760 mm) eine Strecke von 170 mm durchbrechen kann, bei 63 mm Druck eine Strecke von 2040 mm zurücklegen können. Die Anodentheilchen würden daher bei einem Luftdrucke von 63 mm unter sonst gleichen Verhältnissen  $2040/0,6 = 3400$  mal so weit geführt werden, als die Kathodentheilchen; bei 30 mm Druck würden die Anodentheilchen etwa 4200 mal, bei 15 mm Druck ca. 5550 mal so weit geführt, als die Kathodentheilchen.

Unter  
denth  
specie  
über  
wie S  
grade  
auf, u  
Zusta  
gleich  
weite  
\$  
führu  
dass  
flüsse  
theil  
Kath  
hinsc  
stets  
Anod  
Anod  
Anod  
die  
klein  
hat.  
sehe  
Spitz  
entf  
Unte  
des  
Gren  
theil  
gehe  
höhe  
der  
tritt

Unter 10 mm Druck hört jedoch die Fortführung von Anodentheilchen gänzlich auf, und es müsste auch erst durch specielle Versuche eruiert werden, ob das Gesetz von Harris über die Schlagweite des Funkens bis zu so geringen Drucken wie 30 oder 15 mm gültig ist. Bei diesen Verdünnungsgraden tritt bekanntlich der hellleuchtende Funke nicht mehr auf, und die Anodentheilchen werden nur in nicht glühendem Zustande überführt. Soviel ist jedoch sicher, dass unter gleichen Umständen die Anodentheilchen sich bedeutend weiter fortbewegen als die Kathodentheilchen.

§ 5. Eine weitere Verschiedenheit zwischen der Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen zeigt sich darin, dass die Ausgangspunkte derselben durch verschiedene Einflüsse bedingt werden. Für die Fortführung von Anodentheilchen sind zwei Umstände massgebend, die Lage der Kathode in Beziehung zur Anode, und die Form der Anode hinsichtlich ihrer Krümmung. Die Anodentheilchen gehen stets von dem der Kathode nächstliegenden Punkte der Anode aus, welcher die kürzeste Verbindungslinie zwischen Anode und Kathode bildet.<sup>1)</sup> Sind mehrere Punkte der Anode nahezu gleichweit von der Kathode entfernt, so gehen die Anodentheilchen von jenem Punkte aus, welcher den kleinsten Krümmungsradius, also die stärkste Krümmung hat. Ist die Anode jedoch geradezu mit einer Spitze versehen, so gehen die Anodentheilchen selbst dann von der Spitze aus, wenn dieselbe etwas weiter von der Kathode entfernt ist, als ein anderer Punkt der Anode, nur darf der Unterschied der beiden Wege eine gewisse, von der Dichte des Gases und der Schlagweite des Funkens abhängige Grenze nicht überschreiten.

Die Grösse jener Fläche, von welcher die Anodentheilchen ausgehen, hängt von der der Entladung vorausgehenden Electricitätsspannung ab und ist um so grösser, je höher die Spannung. Indirect ist daher auch die Krümmung der Anodenoberfläche von Einfluss auf die Grösse der Austrittsfläche der Anodentheilchen. Bei Anwendung einer ebenen

1) Diese Erscheinungen hat W. Hittorf zuerst mitgetheilt.

Metallplatte ist letztere Fläche (die centrale Aufreissungsscheibe) am grössten, übersteigt jedoch nach meinen Messungen selbst bei sehr hohen Spannungen nicht mehr als 3 qmm. Die Dichte der Luft, in welcher die Entladung stattfindet, ist ganz ohne Einfluss auf die Grösse dieser Fläche.

Bezüglich der Austrittspunkte für die Kathodentheilchen kommt die Stellung der Anode zur Kathode erst in zweiter Linie in Betracht, dagegen ist die Reinheit der Oberfläche, d. h. die Abwesenheit einer Oxydschicht und die Dichte des Gases sehr wesentlich. Wird die Oberfläche einer metallischen Kathode mit einer dichten Oxydschicht überzogen und nur eine bestimmte Stelle blank gemacht, so treten die Kathodentheilchen zunächst an dieser blanken Stelle aus, selbst dann, wenn diese Stelle weiter von der Anode entfernt ist, als ein anderer Punkt der Kathode, nur darf auch hier eine von der Dichte des Gases abhängige Grenze nicht überschritten sein. Bei geringer Luftdichte ist es jedoch möglich, die Kathodentheilchen sogar auf der der Anode entgegengesetzt liegenden Seite der Kathode erscheinen zu lassen, was bei den Anodentheilchen nicht gelingt. Die Anwesenheit eines Oxydüberzuges äussert auf das Austreten der Anodentheilchen keine merkbare Wirkung, hingegen ist wieder die Krümmung der Oberfläche unwesentlich für das Austreten der Kathodentheilchen.

Wie oben erwähnt, ist die Dichte der Luft ohne Einfluss auf die Grösse jener Fläche, von welcher die Anodentheilchen austreten, wirkt dagegen bestimmend auf die Grösse der Fläche, von welcher die Kathodentheilchen ausgehen. Je geringer die Dichte der Luft, um so grösser ist letztere Fläche. Nach Analogie des von Prof. Reitlinger<sup>1)</sup> gefundenen, von Bezold<sup>2)</sup> näher studirten Gesetzes für die Vergrösserung der Lichtenberg'schen Scheibenfiguren, sowie nach den von Prof. Reitlinger und mir gemachten Messungen<sup>3)</sup> über die Ausbreitung des Glimmlichtes bei ver-

1) Reitlinger, Wien. Ber. 43. p. 531. 1861.

2) Bezold, Pogg. Ann. 144. p. 337 u. 526. 1871.

3) Reitlinger, Wien. Ber. 42. p. 180. 1880.



schiedenem Drucke, dürfte anzunehmen sein, dass die Vergrößerung der Austrittsfläche der Kathodentheilchen umgekehrt proportional ist dem Quadrate der Luftdichte. Bezeichnet  $p$  den Druck der Luft,  $d$  den Durchmesser jener kreisförmigen Flächen, von welchen die Kathodentheilchen ausgehen (die blanken Scheiben), so müsste das Product  $p \cdot d$  somit eine constante Zahl sein. In der citirten Abhandlung fanden Prof. Reitlinger und ich folgende Zahlen:

$p =$	2,5 mm	5 mm	10 mm
$d =$	17,5 „	9 „	4,8 „
$d \cdot p =$	43,8	45	48

Bei grösserem Drucke wurde das Product  $p \cdot d$  immer grösser, bis zu dem vierfachen Werthe, entsprach also der Voraussetzung nicht. Bei den vielfachen Umständen, welche auf diese Messungen störenden Einfluss nehmen, spricht dies jedoch wohl noch nicht entschieden gegen obige Annahme.

Unzweifelhaft ist jedoch die Thatsache, dass die Grösse jener Fläche, von welcher die Kathodentheilchen austreten, von dem Luftdrucke abhängig ist und mit abnehmendem Luftdrucke bedeutend wächst, bei den Anodentheilchen dagegen nicht. Um einen numerischen Anhaltspunkt zur Beurtheilung hierfür zu geben, mag Folgendes dienen: Während die Anodentheilchen innerhalb eines Luftdruckes von 2280 bis 10 mm von einer Fläche ausgingen, die im Mittel etwa 3 qmm betrug, gingen die Kathodentheilchen bei einem Drucke von 40 mm von einer Fläche = 6 qmm aus, bei 10 mm Druck war die Fläche 18 qmm, bei 1,25 mm Druck 380 qmm, bei 0,04 mm Druck mehr als 40000 qmm.

§ 6. Ein sehr bemerkenswerther Unterschied zwischen der Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen besteht ferner in der Bewegungsrichtung derselben. Die Anodentheilchen gehen stets, wie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, von einer relativ kleinen Fläche aus und bewegen sich von da kegelförmig in der Richtung des Stromes und unter Einhaltung der kürzesten Verbindungslinie bis zur Kathode hin. Es ist also die Stellung der Kathode zur Anode, welche ihre Bewegungsrichtung bestimmt. Die Grösse des an der Anode gelegenen spitzen Winkels lässt sich hier-

bei annähernd mit Hilfe Lichtenberg'scher positiver Strahlenfiguren ermitteln. Der Radius der Strahlenfigur stellt die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks dar, die Distanz zwischen dem Mittelpunkte der Figur und der aus einer Metallspitze bestehenden Anode bildet die andere Kathete. Es zeigt sich, dass dieser Winkel bei sogenannten dunklen Entladungen bedeutend grösser ist, als bei leuchtenden Funkenentladungen; ebenso ändert er sich mit der Spannung.

Auf die Bewegungsrichtung der Kathodentheilchen ist die Lage und Stellung der Anode, sowie die Richtung des Stromes ohne Einfluss. Die Kathodentheilchen treten unter allen Umständen senkrecht zur Oberfläche der Kathode aus und bewegen sich in dieser Richtung geradlinig fort. Die Form der Kathodenoberfläche ist somit allein massgebend für die Bewegungsrichtung der Kathodentheilchen. Auf diesen Umstand hat zuerst W. Hittorf aufmerksam gemacht. Weitere Beweise für die zur Kathodenoberfläche normale Bewegungsrichtung hat auch J. Puluj geliefert, wovon im nächsten Paragraphen gesprochen wird. Die Kathodentheilchen lassen sich ferner aus ihrer geradlinigen Bewegung auf keinerlei Weise ablenken, die Kathodenstrahlen sind weder brechbar, noch reflectirbar. Dies lassen die sogenannten „Schatten“ erkennen, welche von Körpern erzeugt werden, die in die Bahn der Kathodentheilchen gestellt sind, wie dies die schönen Experimente von Hittorf, Crookes und Puluj lehren. Die Anodentheilchen dagegen sind fähig, sich in allen nur denkbaren Curven und Biegungen fortzubewegen.

§. 7. Die Einwirkung des Magnets auf die Anoden- und Kathodentheilchen lässt ebenfalls einen charakteristischen Unterschied derselben erkennen. Du Moncel<sup>1)</sup> gibt an, dass der hellleuchtende Funke, also die Anodentheilchen, durch den Magnet nicht abgelenkt werden könne, sondern nur die Aureole oder Gasentladung. Hr. Prof. Reitlinger und ich haben jedoch experimentell nachgewiesen<sup>2)</sup>, dass

1) Du Moncel, Recherches p. 47. Wiedemann, Galv. 2. §. 739.

2) Reitlinger u. Wächter, Wien. Ber. 82. p. 207. 1880.

auch der Funken selbst abgelenkt werden kann, und zwar sehr beträchtlich; allerdings bedarf es hierzu ausserordentlich starker Magnetkräfte, wie man sie nur mit Electromagneten grösster Art hervorbringen kann. Die Ablenkung des Funkens oder der Anodentheilchen erfolgt dann gemäss dem Biot-Laplace'schen Gesetze. Ist die Richtung des Stromes senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Magnetpole in jener Ebene, welche durch die Längsrichtung des (hufeisenförmigen) Magnets geht, so erfolgt die Ablenkung in äquatorialem Sinne. Die Anodentheilchen werden daher so abgelenkt, wie zwischen den Magnetpolen herabfallende diamagnetische Körperpartikelchen. Dabei ist es gleichgültig ob die betreffenden Anodentheilchen aus Eisen, Kobalt, Nickel, Platin, also paramagnetischen Metallen bestehen, oder aus Wismuth, Antimon etc., also diamagnetischen Metallen. Dieser Umstand ist insofern auffallend, als bei den hierbei thätigen starken Magnetkräften, die Anziehungskraft in axialer Richtung, speciell auf Eisentheilchen eine sehr bedeutende ist, und dennoch werden dieselben äquatorial abgelenkt. Man sieht hieraus, dass der positivelectrische Zustand auf die Eisentheilchen einen stärkeren Impuls hinsichtlich der Ablenkungsrichtung ausübt, als der specifische Magnetismus der Substanz.

Betrachtet man die Ablenkung der Kathodentheilchen durch den Magnet<sup>1)</sup> in ihrer Gesamtheit, so lässt sich das Biot-Laplace'sche Gesetz absolut nicht darauf anwenden. Es ist dies nur dann möglich, wie J. Puluje gezeigt hat, wenn man jedes Kathodentheilchen einzeln in Betracht zieht und als ein elementares Stromelement auffasst, welches sich, normal zur Kathodenoberfläche ausgehend, vom negativen Pole geradlinig fortbewegt und hierbei dieselben Eigenschaften hat, als ob es mit statischer Electricität geladen wäre. Nur unter dieser Voraussetzung können die Ablenkungen der Kathodentheilchen mit jenen der Anodentheilchen unter gleichem Gesichtspunkte betrachtet werden. Dies scheint mir aber ein Beweis dafür zu sein, dass die

1) Plücker, Pogg. Ann. 103. p. 88. 1858.

Kathodentheilchen in der That normal zur Kathodenoberfläche fortgeführt werden. Bei der oben präcisirten Stromrichtung gegenüber den Magnetpolen erfolgt die Ablenkung der Kathodentheilchen bekanntlich in axialem Sinne; es verhalten sich also hier die Partikelchen aller Metalle, inclusive des Wismuths und Antimons, wie paramagnetische Substanzen.

§ 8. Es sind noch einige weitere Verschiedenheiten zwischen Anoden- und Kathodentheilchen zu erörtern. Die Kathodentheilchen werden unter allen Umständen in nicht leuchtendem Zustande von der Kathode fortgeführt, indem sie den dunklen Raum zwischen Kathode und Glimmlicht erzeugen. Die Anodentheilchen werden hingegen sowohl in leuchtendem, als auch in nicht leuchtendem Zustande übergeführt. Leuchtend sind sie bekanntlich in dem Falle, wenn die Kathode sich in einer Entfernung von der Anode befindet, die innerhalb der Schlagweite des Funkens liegt, und wenn das zwischen den beiden Electroden befindliche Gas hierbei nicht allzu sehr verdünnt ist. In sehr verdünnten Gasen, sowie in einer Entfernung ausserhalb der Schlagweite werden die Anodentheilchen in nicht leuchtendem Zustande fortgeschleudert. Das Vorhandensein von Anodentheilchen im leuchtenden Funken lässt sich mittelst des Spectralapparates, der Aufreissungsscheiben und der Aufstreuungsringe constatiren. Die Fortführung nicht leuchtender Anodentheilchen kann mittelst Lichtenberg'scher positiver Strahlenfiguren, sowie mittelst Aufreissungsscheiben erkannt werden. Bei Anwendung des letzteren Mittels ist jedoch ein gewisser Umstand zu berücksichtigen. Man muss hierzu nämlich eine polirte und galvanisch versilberte Kupferplatte benutzen. Stellt man unter dem Recipienten der Luftpumpe einer solchen Platte, welche als Anode dient, in geringer Entfernung (8—10 mm) eine Metallspitze gegenüber und verdünnt die Luft bis auf etwa 15 mm Quecksilberdruck, so erfolgt die Entladung des Inductionsstromes nur in Form von Büschel- und Glimmlicht; von einem leuchtenden Funken ist nichts wahrzunehmen. Nach beiläufig zehn Minuten während der Stromdauer bemerkt man jedoch, nach vorherigem

Abwischen der entstandenen *Pristley'schen* Figur, auf der versilberten Oberfläche der Platte einen kreisrunden rothen Fleck. Derselbe rührt davon her, dass an dieser Stelle die Theilchen des Silberüberzuges fortgeschleudert wurden und dadurch die darunter liegende Kupferfläche sichtbar wurde. Dies ist ein Beweis dafür, dass bei der Entladung Anodentheilchen abgestossen wurden, ohne einen leuchtenden Funken hervorzubringen. Bei den *Lichtenberg'schen* Figuren kennzeichnen sich die fortgeschleuderten Anodentheilchen als einzelne Striche und Strahlen auf der Harzplatte, welche durch Bestäuben mit dem *Villarsy'schen* Gemenge bemerkbar gemacht werden, wie dies Hr. Prof. *Reitlinger* und ich dargelegt haben.<sup>1)</sup>

Noch ein bemerkenswerther Unterschied zwischen Anoden- und Kathodentheilchen ist zu erwähnen. Die Anodentheilchen haben eine zwar geringe, aber immerhin messbare Grösse und werden augenscheinlich durch einzelne Partialentladungen mechanisch losgerissen. Dies erkennt man sowohl durch die Betrachtung der Anode und der Anodentheilchen unter dem Mikroskop, wie durch das die Losreissung begleitende Knistern. Bei Anwendung von Anoden aus Holz, die vorher bestäubt wurden, kann man aus der Art des Knisterns bei der dunklen Entladung im vorhinein darauf schliessen, ob die zu erzeugende *Lichtenberg'sche* Figur aus wenigen oder vielen Strahlen zusammengesetzt sein wird. Legt man auf eine Metallplatte ein dünnes Glimmerblättchen und erzeugt auf demselben einen Aufstreuungsring, so kann man unter dem Mikroskope die einzelnen Anodentheilchen, aus welchen der Aufstreuungsring besteht, voneinander unterscheiden. Die Anode selbst zeigt unter dem Mikroskop kraterförmige Vertiefungen.

Nach der Anschauung von *J. Puluj* werden auch die Kathodentheilchen mechanisch losgerissen. *Puluj* führt jedoch zur Begründung dieser Annahme keine experimentellen Belege an. Einige hierüber angestellte Versuche lehrten mich Folgendes: In einer T-förmigen Glasröhre wurde

1) *Reitlinger* u. *Wächter*, *Wien Ber.* 83. p. 677. 1881.

ein dünner Platindraht als Kathode angebracht. Die Luft in dem Rohre war so weit verdünnt, dass beim Durchgange des Inductionsstromes der Platindraht nur theilweise von Glimmlicht umhüllt erschien. Wurde nun der Platindraht dadurch erwärmt, dass ein galvanischer Strom denselben durchfloss, so verbreiteten sich sowohl das Glimmlicht als auch der dunkle Raum an der Kathode auf das Anderthalb- bis Zweifache der früheren Ausdehnung, je nach dem Grade der Erhitzung des Drahtes. Um die Einwirkung des galvanischen Stromes zu vermeiden, erwärmte ich die Kathode auch auf andere Weise. Zu dem Zwecke wurde eine Metallröhre, welche an einem Ende verlöthet war, in ein weites Glasrohr eingekittet und die Luft in letzterem verdünnt. Wenn nun kochendes Wasser oder heisses Oel in die Röhre eingefüllt wurde, so verbreiteten sich im Momente des Eingiessens das Glimmlicht und der dunkle Raum an der Aussen- seite der Röhre in merklicher Weise.

Die Erwärmung der Kathode wirkt somit auf die Fortführung der Kathodentheilchen fördernd ein. Dies erkennt man auch daran, dass die Kathodentheilchen von dünnen und kurzen Drähten in grösserer Quantität fortgeführt werden, als von dicken Drähten oder Metallblechen; letztere werden nämlich durch den Inductionsstrom selbst weniger erwärmt. Bei Betrachtung des Metallanfluges in der Nähe der Kathoden mittelst eines Mikroskopes ist man nicht wohl im Stande, einzelne Partikelchen zu erkennen. Ebenso lässt sich an der Kathode selbst nicht die geringste Spur einer Auflockerung der Oberfläche wahrnehmen. Die Fortführung der Kathodentheilchen ist daher meiner Anschauung nach eher als ein Verdampfen des Kathodenmetalles aufzufassen, als wie ein mechanisches Losreissen einzelner Partikel. Bei der Fortführung von Anodentheilchen war es mir nicht möglich, mit Sicherheit zu eruiren, ob das Erwärmen der Anode befördernd darauf einwirke oder nicht.

§ 9. In vorliegender Abhandlung, welche nur den Zweck hat, jene Unterschiede zu erörtern, welche zwischen der Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen bestehen, wurde die mit der Funkenentladung gleichzeitig stattfindende Gas-

entladung nicht berücksichtigt. Damit soll jedoch nicht ausgedrückt sein, dass die Stromübertragung in gasförmigen Medien vorwiegend oder ausschliesslich durch die fortgeführte Electrodenmaterie bewirkt werde. Dies hängt vielmehr ganz von der Dichte des Gases ab. In Gasen unter gewöhnlichem Drucke, und bei grosser Schlagweite des Funkens fliesst bekanntlich nur ein geringer Theil des Stromes durch das Gas über, und der grössere Stromtheil gleicht sich in dem Funken aus. Mit wachsender Verdünnung des Gases wird dagegen der Funken immer schwächer, und die Gasentladung nimmt zu, bis dieselbe bei etwa 8 bis 0,1 mm Druck ein Maximum erreicht.

Jedoch auch hier findet eine Verschiedenheit an den beiden Electroden statt. Während nämlich an dem positiven Pole die Gasentladung unmittelbar von der Electrode ausgeht, erfolgt an dem negativen Pole die Stromübertragung an die Gasmoleculé nur durch Vermittelung der Kathodentheiligen. Die Büschellichtschichten werden unmittelbar von der Anode ausgesendet, die Glimmlichtschicht dagegen ist durch einen mit fortgeschleuderten Metalltheiligen erfüllten Raum von der Kathode getrennt. Hier bewirken also die in Bewegung befindlichen Kathodentheiligen den Uebergang des electricen Stromes von der Kathode in das Gas.

Schliesslich ist noch ein Umstand zu erwähnen, welcher auf die Fortführung von Electrodenheiligen Einfluss hat. Wie Hr. Prof. Reitlinger und ich dargelegt haben<sup>1)</sup>, findet beim Uebertritte des electricen Stromes in ein gasförmiges Medium nur dann ein Losreissen von Anodentheiligen statt, wenn die Anode aus Metall oder überhaupt einem „guten Leiter“ besteht. Bei Anwendung von „Halbleitern“, wie Holz, Papier, Wolle, Steinsalz etc., werden keine Anodentheiligen losgerissen, und es erfolgt ausschliesslich Gasentladung, vorausgesetzt, dass die Electrode nicht mit einem staubförmigen Leiter bedeckt ist. Nachdem wir diese Thatsache constatirt hatten, lag es nahe, auch die Kathode aus einem Halbleiter herzustellen. Ich brachte daher in Glas-

1) Reitlinger u. Wächter, Wien. Ber. 83. p. 677. 1881.



gefaßten Kathoden aus Holz oder Papier an und evacuirte hierauf die eingeschlossene Luft bis auf sehr geringen Druck. Beim Durchgange des electricischen Stromes zeigte sich nun ein wesentlich anderes Auftreten des Glimmlichtes. Während nämlich bei metallischen Electroden das Glimmlicht und der dunkle Raum die Kathode allseitig umhüllen, erschien bei Kathoden aus Holz oder Papier nur ein einziger Glimmstrahl, der immer von dem gleichen Punkte der Kathode ausging, während der übrige Theil der Holzelectrode dunkel blieb. Dies erklärt sich wohl daraus, dass der Halbleiter in der Richtung des geringsten Widerstandes von dem Funken durchbrochen, wurde und die weitere Entladung nur von dem innerhalb des Halbleiters sich befindenden metallischen Zuleiter ausging. Eine den Halbleiter umhüllende Glimmlichtschicht, sowie den dunkeln Raum an der Kathode konnte ich auf keine Weise erhalten. Es werden somit weder Kathoden-, noch Anodentheilchen von Halbleitern losgetrennt. Diese Thatsache kann auch graphisch dargestellt werden. Bezeichnen die Linien  $ab$  und  $bc$  zwei verschiedene Medien, in welchen sich der electricische Strom fortbewegt, und zwar  $ab$  in Fig. 1 einen metallischen Leiter,  $bc$  ein Gas, so würde das electricische Gefälle etwa durch

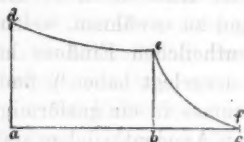


Fig. 1.

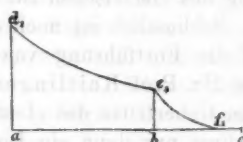


Fig. 2.

die beiden Curven  $de$  und  $ef$  dargestellt werden. Im Punkte  $e$  erleidet das Gefälle einen plötzlichen Bruch, und hier ist es, wo die Losreissung von Electroden theilchen erfolgt. Ist hingegen  $ab$  ein Halbleiter, so stellt sich das electricische Gefälle zwischen den Punkten  $d_1$  und  $f_1$  beiläufig, wie in Fig. 2 dar. In  $e_1$  findet zwar auch ein Bruch des Gefälles statt, aber unter einem viel stumpferen Winkel, und in diesem Falle werden keine Electroden theilchen losgetrennt.

Dies scheint in gleicher Weise für den Uebergang der Electricität aus festen, wie aus flüssigen Electroden in gasförmige Medien zu gelten. Für den Austritt der Anodentheilchen haben Hr. Prof. Reitlinger und ich bereits in der oben citirten Abhandlung mitgetheilt, dass ein Losreißen einzelner Flüssigkeitspartikel bei allen gut leitenden Flüssigkeiten, wie concentrirten Säuren, Lösungen von Metallsalzen, destillirtem Wasser und Alkohol stattfindet, bei den isolirenden Flüssigkeiten, Schwefelkohlenstoff, Benzol, Petroleum, Terpentinöl, Olivenöl dagegen nicht. Schwefeläther scheint gegenüber atmosphärischer Luft unter gewöhnlichem Drucke jenen Uebergangspunkt zu bilden, wo das Losreißen von Anodentheilchen eben aufhört.

Zur Anwendung als flüssige Kathoden konnten nur concentrirte Schwefelsäure und Olivenöl benutzt werden, da die übrigen Flüssigkeiten, ihrer leichten Flüchtigkeit wegen, natürlich nicht in evacuirte Gefäße gebracht werden können. Zu dem Zwecke wurde in eine lothrecht aufgestellte Glasröhre, welche an ihren beiden Enden mit eingeschmolzenen Platindrähten versehen war, eine ca. 2 cm hohe Schicht der betreffenden Flüssigkeit eingefüllt. Der Durchgang des electrischen Stromes durch Olivenöl erfolgte in der Art, dass nur einzelne stossweise Entladungen die Oelschicht durchbrachen, eine Entwicklung von Glimmlicht fand dabei nicht statt. Bei Anwendung von Schwefelsäure breitete sich dagegen über der Flüssigkeitsoberfläche das Glimmlicht und der dunkle Raum genau in derselben Weise aus, wie bei einem metallischen Leiter. Dieser Umstand scheint mir ebenfalls darauf hinzudeuten, dass der dunkle Raum zwischen Kathode und Glimmlicht in der That aus dampfförmiger Substanz und nicht aus einzelnen, mechanisch losgerissenen, festen Partikeln besteht.

#### Schlussresultate.

Die im Vorstehenden dargelegten Unterschiede zwischen der Fortführung von Anoden- und Kathodentheilchen beim Durchgange des electrischen Stromes durch ein gasförmiges Medium lassen sich also etwa wie folgt zusammenfassen:

1. Die Fortführung von Anodentheilchen erfolgt in atmosphärischer Luft unter einem Drucke von 4500 bis 10 mm Quecksilberhöhe; die Fortführung von Kathodentheilchen konnte nur unter einem Luftdrucke von 63 bis 0,005 mm beobachtet werden.

2. Die Quantität der in gleichen Zeiten und unter sonst gleichen Umständen losgerissenen Electrodenheilchen nimmt an der Anode mit geringer werdendem Luftdrucke ab, an der Kathode dagegen nimmt sie mit geringer werdendem Luftdrucke zu.

3. Die Anodentheilchen werden unter denselben Verhältnissen bedeutend weiter fortgeführt als die Kathodentheilchen (bei 63 mm Druck etwa 3400mal so weit).

4. Die Anodentheilchen gehen, unbeeinflusst von dem Luftdrucke, stets von einer relativ sehr kleinen Fläche aus; die Kathodentheilchen dagegen werden mit abnehmendem Luftdrucke von immer grösseren Flächen fortgeführt. (Diese letzteren Flächen erreichen eine mehr als 10000fache Grösse als jene bei den Anodentheilchen.)

5. Die Anodentheilchen treten immer nur an einer bestimmten Stelle der Anode aus, und zwar jener, welche der Kathode am nächsten liegt; die Kathodentheilchen erscheinen dagegen, nach Maassgabe der Dichte des Gases, an der gesamten Oberfläche der Kathode.

6. Das Austreten der Anodentheilchen wird durch gekrümmte oder zugespitzte Form der Electrode begünstigt; das Austreten der Kathodentheilchen durch eine reine, d. h. oxydfreie Oberfläche.

7. Die Bewegungsrichtung der Anodentheilchen wird durch die Stellung der Kathode zur Anode bestimmt, indem sich die Anodentheilchen in der Richtung des electricischen Stromes auf dem Wege des geringsten Leitungswiderstandes bis zur Kathode hin bewegen. Die Bewegungsrichtung der Kathodentheilchen erfolgt stets normal zur Kathodenoberfläche, unbeeinflusst durch die Stellung der Anode und die Richtung des electricischen Stromes.

8. Die Anodentheilchen können sich in allen denkbaren krummlinigen Bahnen bewegen; die Kathodentheilchen da-

gegen bewegen sich nur geradlinig und sind nicht fähig, krummlinige Bahnen zu beschreiben.

9. Die Anodentheilchen werden durch den Magnet so abgelenkt, wie diamagnetische Substanzen, die Kathodentheilchen in der Art wie paramagnetische Körper.

10. Die Anodentheilchen werden sowohl im leuchtenden wie im nicht leuchtenden Zustande übergeführt; die Kathodentheilchen nur in nicht leuchtendem Zustande.

11. Die Anodentheilchen haben eine messbare Grösse und werden augenscheinlich durch einzelne Impulse mechanisch losgerissen; die Kathodentheilchen sind unmessbar klein und scheinen durch einen Verdampfungsprocess zu entstehen.

12. Das Erwärmen der Electroden wirkt auf die Fortführung von Kathodentheilchen entschieden fördernd ein, bei den Anodentheilchen konnte dies nicht mit Sicherheit constatirt werden.

13. Die Kathodentheilchen vermitteln den Uebergang des electrischen Stromes von der Electrode an die Gas-moleculé; bei den Anodentheilchen ist dies nicht der Fall.

14. Zur Fortführung von Anodentheilchen ist, nach den Versuchen von G. Wiedemann und Rühlmann<sup>1)</sup> zu schliessen, eine der Entladung vorangehende grössere Electricitätsspannung erforderlich, als zur Fortführung von Kathodentheilchen. Der Austritt der ersteren erfolgt daher unter sonst gleichen Verhältnissen in grösseren Intervallen als der Austritt der letzteren.

Diese Thatsachen documentiren meiner Ansicht nach einen Unterschied zwischen positiver und negativer Electricität, welcher nicht als ein Gegensatz im Sinne von Plus und Minus zweier gleichartiger Zustände der Materie zu betrachten ist, sondern vielmehr als eine qualitative Verschiedenheit der beiden Electricitätsarten.

Wien, physikal. Laborat. des Prof. Edm. Reitlinger.

1) G. Wiedemann u. Rühlmann, Pogg. Ann. 145. p. 235. 1872. Man sehe auch Faraday, Pogg. Ann. 48. p. 277 al. 1501. 1839.

### X. Ueber die magnetische Schirmwirkung des Eisens; von J. Stefan.

(Aus dem 85. Bde. d. Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wiss. zu Wien. II. Abth. vom 16. März 1882; mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Bei der Anwendung der Theorie der magnetischen Induction auf das Problem der Magnetisirung einer eisernen Hohlkugel ist Poisson zu folgendem Resultate gelangt. Wird eine solche Kugel durch äussere Kräfte magnetisirt, so wirkt dieselbe in ihrem Hohlraume mit Kräften, welche den äusseren entgegengesetzt sind. Die resultirende Wirkung im Hohlraume ist von der Dicke der Kugelwand abhängig, und wenn diese im Vergleiche zum Radius nicht sehr klein ist, so beträgt die resultirende Wirkung im Hohlraum nur einen kleinen Bruchtheil jener der äusseren Kräfte. Ein in der Höhlung befindlicher Magnet wird daher durch die ihn umgebende Eisenwand gegen die Einwirkung ausserhalb derselben befindlicher Magnete wenigstens theilweise geschützt. Umgekehrt erfahren auch die letzteren von dem eingeschlossenen Magnete eine viel geringere Einwirkung, als von demselben Magnete im freien Zustande. Denn die Rechnung lehrt auch, dass eine Hohlkugel, welche durch einen in ihrer Höhlung befindlichen Magnet magnetisirt wird, nach aussen eine Wirkung ausübt, welcher jener des Magnetes entgegengesetzt ist.

Die Eisenkugel zeigt gegen die magnetischen Kräfte ein ähnliches Verhalten, wie eine Hohlkugel aus einem gut leitenden Material gegen die electricen. Es ist diese Analogie nicht bloss für diese specielle Form der Körper vorhanden, für die Kugelform lässt sich aber die Rechnung in vollständiger und sehr einfacher Weise führen.

Das in Rede stehende Verhalten der guten Leiter gegen electriche Kräfte wird häufig als electriche Schirmwirkung bezeichnet. In demselben Sinne kann man also auch von einer magnetischen Schirmwirkung des Eisens reden.

Die Wirkung kann zur Astasirung der Galvanometer benutzt werden. W. Thomson hat dieselbe bei der Con-

struction seines Marinegalvanometers zur Anwendung gebracht. Die wichtigste Anwendung jedoch hat diese Schirmwirkung wohl in der Gramme'schen Maschine gefunden. In einer dieser Maschine gewidmeten Monographie hat A. Breguet diesen Gegenstand in sehr einfacher Weise auseinandergesetzt.

Die magnetische Schirmwirkung des Eisens verdient nunmehr wohl eine grössere Beachtung und sollte auch in einem experimentellen Course der Physik demonstrirt werden. Ich habe zu diesem Zwecke einige Versuche mit hohlen Eisencylindern oder Eisenringen ausgeführt und theile im Folgenden die Ergebnisse derselben mit. Ich habe diese specielle Form der Eisenkörper gewählt, weil diese Form für die Anwendung zunächst die grösste Bedeutung hat.

#### I. Ablenkungsversuche.

Der Einfluss von Eisenmassen auf die Fernwirkung eines Magnetes lässt sich am einfachsten durch Ablenkungsversuche bestimmen. Ich will einige Beispiele anführen.

Der abzulenkende Magnet war der Ringmagnet eines Galvanometers von Edelmann. Der ablenkende wurde in der auf dem magnetischen Meridian senkrechten, durch die Mitte des Ringmagnetes gehenden Linie aufgestellt. Ein Magnet von 5 cm Länge und 1 cm Durchmesser gab bei 31 cm Distanz eine Ablenkung von 116 Scalentheilen. Wurde um diesen Magnet ein Eisenring von 11 cm innerem, 13 cm äusserem Durchmesser und 5 cm Höhe gelegt, sodass die Axe des Magnetes durch die Mitte des Ringes ging, so fiel die Ablenkung auf 22 Scalentheile, also auf dem fünften Theil ihres ursprünglichen Betrages herab. Ein Eisenring von denselben Querdimensionen, aber von doppelter Höhe reducirte die Ablenkung auf 12 Scalentheile.

Ein Magnet von 10 cm Länge und 1 cm Durchmesser gab bei einer Distanz von 34,3 cm eine Ablenkung von 495, bei einer Distanz von 41,4 cm eine Ablenkung von 281 Scalentheilen. Diese Ablenkungen wurden durch den Eisenring von 5 cm Höhe auf 70, resp. 41 Scalentheile reducirt.

Ein Eisenring wirkt nicht nur in der bei diesen Ver-

suchen angewendeten Lage vermindern auf die Fernwirkung des Magnetes ein, sondern auch, wenn seine Mittellinie höher oder tiefer gestellt wird, als die Axe des Magnetes. Folgende zwei Tabellen geben zwei Beispiele. Bei der ersten war der 5 cm lange, bei der zweiten der 10 cm lange Magnet benutzt.  $h$  bedeutet den verticalen Abstand der Axe des Magnetes und der Mittellinie des Cylinders von 5 cm Höhe,  $s$  bedeutet die Ablenkung in Scalentheilen.

	$h = 0$	2,5	5	7,5	10	12,5	$\infty$
I. $s = 22$	35	65	90	102	110	116	
II. $s = 70$	127	184	283	436	463	495	

Die unter  $s$  angeführten Zahlen sind die Mittelwerthe aus den Ausschlägen nach zwei entgegengesetzten Seiten, welche sich bei den zwei entgegengesetzten Lagen des ablenkenden Magnetes ergeben. Diese doppelte Beobachtung ist in den Fällen, in welchen der Cylinder eine höhere Lage erhält, nothwendig, weil seine Magnetisirung durch die verticale Componente des Erdmagnetismus die Ausschläge nach der einen Seite vergrößert, nach der anderen vermindert. Zugleich wird dadurch auch der Einfluss eines dem Cylinder eigenthümlichen Magnetismus eliminirt.

Wird unter oder über einen Magnet eine Eisenplatte gelegt, so wird dessen Fernwirkung ebenfalls geschwächt. Eine runde Platte von 1,2 cm Dicke und 13 cm Durchmesser wurde über den 10 cm langen Magnet in verschiedenen Abständen gestellt. Für die unter  $h$  angeführten Distanzen der unteren Fläche der Platte von der Axe des Magnetes wurden die Ablenkungen  $s$  gefunden:

$h =$	2,5	5	7,5	$\infty$
$s =$	276	388	440	495

Man kann die Platte auch seitwärts vom Magnete aufstellen, sodass ihr horizontaler Durchmesser der Axe des Magnetes parallel geht, die Wirkung bleibt dieselbe. Stellt man aber die Platte vor oder hinter den ablenkenden Magnet, so tritt nicht eine Schwächung, sondern eine wenn auch nicht grosse Verstärkung der Fernwirkung ein.



## II. Schwingungsversuche.

Ein kleiner cylindrischer Magnet von 3 cm Länge und 0,4 cm Durchmesser wurde mittelst eines leichten einen Spiegel tragenden Gestelles an einen Coconfaden aufgehängt. Die Schwingungsdauer dieses Apparates betrug 5,9 Secunden. Wurde der Magnet durch einen Messingcylinder von gleichem Trägheitsmoment ersetzt, so betrug die Schwingungsdauer 34,4 Secunden.

Bedeutet  $K$  das Trägheitsmoment des schwingenden Systems  $M$  das magnetische Moment des Magnetes,  $T$  die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, endlich  $\theta$  den Coëfficienten der Torsion, sodass für mässige Ausschläge  $\varphi$  die Gleichung:

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -(MT + \theta) \varphi$$

gilt, so ist:

$$5,9 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MT + \theta}}, \quad 34,4 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{\theta}}$$

und daraus folgt:  $\theta = 0,03 MT$ .

Ueber den Apparat wurde nun ein Eisencylinder geschoben. Die Dimensionen dieses Cylinders sind folgende: Höhe 5 cm, innerer Durchmesser 11 cm, äusserer Durchmesser 14 cm, also Wanddicke 1,5 cm. Der Cylinder wurde so gestellt, dass der Mittelpunkt desselben mit jenem des Magnetes zusammenfiel. Es wurde sodann die Schwingungsdauer beobachtet, welche sich bedeutend grösser ergab als die Dauer der Schwingungen im freien Raume. Der Magnet wurde dann gehoben, jedoch so, dass sein Mittelpunkt immer in der Axe des Cylinders blieb. Für verschiedene Stellungen des Magnets wurden wieder die Schwingungsdauern bestimmt. Die folgende Tabelle enthält die Resultate dieser Beobachtungen.

$h$  bedeutet die Höhe des Mittelpunktes des Magnetes über der Mitte des Cylinders ausgedrückt in Centimetern,  $\tau'$  die zugehörige Schwingungsdauer. Die Zahlen der letzten Reihe geben die aus den Beobachtungen berechneten Verhältnisse zwischen der Horizontalcomponente  $T$  und der Intensität  $T'$  des magnetischen Feldes an dem jeweiligen Orte

des Magnetes. Diese Zahlen geben also an, auf den wievielten Theil ihres Werthes die Horizontalcomponente durch die Wirkung des Eisencylinders herabgesetzt wird.

$h = 0$	1,25	2,5	5	7,5	10
$\tau' = 13,6$	12,8	11,0	8,4	7,1	6,6
$\frac{T}{T'} = 6,10$	5,30	3,76	2,09	1,47	1,26

Das Verhältniss von  $T$  zu  $T'$  wurde aus den beiden Formeln:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MT + \theta}}, \quad \tau' = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MT' + \theta}},$$

mit Berücksichtigung der gefundenen Beziehung zwischen  $\theta$  und  $MT$  berechnet. Es ist:

$$\frac{T'}{T} = \frac{1,03\tau^2}{\tau'^2} - 0,03,$$

und der reciproke Werth davon steht in obiger Tabelle.

Diese lehrt, dass in der Mitte des Cylinders die Horizontalcomponente auf weniger als den sechsten Theil ihres Werthes im freien Raume herabgesetzt ist. Mit wachsender Entfernung von der Mitte des Cylinders nimmt die Abschwächung des magnetischen Feldes ab, macht sich aber noch in beträchtlicher Höhe ausserhalb des Cylinders geltend.

Ist die Aufhängung des Magnetes derart, dass der Aufhängefaden untordirt ist, wenn der Magnet in seiner Ruhelage sich befindet, so behält der Magnet seine Ruhelage bei, wenn der Eisencylinder über ihn geschoben wird, sobald dieser keinen eigenthümlichen remanenten Magnetismus enthält. Dies war bei dem zu diesen Versuchen benutzten Cylinders sehr nahe der Fall. Aber wenn auch dieser Fall vorhanden ist, so ändert sich die Ruhelage, wenn dieselbe nicht mit der torsionsfreien Stellung des Fadens zusammenfällt, um so mehr, je grösser die Abschwächung des magnetischen Feldes ist.

Gewöhnlich aber enthalten Eisencylinder remanenten Magnetismus, und dann wird auch, wenn die ursprüngliche Ruhelage mit der torsionsfreien Stellung des Fadens zusammenfällt, dieselbe durch das Ueberschieben des Cylinders

geändert werden. Es lassen sich aber zwei um  $180^\circ$  gegeneinander abstehende Stellungen des Cylinders finden, in welchen dies nicht oder nur in geringem Maasse geschieht. Es sind dies jene Lagen, in welchen das remanente Feld des Eisenringes mit jenem der Horizontalcomponente gleiche oder eine zu dieser entgegengesetzte Richtung hat.

Beobachtet man die Schwingungen des Magnetes bei diesen beiden Stellungen des Ringes, so ergeben sich die Schwingungsdauern in den beiden Fällen sehr verschieden. Man kann aber aus denselben die Wirkung des eigenthümlichen Magnetismus des Cylinders eliminiren und so wieder die gesuchte Grösse finden.

Bei der folgenden zweiten Reihe von Versuchen wurde ein Eisencylinder von 5 cm Höhe, 11 cm innerem und 13 cm äusserem Radius verwendet. Seine Wand hat also eine Dicke von 1 cm. In den verschiedenen Höhen  $h$  ergaben sich nachstehende Werthe der Schwingungsdauern:

$h = 0$	2,5	5	7,5
$\tau_1 = 12,4$	9,7	7,1	6,0
$\tau_2 = 9,5$	8,4	6,7	5,8

Die Schwingungsdauer des Magnetes, welcher vor dieser Versuchsreihe neu magnetisirt wurde, beträgt fünf Secunden und ist nunmehr  $\theta = 0,02 MT$ . Vorausgesetzt, dass man die Wirkung des eigenthümlichen Magnetismus des Eisens auf den schwingenden Magnet wie die eines homogenen Feldes von der Intensität  $R$  rechnen darf, hat man für  $\tau_1$  und  $\tau_2$  die beiden Formeln:

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MT' + MR + \theta}}, \quad \tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MT' + MR + \theta}}.$$

Daraus findet man für die obigen vier Fälle:

$T - R = 0,145$	0,251	0,486	0,688 $T$
$T + R = 0,262$	0,341	0,548	0,737 $T$

Für die Verhältnisse von  $T$  zu  $T'$  findet man nun folgende Zahlen:

$h = 0$	2,5	5,0	7,5
$\frac{T}{T'} = 4,91$	3,38	1,93	1,40

Die Schirmwirkung dieses Cylinders ist demnach eine geringere, als die des ersten.

Ein dritter Eisencylinder, welcher dieselben Radien wie der zweite, aber die doppelte Höhe hat, zeigte ebenfalls eigenthümlichen Magnetismus, welcher nicht in der Mitte des Cylinders, sondern oberhalb derselben den grössten Einfluss zeigte.

Der Magnet, welcher im freien Raume wieder eine Schwingung in fünf Secunden vollführte, hatte innerhalb und oberhalb des Eisencylinders in den verschiedenen Höhen folgende Schwingungsdauern:

$h = 0$	2,5	5	7,5	10
$\tau_1 = 17,2$	17,0	10,4	7,2	6,0
$\tau_2 = 12,8$	11,1	8,5	6,7	5,8

Für  $T' - R$  und  $T' + R$  findet man folgende Werthe:

$T' - R = 0,059$	0,068	0,216	0,472	0,688 $T$
$T' + R = 0,135$	0,187	0,382	0,548	0,737 $T$ ,

und daraus ergeben sich für die Verhältnisse von  $T$  zu  $T'$  folgende Zahlen:

$h = 0$	2,5	5	7,5	10
$\frac{T}{T'} = 10,31$	7,84	3,65	1,96	1,40

Die Abschwächung der Horizontalcomponente ist in der Mitte dieses Cylinders doppelt so gross, als in dem zweiten Cylinder, hingegen ist sie ausserhalb der Cylinder in beiden Fällen nahezu gleich.

Wenn ein Spiegelgalvanometer so eingerichtet ist, dass der Spiegel ausserhalb der Drahtwindungen sich befindet, so kann man die Empfindlichkeit desselben durch Ueberschieben eines Eisencylinders leicht auf das Zehnfache und auch noch höher bringen. Die Höhe des Cylinders wird man am besten so wählen, dass der Magnet des Galvanometers in die Mitte des Cylinders zu stehen kommt. Die astasirende Wirkung wächst mit der Höhe des Cylinders und mit dem Verhältnisse der Wanddicke zum äusseren Durchmesser.

Wie im folgenden Abschnitte gezeigt werden wird, ist die Zahl, welche angibt, wie vielmal das magnetische Feld

innerhalb eines unendlich langen Cylinders schwächer ist, sehr nahe durch den Ausdruck:

$$n = 1 + \pi k \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

gegeben.  $a$  bedeutet den äusseren,  $b$  den inneren Radius des Cylinders,  $k$  die Magnetisirungszahl des Eisens. Für gewöhnliches weiches Eisen und für solche Kräfte, wie die erdmagnetischen es sind, kann man  $\pi k = 50$  annehmen, um einen genäherten Werth für die Zahl  $n$  zu erhalten.

Für einen Cylinder von endlicher Höhe ist die Zahl  $n$  kleiner, angenähert in dem Verhältniss von  $h$  zu  $\sqrt{4a^2 + h^2}$ , wenn  $h$  die Höhe des Cylinders bedeutet.

Man kann die astasirende Wirkung namentlich eines niedrigen Cylinders noch vergrössern, wenn man ihn mit Eisenplatten wenigstens theilweise schliesst, was jedoch bei den gebräuchlichen Galvanometern nicht leicht ausführbar ist. Noch will ich bemerken, dass es nicht nothwendig ein massiver Eisencylinder sein muss, man kann auch zusammengerolltes Eisenblech oder besser noch auf eine Spule aufgewickelten weichen Eisendraht verwenden.

Die Astasirung lässt sich allerdings durch einen astasirenden Magnet bequemer erreichen, es ist aber zu bemerken, dass ein Eisencylinder das Galvanometer zugleich gegen alle äusseren magnetischen Störungen unempfindlicher macht, was bei der Astasirung durch einen Magnet nicht der Fall ist.

Ein Eisenring kann auch zur grösseren Astasirung eines astatischen Nadelpaares verwendet werden, indem man durch passende Stellung desselben die Einwirkung des Erdmagnetismus auf die stärkere der Nadeln in grösserem Maasse vermindert, als die Einwirkung auf die schwächere.

### III. Theoretische Erörterung.

Die Schirmwirkung des Eisens beruht auf der Veränderung, welche ein Eisenkörper in der Vertheilung gegebener magnetischer Kräfte hervorruft. Diese Veränderung ist im allgemeinen in verschiedenen Orten des Raumes verschieden, die gegebenen Kräfte können durch dieselbe eine Richtungsänderung, eine Verstärkung oder Schwächung er-

fahren. Die Wirkung des Eisens lässt in theoretischer Hinsicht eine zweifache Darstellung zu.

Man kann sie ableiten aus der Fernwirkung der magnetischen Massen, welche durch die magnetische Induction im Eisenkörper frei geworden sind. Ein aufrecht gestellter hohler Cylinder wird z. B. durch die horizontale Componente des Erdmagnetismus so magnetisirt, dass der gegen den magnetischen Norden gerichtete Theil seiner Wand freie nördliche, der entgegengesetzte Theil der Wand aber freie südliche magnetische Massen aufweist. In der Höhlung des Cylinders ist die Wirkung dieser Massen entgegengesetzt jener der Horizontalcomponente und infolge dessen das magnetische Feld geschwächt.

Wird ein Magnet in einen Cylinder gebracht oder über eine Eisenplatte gestellt, so werden die den Enden des Magnetes benachbarten Theile der Cylinderwand oder der Eisenplatte entgegengesetzt magnetisch und vermindern die Fernwirkung des Magnetes. Man könnte sagen, der Magnet wird durch den Cylinder oder die Platte verankert.

Wird ein Eisenkörper vor das eine Ende des Magnetes gestellt, so wirkt das magnetisirte Eisen nach aussen wie der Magnet, es verlängert gewissermassen den Magnet und vergrössert dadurch seine Fernwirkung.

Wird ein Eisenkörper durch gegebene magnetische Kräfte so magnetisirt, dass keine magnetischen Massen in ihm frei werden, so übt er auch gar keinen Einfluss auf die Vertheilung der magnetischen Kräfte aus. Dies ist der Fall, wenn ein geradliniger Leiter eines electrischen Stromes von einer Eisenröhre derart umgeben ist, dass der Leiter in die Axe der Röhre zu liegen kommt. Die Elementarmagnete ordnen sich in geschlossenen Kreisen an, und werden keine Massen frei. Die Eisenröhre verändert daher die Fernwirkung des Stromleiters in keiner Weise, weder innerhalb noch ausserhalb der Röhre. Angenähert gilt dies auch noch für einen kreisförmig gebogenen Leiter, der von einem eisernen Hohlringe umgeben ist, und zwar um so mehr, je kleiner der Radius der Röhre gegen den Radius des Kreises ist. — W. Siemens hat bei seinen electromagnetischen Versuchen

auch eine derartige Vorrichtung benutzt und gefunden, dass in einem solchen Falle das Eisen die Fernwirkung des electrischen Stromes nicht verändert.

Eine zweite Art, den Einfluss von Eisenmassen auf die Vertheilung von magnetischen Kräften darzustellen, hat Faraday eingeführt. Die Vertheilung der magnetischen Kräfte wird durch den Verlauf der magnetischen Kraftlinien und der Einfluss des Eisens durch die Veränderung bestimmt, welche dasselbe in dem Verlaufe der Kraftlinien verursacht. Damit wäre jedoch ein neuer Standpunkt nicht gewonnen, wenn man zur Ermittlung dieser Veränderung wieder die im Eisen frei gewordenen magnetischen Massen als neue Ausgangs- und Endpunkte von Kraftlinien herbeiziehen müsste. Dies ist jedoch nicht nothwendig.

Die Kraftlinien, welche von dem einen Pole eines Magnetes zu dem anderen durch einen gleichartigen, unbegrenzten Raum gehen, haben dieselbe Gestalt wie die Strömungslinien, in welchen die Wärme in einem unbegrenzten gleichartigen Leiter von einem Orte constanter höherer zu einem Orte constanter niederer Temperatur sich bewegt, oder wie die Strömungslinien, in welchen die Electricität in einem unbegrenzten gleichartigen Leiter von einer Electrode zur anderen fliesst. Die Veränderung, welche ein Eisenkörper in den Verlauf der magnetischen Kraftlinien bringt, ist nach Faraday dieselbe, welche in den Strömungslinien der Wärme oder der Electricität hervorgerufen wird, wenn man den entsprechenden Theil des Mediums mit einem viel besseren Wärme- und Electricitätsleiter ausfüllt. Die magnetischen Kraftlinien streben dem Eisenkörper zu, drängen sich gegen denselben zusammen und durchsetzen ihn in grösserer Dichte. Besitzt der Eisenkörper eine Höhlung, so weichen die Kraftlinien dieser Höhlung aus, die Mehrzahl derselben geht um diese herum, und nur wenige gehen durch dieselbe hindurch, und in dieser Ableitung der Kraft besteht jene Wirkung des Eisens, welche speciell als Schirmwirkung bezeichnet worden ist.

Wird ein hohler Cylinder in ein homogenes magnetisches Feld, z. B. jenes der Horizontalcomponente des Erdmagne-



tismus so gestellt, dass seine Axe senkrecht zur Richtung des Feldes zu stehen kommt, so neigen sich die ursprünglich aus parallelen Geraden bestehenden Kraftlinien gegen den Cylinder, condensiren sich vor demselben und gehen zum grössten Theile bogenförmig durch die Wand des Cylinders um die innere Höhlung herum, treten auf der anderen Seite wieder aus und gestalten sich endlich in grosser Entfernung wieder zu einem Systeme paralleler gerader Linien.

Umgibt man einen Magnet mit einem eisernen Cylinder, so nimmt der grösste Theil der vom Nordpole ausgehenden Kraftlinien seinen Weg zum Südpole durch die Wand des Cylinders, nur wenige treten aus der Wand in den äusseren Raum hinaus, und demgemäss erscheint die Wirkung des Magnetes in diesem Raume geschwächt. Dasselbe findet nur in geringerem Maasse statt, wenn über den Magnet eine Eisenplatte gestellt wird. Wird aber diese vor den Magnet gestellt, so verdichtet dieselbe die nach vorn ausgehenden Kraftlinien, diese treten auch auf der Vorderseite der Platte in grösserer Zahl aus, und dadurch erhält die Fernwirkung des Magnetes in dieser Richtung eine Verstärkung.

Die Kraftlinien eines geradlinigen electrischen Stromes umschliessen denselben in concentrischen Kreisen, deren Ebenen senkrecht zu der Stromrichtung stehen. Ist der Stromleiter von einer concentrischen Eisenröhre umgeben, so bringt diese in die Anordnung der Kraftlinien innerhalb, sowie ausserhalb der Röhre keine Störung. Die Fernwirkung wird durch das Eisen nicht verändert, die Anwesenheit des letzteren gibt sich nur durch die Verstärkung des Extrastromes beim Entstehen oder Verschwinden des Stromes im Leiter zu erkennen.

Man sollte erwarten, dass die Poisson'sche Theorie der magnetischen Induction und die Faraday'sche Anschauung über das magnetische Verhalten des weichen Eisens zwei wesentlich verschiedene Grundlagen für die mathematische Behandlung der betreffenden Probleme darbieten. Dies ist jedoch merkwürdigerweise nicht der Fall, ja es kann, wie W. Thomson gezeigt hat, die Faraday'sche Anschauung als eine unmittelbare Consequenz aus der Pois-

son'schen Theorie abgeleitet werden. Ich will hier in Kürze diesen Gegenstand auseinandersetzen.

Die Grundgleichung der Poisson'schen Theorie kann man so ausdrücken: Durch die Magnetisirung des Eisens wird in jedem Elemente desselben eine magnetische Molecularkraft geweckt, welche der magnetisirenden Kraft das Gleichgewicht hält. Diese Molecularkraft hat mit dem inducirten magnetischen Momente gleiche Richtung, und was ihre Grösse anbetrifft, so kann man dieselbe wenigstens innerhalb gewisser Grenzen dem inducirten Momente proportional setzen.

Bedeutet  $\mu$  das auf die Einheit des Volumens reducirte Moment,  $T$  die magnetisirende Kraft und  $k$  die Magnetisirungszahl, so ist:

$$\mu = kT.$$

Zerlegt man  $\mu$  nach den Richtungen der Coordinaten  $x, y, z$  in die Componenten  $\alpha, \beta, \gamma$  und ebenso  $T$  in die Componenten  $X, Y, Z$ , so bestehen die Gleichungen:

$$\alpha = kX, \beta = kY, \gamma = kZ.$$

Die magnetisirende Kraft  $T$  besteht im allgemeinen aus zwei Theilen, aus der Kraft, welche von äusseren magnetischen Massen oder electricischen Strömen ausgeht, und aus jener, welche von den im Eisenkörper durch die Induction frei gewordenen magnetischen Massen herrührt. Beide Theile zusammen seien durch das Potential  $V$  bestimmt, dann ist:

$$(1) \quad \alpha = -k \frac{dV}{dx}, \quad \beta = -k \frac{dV}{dy}, \quad \gamma = -k \frac{dV}{dz}.$$

Die durch die Induction frei gewordenen magnetischen Massen können im allgemeinen theils an der Oberfläche, theils im Inneren des Eisenkörpers sich befinden. Die Raumdichte  $\varrho$  der im Inneren befindlichen freien Massen lässt sich durch:

$$(2) \quad \varrho = - \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right)$$

ausdrücken. Unter der Voraussetzung, dass  $k$  eine constante Zahl ist, geben die Gleichungen (1) in Verbindung mit (2):

$$(3) \quad \varrho = k \Delta V,$$

wenn mit  $\Delta$  die Operation  $d^2/dx^2 + d^2/dy^2 + d^2/dz^2$  angedeutet wird.

Nun ist aber zugleich:

$$(4) \quad \Delta V = -4\pi\rho.$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt nunmehr:

$$(1 + 4\pi k)\rho = 0;$$

es befinden sich also im Inneren des Eisens keine freien Massen, und es genügt  $V$  der Gleichung  $\Delta V = 0$ .

Die Flächendichte  $\sigma$  der auf der Oberfläche befindlichen freien Massen ist gleichbedeutend mit jener Componente von  $\mu$ , welche in die Richtung der Normale zur Oberfläche fällt, ist also durch die Formel:

$$(5) \quad \sigma = -k \frac{dV}{dn}$$

gegeben, worin  $n$  die Richtung der aus dem Eisenkörper austretenden Normale bedeutet.

Das in den bisherigen Formeln gebrauchte Zeichen  $V$  bedeutet das magnetische Potential im Innern des Eisenkörpers. Bezeichnet man zum Unterschiede davon das Potential ausserhalb des Eisenkörpers mit  $V_1$ , so geht beim Durchgange durch die Oberfläche  $V$  in continuirlicher Weise in  $V_1$  über; für die nach der Normale genommenen Differentialquotienten von  $V$  und  $V_1$  ist dies nicht der Fall, sondern es ist:

$$(6) \quad \frac{dV_1}{dn} - \frac{dV}{dn} = -4\pi\sigma.$$

Die von W. Thomson ausgeführte Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (5) bildet den wichtigen Schritt, durch welchen die Theorie der magnetischen Induction der Faraday'schen Conception entsprechend in dieselbe analytische Form gebracht wird, welche einem grossen Gebiete von Problemen gemeinsam ist, nämlich den Problemen der stationären Wärmeleitung, Diffusion und Strömung.

Die beiden Gleichungen (5) und (6) geben nämlich die folgende:

$$(7) \quad \frac{dV_1}{dn} = (1 + 4\pi k) \frac{dV}{dn}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der ebenfalls für die Oberfläche gültigen:  $V = V_1$ , ferner die Gleichungen

$\Delta V = 0$  und  $\Delta V_1 = 0$ , welche für alle Punkte, in denen keine magnetischen Massen sich befinden, erfüllt sein müssen, bilden die Bedingungen, welchen die beiden Functionen  $V$  und  $V_1$  genügen müssen. Es sind dies dieselben Bedingungen, welchen die Temperaturen  $V_1$  und  $V$  in zwei Medien, deren Wärmeleitungsfähigkeiten sich wie 1 zu  $4\pi k + 1$  verhalten, genügen, wenn die Wärmebewegung im Zustande der Beharrung sich befindet.

Es mag noch der Fall betrachtet werden, dass der Eisenkörper mit einem Theile seiner Oberfläche oder auch mit der ganzen nicht an Luft, sondern an einen anderen stark magnetisirbaren Körper, z. B. Nickel, grenzt. Innerhalb dieses Körpers wird das Potential  $V_1$  ebenfalls der Gleichung  $\Delta V_1 = 0$  genügen, die magnetische Dichte im Inneren desselben wird ebenfalls Null sein. Die Dichte an der gemeinschaftlichen Oberfläche wird sich summiren aus derjenigen, welche dem Eisen, und jener, welche dem Nickel angehört. Letztere wird durch  $k_1 (dV_1/dn)$  bestimmt sein, wenn  $k_1$  die Magnetisirungszahl des Nickels bedeutet. Die gesammte Oberflächen-dichte wird demnach statt durch die Formel (5) durch die Formel:

$$\sigma = -k \frac{dV}{dn} + k_1 \frac{dV_1}{dn}$$

gegeben sein, und diese wird mit der Gleichung (6) anstatt der Gleichung (7) die folgende geben:

$$(1 + 4\pi k_1) \frac{dV_1}{dn} = (1 + 4\pi k) \frac{dV}{dn}.$$

Diese Gleichung zeigt noch deutlicher, als die Gleichung (7), dass dem Factor  $1 + 4\pi k$  die Bedeutung eines Leitungsvermögens beigelegt werden kann. Der Umstand, dass dieser Factor = 1 ist, wenn es sich um die atmosphärische Luft als Medium handelt, kann also wie eine arbiträre Feststellung angesehen werden, nach welcher die den verschiedenen Körpern entsprechenden Werthe von  $1 + 4\pi k$  auf den Werth dieser Grösse für die Luft als Einheit bezogen werden.

Die Durchführung specieller Probleme ist, mag man nun die eine oder die andere Form der Gleichungen zu Grunde

legen, mit Ausnahme weniger Aufgaben, eine sehr schwierige. Solche schwierige Probleme bilden auch die in den vorhergehenden Abschnitten experimentell behandelten Fälle. Zur Erläuterung derselben leistet jedoch die Lösung der einfacheren Aufgabe, welche sich auf das Verhalten eines unendlich langen Hohlcyinders im homogenen magnetischen Felde bezieht, wesentliche Dienste. Ich will dieselbe im Folgenden nach der Thomson'schen Methode behandeln.

Ein unendlich langer, hohler Eisencylinder, dessen Axe mit der Axe  $z$  zusammenfällt, werde in ein ursprünglich homogenes magnetisches Feld gelegt. Die Richtung des Feldes sei jene der  $x$ .

Bezeichnet man das Potential im äusseren Raume mit  $V$ , das im Eisenkörper mit  $V'$  und das im inneren Hohlraume mit  $V''$ , so kann man den Bedingungen der Aufgabe durch folgende Formeln genügen:

$$(8) \quad \begin{cases} V = Ax + \frac{Bx}{r^2} = \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \varphi \\ V' = A'x + \frac{B'x}{r^2} = \left( A'r + \frac{B'}{r} \right) \cos \varphi \\ V'' = A''x + \frac{B''x}{r^2} = \left( A''r + \frac{B''}{r} \right) \cos \varphi. \end{cases}$$

Darin bedeuten  $A, A', A'', B, B', B''$  Constante;  $r$  die Entfernung eines Punktes von der Axe des Cylinders,  $\varphi$  den Winkel zwischen  $r$  und  $x$ .

Von diesen sechs Constanten bestimmt  $A$  die Intensität des magnetischen Feldes in unendlicher Distanz vom Eisencylinder, ist also als gegeben zu betrachten. Ferner ist  $B'' = 0$  zu setzen, wenn  $V''$  im inneren Hohlraume endlich bleiben soll, was nothwendig der Fall ist, wenn in demselben keine magnetischen Massen sich befinden. Der innere Raum stellt dann ein homogenes magnetisches Feld von der Intensität  $A''$  dar.

Es bleiben nur vier Constante zu bestimmen übrig. Zu dieser Bestimmung dienen die Bedingungsgleichungen, welche für die Grenzflächen des Eisenkörpers gelten. Ist  $a$  der äussere,  $b$  der innere Radius des Cylinders, sind ferner  $\lambda, \lambda', \lambda''$

die Leitungsfähigkeiten des äusseren, des vom Eisen erfüllten und des inneren Raumes, so müssen folgende vier Gleichungen erfüllt werden:

$$\text{für } r = a: V = V', \quad \lambda \frac{dV}{dr} = \lambda' \frac{dV'}{dr},$$

$$\text{für } r = b: V' = V'', \quad \lambda' \frac{dV'}{dr} = \lambda'' \frac{dV''}{dr}.$$

Setzt man die angenommenen Potentialwerthe ein, so verwandeln sich diese Gleichungen in die folgenden:

$$(9) \quad \begin{cases} A + \frac{B}{a^3} = A' + \frac{B'}{a^3}, & \lambda \left( A - \frac{B}{a^3} \right) = \lambda' \left( A' - \frac{B'}{a^3} \right), \\ A' + \frac{B'}{b^3} = A'' + \frac{B''}{b^3}, & \lambda' \left( A' - \frac{B'}{b^3} \right) = \lambda'' \left( A'' - \frac{B''}{b^3} \right). \end{cases}$$

Setzt man  $B'' = 0$ , so findet man zunächst für  $A''$  aus diesen Gleichungen folgenden Werth:

$$(10) \quad A'' = \frac{4\lambda\lambda'A}{(\lambda' + \lambda'')(\lambda' + \lambda) - (\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda'') \frac{b^3}{a^3}}.$$

Ist der Hohlraum des Cylinders, sowie der äussere Raum von Luft erfüllt, so ist  $\lambda = \lambda'' = 1$  zu setzen. Für  $\lambda'$  lässt sich kein allgemein gültiger Werth angeben, da dasselbe für verschiedene Eisensorten nicht gleich ist, abgesehen davon, dass es keine constante Zahl, sondern von der Intensität der Magnetisirung abhängig ist. Wirken auf das Eisen Kräfte von der Ordnung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, so kann man  $\lambda'$  etwa 200 mal so gross annehmen, als  $\lambda$ .

Unter dieser Annahme erhält man z. B. für  $a = 6,5$ ,  $b = 5,5$  die Grösse  $A'' = 0,0664 A$  oder  $A = 15,06 A''$ . Es ist also die Intensität des magnetischen Feldes in der Höhlung funfzehnmal kleiner als die Intensität des äusseren Feldes.

Die Formel (10) kann man, wenn  $\lambda = \lambda''$ , transformiren in:

$$(11) \quad \begin{aligned} A'' &= \frac{4\lambda\lambda'A}{4\lambda\lambda' + (\lambda' - \lambda)^2 \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right)}, & \text{oder in:} \\ \frac{A}{A''} &= 1 + \frac{(\lambda' - \lambda)^2}{4\lambda\lambda'} \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right), \end{aligned}$$

wofür man angenähert auch:

$$\frac{A}{A''} = 1 + \pi k \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

setzen kann.

Setzt man in dem Ausdrücke:

$$V = \left(A + \frac{B}{r^2}\right)x$$

$V$  einem bestimmten Werthe gleich, so stellt derselbe die Gleichung einer äquipotentialen Curve in der Ebene der  $x$  und  $y$  dar. Zur Untersuchung des Verlaufes einer solchen Curve ist es am einfachsten, den Werth  $V$  durch die Abscisse des im Unendlichen liegenden Curventheiles auszudrücken. Ist diese Abscisse  $x_0$ , so ist  $V = Ax_0$ , also die Gleichung der Curve:

$$\left(A + \frac{B}{r^2}\right)x = Ax_0.$$

Diese Curve trifft die äussere Wand des Cylinders in einer Abscisse  $x_1$ , welche durch:

$$\left(A + \frac{B}{a^2}\right)x_1 = Ax_0$$

bestimmt ist. Aus den Gleichungen (9) erhält man:

$$A + \frac{B}{a^2} = \left[ \frac{\lambda' + \lambda''}{2\lambda'} + \frac{\lambda' - \lambda''}{2\lambda'} \frac{b^2}{a^2} \right] A''$$

und angenähert, wenn man  $\lambda''$  gegen  $\lambda'$  vernachlässigt:

$$A + \frac{B}{a^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) A''.$$

Es ist also  $A + (B/a^2)$  etwas kleiner als  $A''$ , sodass das Verhältniss von  $x_1$  zu  $x_0$  etwas grösser ist als jenes von  $A$  zu  $A''$ . Unter der Annahme  $\lambda' = 200$ ,  $a = 6,5$ ,  $b = 5,5$  findet man:

$$A + \frac{B}{a^2} = 0,057, \quad x_1 = 17,5x_0.$$

Die Abscisse  $x_1$  entspricht nur so lange einem Durchschnittspunkte der Curve mit dem äusseren Umfange des Cylinders, als ihr Werth kleiner ist als  $a$ . Aus  $a = 17,5x_0$  folgt der höchste Werth, den  $x_0$  haben darf, damit die entsprechende Curve den Cylinder trifft; alle zu grösseren  $x_0$  gehörigen Curven gehen um den Cylinder herum.



Der weitere Verlauf einer Curve, welche den Cylinder trifft, ist innerhalb desselben gegeben durch die Gleichung:

$$\left(A' + \frac{B'}{r^2}\right)x = Ax_0.$$

Die Curve tritt in die innere Höhlung in einem Punkte, dessen Abscisse  $x_2$  durch die Gleichung:

$$\left(A' + \frac{B'}{b^2}\right)x_2 = A''x_2 = Ax_0$$

bestimmt ist. Die Fortsetzung <sup>Curve</sup> der Curve in der inneren Höhlung selbst ist eine gerade Linie.

Der Ausdruck:

$$V = Ax + \frac{Bx}{r^2}$$

ist ein Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0.$$

Er ist der reelle Theil der Function:

$$A(x + yi) + \frac{B}{y + xi}.$$

Der reelle Factor des imaginären Theiles dieser Function ist:

$$U = Ay - \frac{By}{r^2},$$

und dieser gibt das System der Kraftlinien, welche zu den äquipotentialen Curven  $V$  gehören. In gleicher Weise geben die zu  $V'$  und  $V''$  gehörigen Werthe  $U'$  und  $U''$  die Kraftlinien in dem vom Eisen erfüllten Raume und in der inneren Höhlung.

Ist  $y_0$  die Ordinate einer Kraftlinie im Unendlichen, also  $U = Ay_0$ , so ist die Gleichung dieser Linie:

$$Ay - \frac{By}{r^2} = Ay_0.$$

Dieselbe trifft die äussere Wand des Cylinders in einem Punkte, dessen Ordinate  $y_1$  durch:

$$\left(A - \frac{B}{a^2}\right)y_1 = Ay_0$$

bestimmt ist.

Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$A - \frac{B}{a^2} = 2A \cdot \left[ 1 - \frac{\lambda(\lambda' + \lambda'') + (\lambda' - \lambda'') \frac{b^2}{a^2}}{(\lambda + \lambda)(\lambda' + \lambda'') - (\lambda' - \lambda)(\lambda' - \lambda'') \frac{b^2}{a^2}} \right].$$

Der Bruch neben der Einheit innerhalb der Klammer wird um so kleiner, je grösser  $\lambda'$ . Ist  $b$  nicht  $= a$ , so ist Null die Grenze, welche für  $\lambda' = \infty$  der Werth des Bruches erreicht. Es ist dann  $y_1$  halb so gross als  $y_0$ . Es treten dann doppelt soviel Kraftlinien in den Cylinder, als durch einen gleichen Raum im Unendlichen gehen.

Für  $\lambda' = 200$ ,  $\lambda = \lambda'' = 1$  und  $a = 6,5$ ,  $b = 5,5$  ist:

$$A - \frac{B}{a^2} = 1,943 A.$$

Die Fortsetzung einer Kraftlinie innerhalb des Eisens ist durch die Gleichung:

$$\left( A' - \frac{B'}{r^2} \right) y = U'$$

gegeben.  $U'$  hat für dieselbe Kraftlinie innerhalb des Eisens nicht den Werth, welchen  $U$  für diese Linie ausserhalb des Eisens besitzt. Es kann aber  $U'$  durch die Ordinate  $y_1$  bestimmt werden, mit welcher die Curve innerhalb des Eisens beginnt. Es ist:

$$\left( A' - \frac{B'}{a^2} \right) y_1 = U'.$$

oder zufolge der Gleichungen (9):

$$U' = \frac{\lambda}{k} \left( A - \frac{B}{a^2} \right) y_1$$

und mit Rücksicht auf die zwischen  $y_1$  und  $y_0$  bestehende Beziehung:

$$U' = \frac{\lambda}{k} A y_0.$$

Die Gleichung des im Eisen liegenden Theiles der Kraftlinie ist demnach:

$$\left( A' - \frac{B'}{r^2} \right) y = \frac{\lambda}{k} A y_0.$$

Diese Linie trifft die innere Wand des Cylinders in einem Punkte, dessen Ordinate  $y_2$  durch:

$$\left( A' - \frac{B'}{b^2} \right) y_2 = \frac{\lambda'' A'}{k'} y_2 = \frac{\lambda}{k} A y_0$$

bestimmt ist. Es ist also:

$$y_2 = \frac{\lambda A}{\lambda'' A'} y_0.$$

Wenn  $\lambda = \lambda''$ , so ist das Verhältniss von  $y_2$  zu  $y_0$  dem von  $A$  zu  $A''$  gleich. Im Hohlraume setzt sich die Kraftlinie als zur Axe der  $x$  parallele Gerade fort. Es liegen in demselben die Kraftlinien weiter auseinander, als im Unendlichen; in demselben Maasse, in welchem  $A$  grösser ist als  $A''$ .

Damit eine Kraftlinie in den Hohlraum eintrete, muss  $y_2$  kleiner als  $b$  sein;  $y_2 = b$  gibt die obere Grenze für die den Hohlraum durchsetzenden Linien.

Mit der Bestimmung des Verhaltens eines Eisencylinders im homogenen magnetischen Felde sind zugleich die analogen Strömungsaufgaben gelöst, z. B. die Aufgabe der Electricitätsströmung in einer unbegrenzten leitenden Ebene, in welche ein zweiter ringförmiger Leiter von anderem Leitungsvermögen eingesetzt ist.

Die Electroden sind zwei parallele, in grosser Entfernung vom Cylinder befindliche gerade Linien oder auch zwei auf den entgegengesetzten Seiten eines Durchmessers des Ringes liegende, vom Ringe unendlich weit entfernte Punkte.

Das Verhältniss von  $A''$  zu  $A$  gibt das Verhältniss der Stromdichte innerhalb des Ringes zu jener im Unendlichen. Es ist nun zu bemerken, dass für  $\lambda = \lambda''$  nach der Formel (11) das Verhältniss von  $A''$  zu  $A$  sich nicht ändert, wenn man  $\lambda$  und  $\lambda'$  gegeneinander vertauscht. Die Strömung in dem vom Ringe eingeschlossenen Raume wird also in gleicher Weise vermindert, mag der Ring aus einem besseren oder aus einem schlechteren Leiter bestehen, als der übrige Theil der Ebene.

Vertauscht man  $\lambda$  und  $\lambda'$  gegeneinander, so hat dies zur Folge, dass die Constanten  $B, B'$  ihr Zeichen wechseln. Durch diese Constanten ist aber der Charakter der Niveaulinien des Potentials und der Kraftlinien oder im jetzigen Falle der Strömungslinien bestimmt. Die Gleichungen der beiden Liniensysteme sind von derselben Form und unterscheiden sich im wesentlichen nur dadurch, dass in beiden  $B$  und  $B'$  mit entgegengesetzten Zeichen enthalten sind. Aendern  $B$  und  $B'$  ihre Zeichen, so nehmen demnach die Niveaulinien den Charakter der Strömungslinien an und umgekehrt.

Die Formeln (8) und (9) liefern noch die Lösung einer zweiten Aufgabe. In der Axe des Eisencylinders liege ein unendlich langer Magnet von sehr kleinen Querdimensionen. Die Richtung seiner magnetischen Axe falle in die Axe der  $x$ , die Grösse dieses Momentes, auf die Längeneinheit des Magnets reducirt, sei  $m$ , dann ist das Potential desselben durch  $2mx/r^2$  gegeben. Sind ausser diesem Magnet keine anderen magnetischen Massen im Raume vorhanden, dann bestehen die Bedingungen  $V=0$  für  $r=\infty$  und  $V''=2mx/r^2$  für  $r=0$ . Es sind also von den sechs Constanten  $A, B, A', B', A''$  und  $B''$  gegeben, und zwar  $A=0, B'=2m$ , und die Aufgabe ist damit eine vollständig bestimmte.

Drückt man mit Hülfe der Gleichungen (9) zunächst  $B$  durch  $B'$  aus, so erhält man:

$$B = \frac{4\lambda'\lambda''B'}{(\lambda'+\lambda)(\lambda'+\lambda'') - (\lambda'-\lambda)(\lambda'-\lambda'') \frac{b^2}{a^2}}.$$

Wenn  $\lambda=\lambda''$ , so besteht zwischen  $B$  und  $B'$  dieselbe Beziehung wie zwischen  $A''$  und  $A$ .

$B$  bestimmt die Fernwirkung des angenommenen Magnetes ausserhalb des Eisencylinders. In demselben Maasse, in welchem eine äussere constante Kraft in der Höhlung des Cylinders geschwächt ist, erscheint also auch die Fernwirkung des eingeschlossenen Magnetes vermindert.

Einen Magnet von der vorausgesetzten Beschaffenheit kann man darstellen durch zwei geradlinige electriche Ströme, welche in der Ebene der  $y$ , der Axe des Cylinders parallel, in sehr kleinen Entfernungen von derselben und zwar in entgegengesetzten Richtungen fliessen. Man kann aber nach derselben Formel auch den Einfluss des Eisencylinders auf die Fernwirkung jedes der einzelnen Ströme für sich berechnen.

Geht der Strom durch einen Punkt der  $y$ -Axe, in der Entfernung  $\beta$  vom Mittelpunkte, ist die Intensität des Stromes  $J$ , so ist sein electromagnetisches Potential:

$$U = 2J \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y-\beta}{x};$$

für kleine Werthe von  $\beta$  kann man den Näherungswerth:

$$U = 2J \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{2J\beta x}{r^2},$$

oder in Polarcoordinaten:

$$U = 2J\varphi - \frac{2J\beta \cos \varphi}{r}$$

setzen.

Durch die Anwesenheit des Eisencylinders wird nur der zweite Theil von  $U$  beeinflusst, und da dieser einen sehr kleinen Werth besitzt, auch die Fernwirkung des Stromes nur wenig verändert.

Man kann die Reihenentwicklung von  $U$  auch bis zu höheren Potenzen von  $\beta$  vornehmen. Auch die folgenden Glieder der Reihe sind Integrale der Differentialgleichung für das Potential. Durch Multiplication mit den entsprechenden Potenzen von  $r$  erhält man eine zweite Reihe von particulären Integralen, mit deren Hülfe man den Grenzbedingungen genügen kann.

#### IV. Inductionsversuche.

Die Veränderungen, welche ein magnetisches Feld durch einen Eisenkörper, speciell durch einen Eisencylinder erfährt, können auch durch Inductionsversuche nachgewiesen werden. Führt man z. B. eine Drahtrolle, deren Axe parallel dem magnetischen Meridian ist, aus grösserer Distanz in das Innere eines vertical gestellten Eisencylinders, sodass die Axe der Rolle immer dieselbe Richtung beibehält, so erhält man in der Rolle einen Inductionsstrom. Er hat dieselbe Richtung wie der Strom, den man erhält, wenn man im freien Raume die Axe der Rolle aus dem Meridian um einen rechten Winkel dreht. Es entspricht also beiden Fällen eine Potentialänderung in gleichem Sinne. Der durch Drehung der Rolle erzielte Strom ist stärker, bei Anwendung des 10 cm hohen Eisencylinders z. B. im Verhältniss von 10 zu 9.

Zieht man die Drahtrolle aus dem Cylinder heraus, so erhält man einen Strom von entgegengesetzter Richtung.

Der Versuch kann auch so angeordnet werden, dass man die Rolle in ihrer Stellung belässt und den Eisencylin-

der über dieselbe schiebt und dann von derselben wieder abhebt.

Die schwachen Ströme, welche die Horizontalcomponente in kleinen Drahtrollen inducirt, können natürlich nur mit einem sehr empfindlichen Galvanometer nachgewiesen werden. Zur Demonstration solcher Ströme wird man besser ein intensiveres magnetisches Feld verwenden. Der Electromagnet von Ruhmkorff liefert z. B. ein solches. Dasselbe ist bekanntlich auch in einer beträchtlichen Ausdehnung nahe homogen, wenn man die Pole in grosse Eisenplatten endigen lässt.

Die Schirmwirkung eines Eisencylinders kann man nun in sehr einfacher und auffallender Weise zeigen. Bringt man die Rolle aus grösserer Entfernung in das electromagnetische Feld, so erhält man einen Inductionsstrom von einer bestimmten Richtung und Intensität. Schiebt man von oben über die Rolle einen Eisencylinder, so erhält man einen Strom von entgegengesetzter Richtung und nahezu derselben Intensität, gerade so, als hätte man die Rolle aus dem Felde herausgehoben oder den magnetisirenden Strom unterbrochen.

Bei diesem Versuche werden die Kraftlinien, welche durch die Inductionsspirale parallel zur Axe derselben gehen, veranlasst, aus dem von den Windungen umspannten Raume in den Eisencylinder zu treten, wobei sie die auf den entgegengesetzten Seiten liegenden Theile der Windungen auch in entgegengesetzten Richtungen durchschneiden. Man kann einen analogen Versuch auch mit Windungen ausführen, deren Ebenen parallel zur Richtung des Feldes gestellt sind. Schiebt man durch dieselben eine Eisenplatte, so gehen die Kraftlinien in symmetrischer Weise in die Platte hinein und aus der Platte heraus. Bedeckt man die Platte auf der einen Seite mit einem gebogenen Eisenstück, so erhält man einen Strom von der einen oder der anderen Richtung, je nachdem die Windungen dem einen oder dem anderen Rande der Platte näher liegen, indem die Kraftlinien theils nach der einen, theils nach der anderen Seite hin in den gebogenen eisernen Deckel treten.

Die Schirmwirkung eines Eisencylinders lässt sich noch durch eine andere Art von Inductionsversuchen darlegen mit einem Drahte, welcher in einigen Windungen um die Wand des Cylinders herumgeführt ist, sodass von jeder Windung ein Theil in der inneren Höhlung, der andere aber ausserhalb des Cylinders liegt. Bewegt man diese Windungen längs der Peripherie des ruhenden Eisencylinders, so erhält man einen Inductionsstrom, dessen Richtung und Intensität von der anfänglichen Stellung und von der Endlage der Windungen abhängig ist. Bei einer Bewegung aus der äquatorialen in die axiale Lage geht der ausserhalb des Cylinders liegende Theil jeder Windung durch ein Feld, in welchem die Kraftlinien condensirt sind; der andere Theil der Windung aber geht durch ein Feld von sehr geringer Intensität. Da die eine Hälfte der Windungen mehr Kraftlinien schneidet, als die andere, so entsteht in denselben ein Strom, dessen Intensität durch die Differenz der geschnittenen Kraftlinien bestimmt ist.

Man erhält denselben Strom, wenn man mit den Windungen zugleich den Eisencylinder bewegt, sodass er sich um seine Axe dreht. Dies ist der Fall der Gramme'schen Maschine. Durch die Drehung des Eisencylinders um seine Axe wird die Vertheilung der Kraftlinien im Felde nicht geändert, insoweit wenigstens, als von den Störungen, welche der remanente Magnetismus des Eisens verursacht, abgesehen wird. Es zeigt dies auch ein directer Versuch. Hält man nämlich die Drahtwindungen fest und dreht den Eisenring allein, so erhält man keinen Strom oder nur einen sehr schwachen, die Veränderungen des remanenten Magnetismus begleitenden Strom.

Man erhält jedoch andere Resultate, wenn die ausgeführten Bewegungen nicht drehende um die Axe des Cylinders, sondern drehende um eine andere Axe, oder progressive sind. Damit die Windungen progressiv bewegt werden können, müssen sie natürlich eine grössere Weite erhalten. Führt man eine solche Bewegung der Windungen aus bei ruhendem Ringe, so erhält man einen Strom. Hält man die Windungen fest und gibt dem Ringe dieselbe progressive Be-



wegung, wie vorhin den Windungen, so erhält man einen Strom von derselben Intensität, aber von entgegengesetzter Richtung. Bewegt man in derselben Weise die Windungen und den Ring zusammen, so erhält man keinen Strom, obgleich in letzterem Falle die innerhalb des Ringes liegenden Theile der Windungen während der Bewegung in einem viel schwächeren magnetischen Felde sich befinden, als die Theile ausserhalb des Ringes.

Um diese Thatsache unter ganz bestimmten Bedingungen zu constatiren, habe ich noch folgenden Versuch ausgeführt.

Zwei Klemmen wurden an den Ecken einer Tischplatte befestigt und mit einem Galvanometer verbunden. In die Klemmen wurden zwei steife bogenförmig gekrümmte Kupferdrähte eingeführt und die Enden dieser Drähte durch einen geradlinigen, längs einer Latte gespannten Kupferdraht verbunden. Die Verbindungslinie der Klemmen, sowie die Latte wurden senkrecht gegen den magnetischen Meridian gestellt, sodass die bogenförmigen Drähte in zwei verticalen, dem magnetischen Meridian parallelen Ebenen zu stehen kamen. Wurde die Latte in der Richtung des magnetischen Meridians progressiv bewegt, so inducirte die verticale Componente des Erdmagnetismus in der Drahtleitung einen Strom, dessen Grösse mit dem Galvanometer gemessen wurde.

Es wurde nun mit der Latte eine Eisenröhre verbunden, der Leitungsdraht durch diese Röhre geführt und die Latte in derselben Weise bewegt, wie vorhin. Der Inductionsstrom hatte genau dieselbe Intensität, wie in dem früheren Falle.

Aus der Gleichheit der beiden Ströme folgt weiter, dass die progressive Bewegung eines geschlossenen Leiters in einem homogenen magnetischen Felde auch dann von keinem Inductionsstrome begleitet ist, wenn ein Theil des Leiters von einer Eisenröhre umgeben ist, und dies lässt sich auch durch einen analogen Versuch, wie die beiden früheren, direct nachweisen.

Die electromotorische Kraft des Stromes, welche durch die angegebene Bewegung eines Drahtes hervorgerufen wird, kann in verschiedener Weise ausgedrückt werden.

1. Durch die Anzahl der Kraftlinien, welche der Leiter

während seiner Bewegung durchschneidet. Die Richtung der electromotorischen Kraft gibt folgende Regel: Denkt man sich in dem magnetischen Felde eine Figur, sodass die Kraftlinien in ihr von den Füßen zum Kopfe gehen, mit dem Gesichte nach der Bewegungsrichtung des Leiters gewendet, so geht die electromotorische Kraft gegen die rechte Seite der Figur. Bewegen sich die Kraftlinien, und sieht die Figur nach der Richtung dieser Bewegung, so geht die electromotorische Kraft gegen die linke Seite der Figur.

2. Durch die Aenderung des Potentials der Verticalcomponente auf die gesammte Strombahn.

3. Durch die Arbeit, welche bei der Bewegung des Drahtes geleistet werden muss gegen die electromagnetische Kraft, welche die Verticalcomponente auf den von der Einheit des Stromes durchflossenen Draht ausübt.

Alle drei Regeln führen in gleich einfacher Weise zu demselben Resultate, dass die electromotorische Kraft gleich ist der Verticalcomponente, multiplicirt mit dem Rechtecke, dessen eine Seite der verschobene Draht, dessen andere Seite die Länge der Verschiebung ist.

Für den Fall des von der Eisenröhre umgebenen Drahtes liefert jedoch nur die zweite Regel ohne weiteres das richtige Resultat.

Bei der Anwendung der ersten Regel hat man die Kraftlinien eines Magnetes, also auch die des Erdmagnetismus wie physische Linien oder Fäden zu betrachten, welche mit ihrem Ausgangs- und Endpunkte fest verbunden und unzerreissbar sind. Bewegt man eine Eisenröhre durch das magnetische Feld, so treten fortwährend Kraftlinien aus dem vorderen Theile der Röhre in den hinteren Theil derselben, wobei sie den inneren Hohlraum durchsetzen. Der Leitungsdraht wird also, wenn er sammt der Röhre bewegt wird, ebensovielen Kraftlinien schneiden, als wenn er von der Eisenröhre nicht umgeben wäre.

Was endlich die dritte der angeführten Regeln anbelangt, so könnte man nach derselben erwarten, dass der mit der Eisenröhre umgebene Draht einen relativ sehr schwachen Inductionsstrom liefern werde, nachdem die vom Erdmagne-

tismus herrührende electromagnetische Kraft im Inneren der Röhre thatsächlich viel schwächer ist, als ausserhalb derselben.

Da nun die dritte Regel gleich der zweiten aus dem Principe abgeleitet ist, dass die durch den Inductionsstrom entwickelte Wärme äquivalent ist der bei der Bewegung des Leiters aufgewendeten Arbeit, so folgt, dass die zur Verschiebung der Eisenröhre und des in ihr enthaltenen Drahtes nöthige Arbeit durch die in der Höhlung wirkende electromagnetische Kraft nicht vollständig bestimmt ist, sondern dass noch andere Kräfte dabei ins Spiel kommen. Diese Kräfte rühren von der Einwirkung des Stromes auf die durch die Erdkraft magnetisirte Röhre her. Man kann die innerhalb der Röhre wirkende geringe magnetische Kraft betrachten als die Resultante zweier Kräfte, der erdmagnetischen Kraft und derjenigen, mit welcher die durch die Erde magnetisirte Röhre in ihrer Höhlung wirkt, und welche der erdmagnetischen Kraft entgegengesetzt ist. Das Entgegenwirken dieser beiden Kräfte bedingt eben die Schwächung des magnetischen Feldes innerhalb der Röhre. Fliesst nun in der Richtung der Axe der Röhre ein Strom, so kann man auch die auf diesen wirkende Kraft in die zwei Theile zerlegen, in die ungeschwächte Erdkraft und in die entgegengesetzte Kraft der Röhre. Mit einer gleich grossen Kraft wirkt aber auch der Strom auf die Röhre zurück. Wird also der Stromleiter sammt der Röhre bewegt, so tritt die Wechselwirkung zwischen Röhre und Strom ausser Spiel, und die zu leistende Arbeit ist durch die ungeschwächte electromagnetische Erdkraft bestimmt.

Aus dieser Darlegung geht nun auch hervor, dass ein Strom, welcher durch eine Eisenröhre in der Richtung der Axe fliesst, dieser Röhre eine progressive Bewegung ertheilt, welche senkrecht zur Axe der Röhre und zur magnetisirenden Kraft der Erde gerichtet ist.

Ich habe noch einige analoge Versuche mit einem eisenen Hohlprisma ausgeführt. Von zwei rechteckigen Eisenplatten von 15 cm Länge, 10 cm Breite und 1,5 cm Dicke

wurde die eine mit zwei zu ihren Langseiten parallelen eisernen Leisten versehen, sodass sie, mit diesen auf die andere Platte gelegt, ein hohles Parallelepiped bildete. Ueber die untere Platte kann ein schmaler, rechteckiger, mit Kupferdraht umwickelter Holzrahmen geschoben werden. Der eine Theil jeder Windung liegt also in dem Hohlraume des Prismas, der andere ausserhalb. Es ist dies eine Vorrichtung, welche dem Eisenringe mit den um seine Wand laufenden Windungen analog ist.

Legt man das Prisma mit der Breitseite horizontal, sodass die Langseite dem magnetischen Meridian parallel läuft, so kann man die Verticalcomponente des Erdmagnetismus zur Induction benutzen. Stellt man das Prisma vertical, mit der Breitseite senkrecht gegen den magnetischen Meridian, so kann die Horizontalcomponente verwendet werden. Aus dem Verhältniss der in beiden Fällen beobachteten Inductionsströme kann man auch erkennen, ob der etwa vorhandene remanente Magnetismus einen Einfluss auf die Erscheinungen hat oder nicht. Auch kann man, um diesen Punkt zu prüfen, die beiden das Prisma bildenden Platten in verschiedenen Arten übereinander legen.

Bringt man das Prisma etwa in die erste der oben angegebenen Lagen, hält es fest und verschiebt den Drahtrahmen, so zeigt das Galvanometer einen Strom an. Man erhält einen Strom von gleicher Intensität, aber entgegengesetzter Richtung, wenn man den Drahtrahmen festhält und den Eisenkörper in derselben Richtung, wie früher, bewegt.

Verschiebt man das Prisma zugleich mit den Drahtwindungen, so erhält man keinen Strom. Es sind dies dieselben Resultate, welche man auch mit dem Cylinder erhält, wenn man denselben nicht um seine Axe dreht, sondern progressiv verschiebt. Aus dem oben festgestellten Verhalten der Kraftlinien in jedem solchen Falle lässt sich das Ergebniss eines jeden Versuches leicht bestimmen.

---

# **XI. Ueber die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes; von J. Stefan.**

(Aus dem 85. Bde. d. Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wiss. zu Wien. II. Abth. vom 11. Mai 1882, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Das Potential  $V$  eines Feldes, welches eine Symmetrie-axe besitzt, ist eine Function zweier Variablen. Als solche können die auf der Axe der Symmetrie gemessene Abscisse  $x$  eines Punktes und dessen Abstand von dieser Axe  $\varrho$  gewählt werden. Für alle Punkte des Feldes, in welchem sich keine zum Potential beitragenden Massen oder Quellen befinden, genügt  $V$  der Gleichung:

$$(1) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dV}{d\varrho} = 0.$$

Die Gleichung  $V = \alpha$ , unter  $\alpha$  eine arbiträre Constante verstanden, gibt das System der Niveauflächen des Feldes, oder das System der Niveaulinien in einer die Axe enthaltenden Ebene.

Eine Gleichung  $U = \beta$ , in welcher  $U$  eine Function von  $x$  und  $\varrho$  und  $\beta$  eine arbiträre Constante bedeutet, gibt ein zweites System von Rotationsflächen oder ein zweites System von Linien in einer axialen Ebene. Diese Linien sind Strom- oder Kraftlinien, sobald sie die Niveaulinien rechtwinklig schneiden. Sie thun das, wenn die Function  $U$  die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{dU}{dx} \frac{dV}{dx} + \frac{dU}{d\varrho} \frac{dV}{d\varrho} = 0$$

zu einer identischen macht.

Die Gleichung (2) kann man durch die Annahme:

$$(3) \quad \frac{dU}{dx} = -R \frac{dV}{d\varrho}, \quad \frac{dU}{d\varrho} = R \frac{dV}{dx}$$

befriedigen.  $R$  bedeutet eine noch zu bestimmende Function von  $x$  und  $\varrho$ .  $R$  muss der Bedingung:

$$-\frac{d}{d\varrho} \left( R \frac{dV}{d\varrho} \right) = \frac{d}{dx} \left( R \frac{dV}{dx} \right)$$

genügen. Führt man die Differentiationen aus, so reducirt sich diese Bedingung mit Hülfe der Gleichung (1) auf:

$$\left( \frac{dR}{d\varrho} - \frac{R}{\varrho} \right) \frac{dV}{d\varrho} + \frac{dR}{dx} \frac{dV}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung wird unabhängig von der speciellen Beschaffenheit der Function  $V$  durch die Annahme:

$$R = a\rho$$

erfüllt, worin  $a$  eine beliebige Constante bedeutet. Zur Bestimmung von  $U$  hat man nunmehr die Gleichungen:

$$(4) \quad \frac{dU}{dx} = -a\rho \frac{dV}{d\rho}, \quad \frac{dU}{d\rho} = a\rho \frac{dV}{dx}.$$

Durch schickliche Wahl der Constanten  $a$  kann man der Function  $U$  eine bestimmte physikalische Bedeutung geben. Ist z. B. das Feld ein electrisches Stromfeld, und nimmt man  $a = -2\pi\lambda$ , unter  $\lambda$  das Leitungsvermögen des Mediums verstanden, so wird:

$$U = -2\pi\lambda \int \frac{dV}{dx} \rho d\rho.$$

Denkt man sich die Integration von 0 bis  $\rho$  ausgeführt, so bedeutet  $U$  die Electricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt  $\pi\rho^2$  fließt.

Für ein electrisches oder magnetisches Kraftfeld kann man  $U$  als die Anzahl der durch den Querschnitt  $\pi\rho^2$  gehenden Kraftlinien definiren.  $\lambda$  bedeutet dann die dielectriche Constante oder die magnetische Leitungsfähigkeit des Mediums und ist  $= 1 + 4\pi k$ , wenn  $k$  die Electricisirungszahl, resp. Magnetisirungszahl des Mediums ist.

Handelt es sich nur um die Befriedigung der analytischen Bedingungen, so kann man  $a = 1$  setzen. Die Gleichungen (4) verwandeln sich dann in die gewöhnlich gebrauchten:

$$(5) \quad \frac{dU}{dx} = -\rho \frac{dV}{d\rho}, \quad \frac{dU}{d\rho} = \rho \frac{dV}{dx}.$$

Die additive Constante, welche jedem Werthe von  $U$ , der diesen Gleichungen genügt, hinzugefügt werden kann, kann man auch  $= 0$  setzen.

Die Kraftlinien kann man ebensowohl durch die Gleichung  $U = \beta$ , als auch durch eine andere ausdrücken, indem man irgend eine Function von  $U$  einer arbiträren Constanten gleich setzt. In besonderen Fällen kann es auch einfacher sein, eine Function von  $U$  zur Bestimmung der Kraftlinien zu wählen. Es bietet jedoch ihre Darstellung

durch  $U = \beta$  besondere Vortheile, welche aus der physikalischen Bedeutung von  $U$  ableitbar, in analytischer Beziehung aber in dem folgenden Satze begründet sind:

Gehören zu den Potentialfunctionen  $V_1, V_2, V_3, \dots$  der Reihe nach die Stromfunctionen  $U_1, U_2, U_3, \dots$ , so entspricht dem Potential:

$$(6) \quad V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + \dots$$

die Stromfunction:

$$(7) \quad U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 + \dots$$

$C_1, C_2, C_3, \dots$  bedeuten beliebige Constante. Die Richtigkeit dieses Satzes ist ohne weiteres klar. Werden nämlich die Gleichungen (4) oder (5) durch jedes der Paare  $(U_1, V_1), (U_2, V_2), \dots$  für sich erfüllt, so werden sie es auch durch  $U$  und  $V$ .

Eine im Anfangspunkte der Coordinaten befindliche Masse  $m$  gibt ein Potential:

$$V = \frac{m}{r}.$$

wenn  $r$  die Distanz eines Punktes vom Ursprung der Coordinaten bezeichnet. Die zweite der Gleichungen (5) liefert:

$$\frac{dU}{dq} = -\frac{mxq}{r^3}, \quad U = \frac{mx}{r}.$$

Führt man den Winkel  $\theta$  ein, welchen  $r$  mit  $x$  bildet, so wird:

$$U = m \cos \theta.$$

Die durch den Anfangspunkt gehenden geraden Kraftlinien sind also durch die Gleichung  $m \cos \theta = \beta$  auszudrücken.

Befinden sich auf der Axe der  $x$  in verschiedenen Punkten die Massen  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , so ist das Potential in einem Punkte, deren Abstände von diesen Massen  $r_1, r_2, r_3, \dots$  sind, gegeben durch:

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots$$

Die zugehörige Stromfunction ist:

$$U = m_1 \cos \theta_1 + m_2 \cos \theta_2 + m_3 \cos \theta_3 + \dots,$$

wenn  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  die Winkel bedeuten, welche  $r_1, r_2, r_3, \dots$  mit der Axe der  $x$  bilden.



Für zwei gleich grosse, aber entgegengesetzt bezeichnete Massen  $m_1 = m$ ,  $m_2 = -m$  ist:

$$U = m (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

welche Gleichung bekannt ist als die Gleichung der magnetischen Curven eines aus zwei einfachen Polen bestehenden Magnetes.

Will man diese Gleichung durch eine directe Betrachtung ableiten, so hat man zunächst die Anzahl der von einer punktförmigen Masse  $m$  nach allen Seiten des Raumes ausgehenden Kraftlinien festzustellen. Sei diese Anzahl  $4\pi m$ . In einen geraden Kegel, dessen Spitze in  $m$  und dessen Erzeugende mit der Axe den Winkel  $\theta$  bildet, fallen dann  $2\pi m(1 - \cos \theta)$  Kraftlinien. Befindet sich auf der Axe eine zweite Masse  $m_1$ , und construirt man von  $m_1$  als Spitze einen zweiten Kegel mit dem Winkel  $\theta_1$ , so liegen in diesem  $2\pi m_1(1 - \cos \theta_1)$  von der Masse  $m_1$  ausgehende Kraftlinien. Schneiden sich die beiden Kegel, so gehen durch die von dem Schnittkreise begrenzte Fläche  $2\pi m(1 - \cos \theta) + 2\pi m_1(1 - \cos \theta_1)$  Kraftlinien. Die continuirliche Folge der Kreise, für welche die Summe denselben Werth hat, bildet eine Fläche, durch welche keine Kraftlinie hindurchgeht. Jeder Meridianschnitt dieser Fläche ist also eine resultirende Kraftlinie.

Aus dem obigen Satze kann man noch den folgenden ableiten: Enthalten ein Potential  $V$  und die zugehörige Stromfunction  $U$  eine oder mehrere Constanten, so entsprechen sich auch die nach diesen Constanten genommenen Differentiale und Integrale von  $V$  und  $U$  als Potentiale und Stromfunctionen.

Ein einfaches Beispiel zu diesem Satze bildet der Fall einer gleichförmig mit Masse belegten Strecke. Ist  $da$  ein Element dieser Strecke,  $\varepsilon$  die Masse der Längeneinheit, so ist  $\varepsilon da/r$  das Potential,  $\varepsilon \cos \theta da$  die Stromfunction dieses Elementes. Es ist aber:

$$\cos \theta = - \frac{dr}{da}.$$

Die Stromfunction der ganzen Strecke ist somit das über ihre Länge ausgedehnte Integral:

$$-\int \varepsilon \frac{dr}{da} da = \varepsilon(r_1 - r_2);$$

$r_1$  und  $r_2$  bedeuten die Abstände eines Punktes von den Enden der Strecke. Die Kraftlinien sind Hyperbeln, welche die Endpunkte der Strecke zu Brennpunkten haben.

Wenn man die Gleichungen (4) oder (5) nach  $x$  differenziert, so ändern sie sich nur insofern, dass an Stelle der Functionen  $U$  und  $V$  ihre Differentialquotienten treten. Daraus ergibt sich nun der Satz: Gehört zu einem Potential  $V$  die Stromfunction  $U$ , so gehört zum Potential  $dV/dx$  die Stromfunction  $dU/dx$ .

Dieser Satz führt zu einer sehr einfachen Bestimmung der Stromfunction in den Coordinaten  $x$  und  $\varrho$  für den Fall, dass das Potential  $U$  durch eine nach fallenden Potenzen des Radius vectors geordnete Reihe gegeben ist.

Gewöhnlich wird das Potential in einer solchen Reihe als Function der beiden Variablen  $r$  und  $\theta$  dargestellt und:

$$(8) \quad V = \frac{A_0}{r} + \frac{A_1 P_1}{r^2} + \frac{A_2 P_2}{r^3} + \dots$$

geschrieben.  $A_0, A_1, A_2, \dots$  sind willkürlich zu wählende Constante,  $P_1, P_2, P_3, \dots$  sind die Kugelfunctionen der einen Veränderlichen  $\cos \theta$ . Es ist:

$$P_1 = \cos \theta, \quad P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}, \dots$$

Die Producte aus  $P_1, P_2, P_3, \dots$  in  $r, r^2, r^3, \dots$  sind ganze Functionen von  $x$  und  $r$ . Führt man in diese:

$$r^2 = x^2 + \varrho^2$$

ein, so verwandeln sie sich in ganze Functionen von  $x$  und  $\varrho$ . Es ist:

$$r P_1 = x, \quad r^2 P_2 = x^2 - \frac{2 \cdot 1}{2^2} \varrho^2, \dots$$

und allgemein:

$$\begin{aligned} r^n P_n = x^n - \frac{n(n-1)}{2^2} x^{n-2} \varrho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 4^2} x^{n-4} \varrho^4 \\ - \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} x^{n-6} \varrho^6 + \dots \end{aligned}$$

Damit sind auch die einzelnen Glieder der Reihe (8) als Functionen von  $x$  und  $\varrho$  bestimmt. Die Berechnung der

ihnen entsprechenden Ausdrücke von  $U$  mit Hülfe der Gleichungen (5) wäre jedoch eine sehr umständliche.

Die Functionen  $P$  lassen sich aber auch durch die Differentiation von  $1/r$  nach  $x$  ableiten. Es ist allgemein:

$$\frac{P_n}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Nun entspricht dem Potentiale  $1/r$  die Stromfunction  $x/r$  oder  $dr/dx$ , und sowie die Glieder der Reihe (8) durch die aufeinander folgenden Differentialquotienten von  $1/r$ , sind die entsprechenden Glieder der Stromfunction durch die aufeinander folgenden Differentialquotienten von  $dr/dx$  bestimmt. Daraus fließt nunmehr folgender Satz:

Ist das Potential durch die Formel:

$$(8) \quad V = \frac{A_0}{r} + \frac{A_1 P_1}{r^3} + \frac{A_2 P_2}{r^5} + \dots$$

gegeben, worin  $A_0, A_1, A_2, \dots$  Constante,  $P_1, P_2, \dots$  aber die Kugelfunctionen der einen Veränderlichen  $\cos \theta$  bedeuten, so ist die zugehörige Stromfunction durch:

$$(9) \quad U = A_0 \frac{dr}{dx} - \frac{A_1}{1} \frac{d^2 r}{dx^3} + \frac{A_2}{1 \cdot 2} \frac{d^3 r}{dx^5} + \dots$$

bestimmt.

Ist z. B. im Anfangspunkt der Coordinaten ein sehr kurzer Magnet, dessen magnetisches Moment  $m$  mit der Axe der  $x$  gleiche Richtung hat, so ist das Potential:

$$V = \frac{m \cos \theta}{r^3} = \frac{mx}{r^3}.$$

Die Stromfunction ist demnach:

$$U = -m \frac{d^2 r}{dx^3} = -m \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{r^3} \right) = -\frac{m \rho^2}{r^3}.$$

Die den einzelnen Gliedern der Reihe (8) entsprechenden Ausdrücke der Stromfunction lassen sich auch leicht als Functionen von  $r$  und  $\theta$  darstellen. Führt man diese Variablen ein, so verwandelt sich die Gleichung (1) in:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0.$$

Die Bedingungen der Orthogonalität der durch  $V$  und  $U$  repräsentirten Flächen oder Linien sind dann:

$$(10) \quad \frac{dU}{dr} = -\sin\theta \frac{dV}{d\theta}, \quad \frac{dU}{d\theta} = r^2 \sin\theta \frac{dV}{dr}.$$

Setzt man:  $V = \frac{A_n P_n}{r^{n+1}},$

so erhält man aus der ersten der Gleichungen (10):

$$U = \frac{A_n}{nr^n} \sin\theta \frac{dP_n}{d\theta}.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (10) folgt:

$$U = -\frac{(n+1)A_n}{r^n} \int P_n \sin\theta d\theta,$$

und dieser Ausdruck ist mit dem vorhergehenden identisch, wenn man die angezeigte Integration von 0 bis  $\theta$  ausführt.

Mit Hülfe der durch die Gleichung:

$$P_{n+1} - P_{n-1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \sin\theta \frac{dP_n}{d\theta},$$

ausgedrückten Eigenschaft der Functionen  $P$  erhält man  $U$  noch in einer dritten Form:

$$U = \frac{A_n}{r^n} \cdot \frac{n+1}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}).$$

Alle diese Formen von  $U$  sind identisch mit dem entsprechenden Gliede der Reihe (9).

Die soeben abgeleiteten Werthe von  $U$  kommen auch zur Anwendung, wenn das Potential  $V$  durch eine nach steigenden Potenzen von  $r$  geordnete Reihe gegeben ist. Diese Reihe ist:

$$V = B_0 + B_1 P_1 r + B_2 P_2 r^2 + B_3 P_3 r^3 + \dots$$

$B_0, B_1, B_2 \dots$  sind willkürliche Constante. Die einzelnen Glieder dieser Reihe sind ganze Functionen von  $x$  und  $r$  oder  $x$  und  $\varrho$ . Auch die Formeln (5) lassen sich leicht auf diese Functionen anwenden. Die Bestimmung von  $U$  als Function von  $x$  und  $\varrho$  gestaltet sich aber einfacher, wenn man  $V$  als eine nach steigenden Potenzen von  $\varrho$  geordnete Reihe formirt. Aus der Gleichung (1) ergibt sich diese Reihe in folgender Gestalt:

$$V = Q - \frac{\varrho^2}{2^2} \frac{d^2 Q}{dx^2} + \frac{\varrho^4}{2^2 \cdot 4^2} \frac{d^4 Q}{dx^4} - \dots$$

$Q$  ist nur von  $x$  abhängig und bedeutet das Potential für die in der Axe liegenden Punkte. Die zweite der Gleichungen (5) gibt sofort den Werth von  $U$ , und man hat nun noch folgenden Satz:

Ist das Potential durch die Reihe

$$(11) \quad V = Q - \frac{q^2}{2^2} \frac{d^2 Q}{dx^2} + \frac{q^4}{2^3 \cdot 4^2} \frac{d^4 Q}{dx^4} + \dots$$

gegeben, so ist die zugehörige Stromfunction durch:

$$(12) \quad U = \frac{q^2}{2} \frac{dQ}{dx} - \frac{q^4}{2^3 \cdot 4} \frac{d^3 Q}{dx^3} + \frac{q^6}{2^5 \cdot 4^2 \cdot 6} \frac{d^5 Q}{dx^5} - \dots$$

bestimmt.

Ist z. B. das Feld ein homogenes, also:

$$V = Ax,$$

so sind die der Axe der  $x$  parallel laufenden Kraftlinien durch die Gleichung:

$$U = \frac{Aq^2}{2}$$

auszudrücken.

Enthält der Ausdruck des Potentials beide Formen (8) und (11), so ist auch die Stromfunction aus den entsprechenden Formen (9) und (12) zusammengesetzt. Wird z. B. in ein homogenes magnetisches Feld ein sehr kurzer Magnet gelegt, so ist das Potential:

$$U = Ax + \frac{mx}{r^3}, \text{ die Stromfunction: } U = \frac{Aq^2}{2} - \frac{mq^2}{r^3}.$$

Wie ein solcher Magnet verhält sich auch eine in das homogene Feld gelegte und durch dasselbe magnetisirte Eisenkugel. Ist  $a$  der Radius der Kugel und  $k$  die Magnetisirungszahl des Eisens, so ist das magnetische Moment der Kugel:

$$m = -\frac{4\pi k a^3 A}{3 + 4\pi k}.$$

Die Stromfunction ausserhalb der Eisenkugel ist demnach:

$$U = \frac{Aq^2}{2} \left( 1 + \frac{8\pi k}{3 + 4\pi k} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right).$$

Bezeichnet man mit  $q_0$  die Ordinate einer Kraftlinie im Unendlichen, so ist:

$$U = \frac{Aq_0^2}{2}.$$

Die Gleichung dieser Kraftlinie kann also in der Form:

$$\varrho_0^2 = \varrho^2 \left( 1 + \frac{8\pi k}{3 + 4\pi k} \frac{a^3}{r^3} \right),$$

beschrieben werden. Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass mit abnehmendem  $r$  auch  $\varrho$  kleiner wird. Für  $r = a$  gibt  $\varrho$  die Ordinate des Punktes, in welchem die Kraftlinie in die Kugel eintritt. Diese Ordinate  $\varrho_1$  ist also bestimmt durch die Gleichung:

$$\varrho_0^2 = \varrho_1^2 \left( 1 + \frac{8\pi k}{3 + 4\pi k} \right),$$

welche Gleichung unter der Beschränkung auf solche Werthe von  $\varrho_0$ , für welche  $\varrho_1$  nicht grösser wird als  $a$ , gilt.

Da für Eisen  $4\pi k$  eine grosse Zahl ist, so hat man näherungsweise:

$$\varrho_0^2 = 3\varrho_1^2,$$

d. h. es treten nahezu dreimal soviel Kraftlinien in die Eisenkugel ein, als durch einen gleichen Querschnitt im Unendlichen gehen.

## XII. Ueber Tonschwingungen fester Körper in Gegenwart von Flüssigkeiten; von Felix Auerbach.

Die Frage, welchen Einfluss auf die Tonschwingungen eines festen Körpers eine mit demselben in Berührung befindliche Flüssigkeit ausübe, hat ein doppeltes Interesse; ein hydrodynamisches, insofern es sich um die Mittheilung der Bewegung an die Flüssigkeit und deren Rückwirkung auf die Bewegung des festen Körpers handelt, und ein akustisches, insofern die durch die Schwingungen erzeugten Töne ins Auge gefasst werden. Wenn trotzdem das Problem bisher nur von sehr wenigen Physikern behandelt worden ist, so mag das seinen Grund darin haben, dass einerseits der theoretischen Lösung Schwierigkeiten im Wege stehen, welche höchstens für die einfachsten Fälle überwunden werden können, während andererseits die experimentelle

Beantwortung der Frage auf der Voraussetzung beruht, dass es möglich sei, Töne von sehr verschiedener Stärke und Klangfarbe in Bezug auf ihre Tonhöhe so genau zu fixiren, dass der Fehler höchstens eine oder zwei Schwingungen betrage.<sup>1)</sup>

Die Schwingungen eines einem Körper angehörigen Punktes von der Masse  $m$  im leeren Raume, oder näherungsweise in Luft sind durch die Gleichung:

$$(1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \varepsilon x$$

bestimmt, wo  $\varepsilon$  eine nur von der Beschaffenheit des Körpers abhängige Constante ist. Gehen die Schwingungen dagegen in einer tropfbaren Flüssigkeit vor sich, so tritt an die Stelle des Factors  $m$  in der Gleichung (1) ein Ausdruck von der Form  $(m + \mu)$ , wo  $\mu$  erstens von der Natur der Flüssigkeit, sodann aber auch von deren Ausdehnung und Begrenzung abhängig ist. Handelt es sich weiter um die Schwingungen des ganzen Körpers, so wird zwar die Anwendung der Gleichung:

$$(2) \quad (m + \mu) \frac{d^2 x}{dt^2} = - \varepsilon x$$

in vielen Fällen auch noch gessattet sein; die Constante  $\mu$  wird aber dann drittens noch von der Gestalt und den Dimensionen des schwingenden festen Körpers abhängig sein; und welche Bedeutung der Grösse  $m$  dann zukomme, ist in jedem besonderen Falle zu untersuchen.

Zu den einfachsten Gestalten, welche der schwingende feste Körper in der Praxis annehmen kann, gehört die eines cylindrischen Gefässes. Man kann dasselbe entweder durch Streichen des Randes mit dem Bogen oder durch Anschlag mit einem weichen Körper zu transversalen Schwingungen veranlassen. Sollen aber die dabei auftretenden Töne einfach, rein und bestimmt sein, so müssen verschiedene Bedingungen erfüllt sein. Zunächst muss das Material,

1) Zu erwähnen sind von der einschlägigen Literatur, ausser der Abhandlung des Verf. (Wied. Ann. 3. p. 157. 1878) diejenigen von Kolaček (Wied. Ann. 7. p. 23. 1879) und von Montigny (Bull. de l'Ac. Belg. (2) 50. 1880).



also beispielsweise das Glas an allen Stellen gleiche innere Beschaffenheit (Elasticität, Härte u. s. w.) haben, ferner muss seine Dicke, also die Wandstärke des Gefässes überall dieselbe sein. Beides ist gewöhnlich nicht genau der Fall. Namentlich kommt es sehr häufig vor, dass die Stärke eine periodische Function des Umfangsbogens ist, und dann erhält man, wie bei ungleichmässig gegossenen Glocken, je nach der Anschlagstelle zwei oder mehr, in der Tonhöhe etwas voneinander abweichende Töne. An eine genaue Bestimmung der Schwingungszahl ist dann, zumal störende Schwebungen auftreten, nicht zu denken. Endlich muss man, so sehr das die Bestimmung der Tonhöhe auch erschweren möge, die Töne so schwach wie möglich angeben. Schlägt man nämlich das Glas stark an, so hört man ausser dem Grundton, um welchen es sich bei der vorliegenden Frage in erster Linie handelt, eine grosse Reihe, zum Theil sehr hoher Obertöne, und oft sind diese Obertöne so stark, dass sie den Grundton fast oder gänzlich verdecken. Aber auch bei mässig starkem Anschlag klingen sie mehr oder weniger mit und machen, da sie von den harmonischen Tönen nicht selten etwas abweichen, die Höhenbestimmung des Grundtones schwierig. Diese Uebelstände treten in erhöhtem Maasse auf, wenn das Gefäss mit Flüssigkeit erfüllt ist, weil dann überdies die Klangfarbe an Bestimmtheit beträchtlich verliert.

Für die Bestimmung der Tonhöhe, also der Schwingungszahl, bleibt immer die Feinheit in der Beurtheilung der Gleichheit zweier Töne das wesentlichste Erforderniss. Selbst das Hilfsmittel, welches sonst die Schwebungen darbieten, nützt hier wenig oder gar nichts, weil die Obertöne, selbst wenn sie nicht hörbar sind, doch hörbare Schwebungen erzeugen. Trotzdem gelang es mir, wie Controlversuche mit der Sirene ergaben, die Schwingungszahl mit Hilfe eines Monochords mit verschiebbarem Steg bis auf eine oder zwei Schwingungen genau zu ermitteln, sodass die Beobachtungsfehler sämmtlicher hier mitzutheilenden Zahlen jedenfalls unter einem Procent liegen. Wenn schliesslich der sehr verschiedene Klang der Monochordtöne einerseits und der

Glastö  
je nac  
oft zw  
gebiet  
Uebun  
mittle  
gehol

gung  
oder  
zeich  
der C  
gung  
Gleic

(3)

auf V  
besti  
das  
halb  
sage  
Flüs  
nur  
gege  
fässc  
und  
so i  
gung  
rade  
sieh  
zieh  
gen  
dur  
m: a

(4)

Glastöne andererseits, sowie der letzteren unter einander, je nachdem das Gefäss leer oder gefüllt ist, im Anfange es oft zweifelhaft erscheinen lässt, in welche Octave des Tongebiets der gehörte Ton fällt, so wird dem durch einige Uebung, sowie durch die Vergleichung mit Tönen von mittlerer Klangfärbung und bekannter Tonhöhe leicht abgeholfen.

Auf diese Weise kann man experimentell die Schwingungszahl eines Glascyinders bestimmen, welcher theilweise oder vollständig gefüllt ist. Diese Grösse werde mit  $n$  bezeichnet. Andererseits lässt sich dieselbe mit Benutzung der Gleichungen (1) und (2) theoretisch durch die Schwingungszahl  $n_0$  des leeren Gefässes ausdrücken. Aus diesen Gleichungen folgt nämlich:

$$(3) \quad n = n_0 \sqrt{\frac{m}{m + \mu}}.$$

Die zunächst mitzutheilenden Versuche beziehen sich auf Wasser. Damit fällt der eine der drei Einflüsse, welche  $\mu$  bestimmen, fort. Ferner wird vorläufig angenommen, dass das Wasser das Gefäss vollständig erfülle; der Genauigkeit halber sei hinzugefügt, dass hierbei stets der Rand, wie man zu sagen pflegt, glatt abgeschnitten wurde. Die Dimensionen der Flüssigkeit, welche  $\mu$  ebenfalls mitbestimmen, kommen dann nur insofern in Betracht, als sie durch diejenigen des Gefässes gegeben sind. Sind endlich auch die Dimensionen der Gefässe dieselben, d. h. haben sämtliche Gefässe gleiche Weite und Höhe, sodass sie sich nur durch die Stärke unterscheiden, so ist  $\mu$  eine Constante. Denkt man sich nämlich die Schwingungen des Cylinders in diejenigen seiner erzeugenden Geraden zerlegt und diese wiederum in die ihrer Punkte, so sieht man ein, dass man die Glasstärke  $d$  in Rechnung zu ziehen hat, indem man sie mit  $m$ , der Masse jedes schwingenden Punktes proportional setzt; dass also die Constante  $\mu$  durch sie nicht beeinflusst wird. Hiernach wird, wenn  $m:d = \mu:\mu'$ , also  $\mu d/m = \mu'$  gesetzt wird:

$$(4) \quad n = n_0 \sqrt{\frac{d}{d + \mu'}}.$$

Die Glasdicke  $d$  mit Genauigkeit zu messen, ist, weil sie von Stelle zu Stelle immer etwas variirt, sehr schwierig; es muss an möglichst zahlreichen Stellen gemessen werden, und viele derselben sind dem Dickenmesser schwer zugänglich. Die Gleichung (4) ist daher zur Berechnung von  $n$  wenig geeignet. Sie lässt sich aber durch eine kleine Umformung hierzu geeignet machen.

Bei gleich hohen und weiten cylindrischen Gläsern ist nämlich die Schwingungszahl  $n_0$  nur von der Glasstärke abhängig und dieser direct proportional. Es ist dies theils längst bekannt, theils wurde es für eine grosse Anzahl der hier benutzten Gläser, soweit eben  $d$  sich messen liess, constatirt. Die Abweichungen von der Proportionalität betragen im Durchschnitt nur 2—5 Procent; sie erklären sich theils durch die Ungenauigkeit der Dickenmessung, theils durch den Einfluss der schwankenden inneren Beschaffenheit des Glases auf die Tönhöhe. Dieser darf aber hier vernachlässigt werden, da der grösste Theil des so entstehenden Fehlers dadurch compensirt wird, dass derselbe Einfluss auch auf den Werth von  $\mu$  keine Berücksichtigung finden kann und findet.

An die Stelle der Gleichung (5) tritt somit, wenn  $d\mu'/n_0 = C$  gesetzt wird, die neue:

$$(6) \quad n = \sqrt{\frac{n_0^2}{n_0 + C}}.$$

Auf diesen einfachsten Fall beziehen sich die Tabellen 1 und 2, und zwar die erste auf eine Gruppe von Gläsern, welche im Folgenden stets mit Gr. I bezeichnet ist, und deren gemeinschaftliche Höhe  $h$  und Weite  $w$  resp. 168 und 116 mm betrug. Es sind das, da die Gläser nicht genau gleich hoch und weit waren, nur Mittelwerthe; die Abweichungen liegen aber unter einem Procent. Aehnlich bezieht sich die Tabelle 2 auf die mit Gr. II bezeichneten Gläser, für welche  $h = 104$ ,  $w = 80$  ist. Die erste Reihe enthält die Nummer des Glases, die zweite die ungefähre mittlere Glasstärke, die dritte und vierte die beobachteten Werthe von  $n_0$  und  $n$ , die fünfte den nach Gleichung (6) berechneten Werth von  $n$ , zu welchem Zwecke zunächst mit Benutzung je eines

bestimmten Glases (Gr. I, Nr. 3, Gr. II, Nr. 5) der Werth von  $C$  aus der umgekehrten Gleichung:

$$(7) \quad C = n_0 \cdot \frac{n_0^2 - n^2}{n^3}$$

berechnet wurde. Die sechste Reihe enthält die Fehler der beobachteten Werthe in Procenten, die letzte den Quotienten  $n_0:n$ , von welchem sogleich die Rede sein wird.

Tabelle 1.

Gruppe I.  $C$  (aus 3 berechnet) = 670.

Glas- Nummer	$d$ (mm)	$n_0$	$n$	$n$ (berech.)	Fehler in Proc.	$n_0:n = G$
1	3,3	335	191	193	-1	1,75
1a	4,0	381	228	229	-0	1,67
2	4,0	393	242	239	+1	1,62
2a	4,8 ?	430	272	269	+1	1,58
2b	4,7	482	310	313	-1	1,55
3	4,7	518	342	342	(0)	1,51
3a	5,4	539	359	360	-0	1,50
3b	5,1	546	369	366	+1	1,48
4	5,0	586	399	400	-0	1,47
4a	5,9	623	429	432	-1	1,45
4b	7,7	804	592	593	-0	1,36

Tabelle 2.

Gruppe II.  $C$  (aus 5 berechnet) = 1117.

1	1,6	453	240	243	-1	1,89
2	1,7	466	258	253	+2	1,80
3	1,75	473	263	259	+2	1,80
4	1,75	491	272	271	+0	1,80
5	1,85	500	278	278	(0)	1,79
6	2,0	529	298	300	-1	1,77
7	2,0	534	302	304	-1	1,76
8	2,05	561	326	324	+1	1,72
9	2,1 ?	634	381	382	-0	1,66
10	4,0 ?	925	634	623	+2	1,64

Diese Tabellen zeigen zunächst, was übrigens selbstverständlich ist, dass in allen Fällen eine Tonerniedrigung stattfindet. Dieselbe ist ferner in sehr befriedigender Uebereinstimmung mit der von der Theorie geforderten; in Gr. I betragen die Fehler höchstens 1 Proc., in Gr. II höchstens 2 Proc. und dürfen auf die Ungleichmässigkeit des Glases geschoben werden. Ferner zeigt sich, in Uebereinstimmung mit der Gleichung:

$$(8) \quad \frac{n_0}{n} = G = \sqrt{\frac{n_0 + C}{n_0}},$$

dass  $G$  abnimmt, wenn  $n_0$  wächst. Nennt man  $G$  die geometrische Tonerniedrigung, so erhält man mithin den Satz:

1) Die geometrische Tonerniedrigung, welche eine Flüssigkeit bei einem cylindrischen Glase hervorruft, welches sie vollständig erfüllt, ist desto kleiner, je höher der Ton des leeren Glases ist.<sup>1)</sup>

Mehr lässt sich in Bezug auf die geometrische Tonerniedrigung nicht sagen. Es ist daher zweckmässig, zur Darstellung der Versuchsergebnisse neben  $G$  noch eine andere Grösse, die arithmetische Tonerniedrigung  $A$  einzuführen, welche durch die Gleichung  $A = (n_0 - n)/n_0$  defnirt ist. Berechnet man aus den in Tabelle 1 und 2 dargestellten Versuchsergebnissen diese Grösse, so findet man, wie Tabelle 3 zeigt, dass das Produkt  $A\sqrt{n_0}$  nahezu constant ist, die Fehler betragen nur 1–2 Procent im Durchschnitt.

Tabelle 3.

Gruppe I.				Gruppe II.			
Nr.	$A$	$A\sqrt{n_0}$	Fehler Proc.	Nr.	$A$	$A\sqrt{n_0}$	Fehler Proc.
1	0,429	7,85	+2	1	0,470	9,98	+1
1 <sub>a</sub>	0,401	7,68	—0	2	0,447	9,65	—2
2	0,385	7,62	—1	3	0,445	9,69	—2
2 <sub>a</sub>	0,367	7,61	—1	4	0,445	9,83	—1
2 <sub>b</sub>	0,354	7,81	+2	5	0,444	9,95	+1
3	0,339	7,73	+1	6	0,436	10,03	+1
3 <sub>a</sub>	0,335	7,77	+1	7	0,434	10,03	+1
3 <sub>b</sub>	0,324	7,57	—2	8	0,419	9,92	+0
4	0,319	7,71	+2	9	0,399	10,04	+1
4 <sub>a</sub>	0,311	7,75	+1	10	0,315	9,60	—3
4 <sub>b</sub>	0,264	7,48	—3				
Mittel		7,69	1,5	Mittel		9,89	1,3

Es ist zu untersuchen, ob und inwieweit dieses Ergebniss durch die Theorie gerechtfertigt wird. Zwischen der arithmetischen und der geometrischen Tonerniedrigung besteht die Relation:

$$(9) \quad A = 1 - \frac{1}{G}.$$

1) Man vergl. Montigny, l. c.

Man erhält also aus Gl. (8):

$$(10) \quad A\sqrt{n_0} = \sqrt{n_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{n_0}{n_0 + C}} \right).$$

Diese Grösse ist also nicht constant, sondern von  $n_0$  abhängig; setzt man aber den Differentialquotienten der rechten Seite gleich Null, so findet man, dass sie für:

$$n_0 = \frac{C}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0,618 \ C$$

ein Maximum hat. Da nun dieser Werth von  $n_0$  mitten in die Werthe hineinfällt, welche es für Gläser, denen die betreffende Constante  $C$  entspricht, anzunehmen pflegt, und welche es in der That für die Gläser der beiden obigen Gruppen besitzt, und da das Product  $A\sqrt{n_0}$  zu beiden Seiten dieses Maximums nur sehr langsam abnimmt, so findet sich, dass mit einer gewissen Annäherung für mittlere Werthe von  $n_0$  in der That  $A\sqrt{n_0}$  constant ist. Für einige runde Werthe von  $n_0$ , sowie für den Maximalwerth, sind in der Tabelle 4 die theoretischen Werthe von  $A\sqrt{n_0}$  angegeben. Hiernach kann man den Satz 1) durch den bestimmteren, aber auch beschränkter gültigen Satz ergänzen:

2) Die arithmetische Tonerniedrigung, welche eine Flüssigkeit in einem cylindrischen Glase von mittlerer Tonhöhe hervorruft, ist der Wurzel aus der Schwingungszahl des leeren Glases nahezu umgekehrt proportional.

Tabelle 4.

Gruppe I.			Gruppe II.		
$n_0$	$A\sqrt{n_0}$ berechnet	Abweich. vom Max.	$n_0$	$A\sqrt{n_0}$ berechnet	Abweich. vom Max.
50	5,19	2,58	100	7,13	2,91
100	6,40	1,37	200	8,68	1,36
200	7,36	0,41	400	9,70	0,34
300	7,70	0,07	453	9,82	0,22
335	7,74	0,03	500	9,91	0,13
400	7,76	0,01	600	10,02	0,02
414	7,77	—	700	10,04	—
500	7,73	0,04	800	10,02	0,02
600	7,64	0,13	900	9,99	0,05
700	7,53	0,24	1000	9,86	0,18
800	7,41	0,36	1600	9,28	0,76
1000	7,14	0,63	2500	8,45	1,59
2000	5,96	1,80			

Die Abweichungen vom Maximum sind in den bezeichneten Grenzen so geringfügig, dass sie in der Tabelle 3 durch die Fehler, welche die Structurverschiedenheit des Glases erzeugt, und selbst durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler in den meisten Fällen verdeckt werden; nur für die den höchsten Ton gebenden Gläser sind die beobachteten Werthe von  $A\sqrt{n_0}$  in den beiden Gruppen, wie es die Theorie erfordert, merklich kleiner als die übrigen.

Von den speciellen Annahmen, welche bisher gemacht wurden, soll nun eine fallen gelassen werden. Die Gläser sollen verschiedene Weite besitzen. Wenn es von vornherein möglich war, den Einfluss der Glasstärke anzugeben, so ist das hier nicht der Fall. Es ist sogar dieser Einfluss hier als ein doppelter in Betracht zu ziehen, weil mit der Weite des Glases auch die Dicke der Flüssigkeitsschicht variiert; ja es ist dieser letztere Einfluss vermuthlich der überwiegende. Statt der Weite der Gläser möge daher deren Hälfte  $q$  eingeführt und diese Grösse als die Dicke der mit dem schwingenden festen Körper in Berührung befindlichen Flüssigkeitsschicht bezeichnet werden. Gleichzeitig mit  $q$  variierte bei den mir zur Verfügung stehenden Gläsern, ausser  $n_0$ , auch die Höhe  $h$ . Von  $n_0$  darf die Constante  $C$  nicht abhängig sein, wohl aber ist eine Abhängigkeit von  $h$  möglich. In der Tabelle 5 sind daher die aus Gl. (7) berechneten Werthe von  $C$  mit den Werthen von  $q$  und  $h$  für eine Anzahl Gruppen von cylindrischen Gläsern zusammengestellt. Die Zahl in Klammern neben der Gruppennummer bedeutet die Anzahl der nur durch die Werthe der Glasstärke  $d$  und der Tonhöhe  $n_0$  sich unterscheidenden, in ihr enthaltenen und zur Berechnung von  $C$  benutzten Gläser. Die Anordnung der Gruppen ist nach dem Werthe von  $q$ .

Tabelle 5.

Gruppe	$h$	$q$	$C$	Gruppe	$h$	$q$	$C$
IV (1)	27	75	595	II (10)	104	40	1117
V (1)	306	75	630	VI (1)	509	37,5	1222
I (11)	168	58	670	VII (1)	294	23,5	1284
III (2)	461	53	818	X (4)	72	19,5	2113
IX (4)	170	43	1398	VIII (2)	177	17	3128
XI (3)	117	40	910				



Eine Abhängigkeit der Grösse  $C$  von der Höhe  $h$  ist hier nicht erkennbar. Dass es nicht beträchtlich sein kann, folgt daraus, dass die beiden Gläser IV und V, welche sich nur durch die Höhe und durch diese in ganz colossaler Weise unterscheiden (das Glas IV ist elfmal so hoch wie die flache Schale V), nur sehr wenig verschiedene Werthe von  $C$  besitzen, und dass etwas Aehnliches bei den Gläsern der Gruppen II und VI stattfindet. Daraus ergibt sich der Satz:

3) Die Tonerniedrigung, welche eine Flüssigkeit in einem cylindrischen Glase, das sie vollständig erfüllt, hervorruft, ist von der Höhe des Glases nicht merklich abhängig.

Dagegen ist der Einfluss von  $q$  auf  $C$  nicht zu verkennen. Mit einer einzigen Ausnahme wächst  $C$  bei abnehmendem  $q$ . Die Ausnahme bezieht sich auf die Gläsergruppe IX, bestehend aus vier Bechergläsern, denen ein unverhältnissmässig hoher Werth von  $C$  entspricht. Diese Gläser verhalten sich also so, als ob sie beträchtlich enger wären, als sie sind. Woher dieses Verhalten rühre, habe ich nicht zu ermitteln vermocht. Sieht man von dieser Gruppe ab, so kann man den Satz aufstellen:

4) Die geometrische Tonerniedrigung, welche eine Flüssigkeit in verschiedenen weiten cylindrischen Gläsern hervorruft, ist desto grösser, je enger das Glas ist.

Um diese Beziehung bestimmter ausdrücken zu können, thut man wiederum gut, die arithmetische Tonerniedrigung einzuführen. Diese Grösse, mit  $\sqrt{n_0}$  multiplicirt, ist nach dem Obigen für die Gläser einer Gruppe nahezu constant, variirt aber, wie die folgende Tabelle 6 zeigt, von Gruppe zu Gruppe. Bildet man aber das Product  $A\sqrt{n_0}q$ , so erhält man, wie die nächste Spalte der Tabelle zeigt, eine nur wenig und gesetelos variirende Grösse; die in der letzten Spalte angegebenen Abweichungen vom Mittel betragen durchschnittlich nur etwa 3 Proc. und würden noch weniger betragen, wenn die schon besprochene Gruppe IX unberücksichtigt bliebe. Man kann also den Satz aussprechen:

5) Die arithmetische Tonerniedrigung, welche eine Flüssigkeit in Glascylindern verschiedener Weite hervorruft, ist annähernd umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Weite.

Tabelle 6.

Gruppe	$q$	$A\sqrt{n_0}$	$A\sqrt{n_0 q}$	Abw. vom Mittel
IV	75	7,02	60,8	-2 Proc.
V	75	7,37	63,8	+2 "
I	58	7,69	58,6	-6 "
III	53	8,57	62,4	0 "
IX	43	10,09	66,2	+6 "
XI	40	9,09	57,5	-8 "
II	40	9,89	62,6	+0 "
VI	37,5	10,35	63,4	+2 "
VII	23,5	13,32	64,6	+3 "
X	19,5	14,62	64,5	+3 "
VIII	17	15,15	62,5	+0 "
			Mittel 62,4	2,9 Proc.

Indess ist zu beachten, dass dieser Satz mit geringerer Genauigkeit gültig ist, als der entsprechende Satz 2).

Man kann die Formel:

$$(11) \quad A \sim \frac{1}{\sqrt{n_0 q}},$$

welche hiernach näherungsweise gültig ist, einfacher und anschaulicher schreiben. Wenn es schon von vornherein zu vermuthen ist, dass die Tonerniedrigung, welche die berührende Flüssigkeitsschicht ausübt, desto grösser sein werde, je enger begrenzt diese Schicht ist, so ist es doch gleichzeitig einleuchtend, dass es hierbei sich nicht um die Dicke in Metern ausgedrückt handelt, sondern, dass es auf die Anzahl Wellenlängen ankommt, welche die von dem Glase auf die Flüssigkeit übertragene Schwingung zurückzulegen hat, bis sie auf Hindernisse, also auf eine feste Wand oder, wie in dem hier betrachteten Falle, auf eine entgegenkommende Schwingungsbewegung stösst. Man hat also  $q$  in Wellenlängen des Tones, dessen Schwingungszahl  $n_0$  ist, auszudrücken. Thut man dies, nennt die Wellenlänge  $\lambda_0$ , setzt  $q:\lambda_0 = q'$  und beachtet, dass für eine bestimmte Flüssigkeit und Temperatur  $n_0$  mit  $\lambda_0$  umgekehrt proportional ist, so

fällt in der That  $n_0$  sowie  $\lambda_0$  gänzlich fort, und man erhält die Formel:

$$(12) \quad A \sim \frac{1}{\sqrt{q}},$$

in Worten:

6) Die arithmetische Tonerniedrigung, welche eine Flüssigkeit in einem Glaszylinder von mittlerer Tonhöhe, den sie völlig anfüllt, hervorruft, ist näherungsweise nur abhängig von der Anzahl der Wellenlängen, welche der Ton des leeren Glases von der Wand bis zur Axe zurückzulegen hat, und zwar ist sie mit der Quadratwurzel aus dieser Anzahl umgekehrt proportional.

Die Grösse  $q$  wurde bisher stets mit der Weite des Glases proportional, nämlich gleich der Hälfte dieser angenommen. Man kann indess  $q$  variiren, ohne die Weite  $D$  zu ändern, indem man in ein und dasselbe Glas verschieden weite cylindrische feste Körper concentrisch einsetzt. Da mir indess völlig geeignetes Material hierzu nicht zur Verfügung stand, kann ich vorläufig nur einige Vorversuche mittheilen. Dieselben, in Tabelle 7 zusammengestellt, zeigen,

Tabelle 7.

Gruppe I. Nr. 3b ( $q = 58$ )			Gruppe I. Nr. 1 ( $q = 58$ )		
$q$	$G$	$C$	$q$	$G$	$C$
58	1,48	670	58	1,75	670
32	1,52	714	38	1,79	729
27	1,56	781	37	1,80	740
23	1,66	940	36	1,81	764
21	1,73	1025	26	1,86	825
11	1,99	1615	24	1,88	854
			15	2,11	1152
			13	2,20	1292

Gruppe II. Nr. 2 ( $q = 40$ )		
$q$	$G$	$C$
40	1,80	1117
15	2,13	1668
6	2,58	2672

dass hier der Satz 6) nicht gültig ist, indem  $C$  und damit auch  $G$  zwar zunehmen, wenn  $q$  abnimmt, aber lange nicht in so starkem Maasse, namentlich im Anfange nicht, so lange der innere Cylinder beträchtlich kleiner als der äussere ist.

Auch die Höhe der Flüssigkeitssäule  $h'$  kann man variiren, ohne die Höhe des Gefässes  $h$  zu ändern, indem man ein und dasselbe Glas bis zu verschiedenen Niveaus mit Wasser anfüllt. Dass man in diesem Falle alle Werthe von  $G$  und  $C$  erhält, welche zwischen 1, resp. 0 und den für das vollständig gefüllte Glas gültigen liegen, ist von vornherein klar. Der Versuch aber kann allein darüber entscheiden, wie mit wachsendem  $h'$   $G$  und  $C$  wachsen, weil es bei der Complication der geometrischen Verhältnisse, von denen  $C$ , oder  $\mu$  in der Gl. (2) hier abhängt, unmöglich ist, über deren Verhalten eine theoretische Grundlage zu gewinnen. Für zwei Gläser sind in der Tabelle 8 die empirisch gefundenen, verschiedenen Werthen von  $h'$  entsprechenden Werthe von  $n'$  und die daraus berechneten Werthe von  $G'$  und  $C'$  zusammengestellt.

Tabelle 8.

Gruppe II. Nr. 3				Kleines Becherglas ( $h = 66$ , $q = 18$ )			
$h'$	$n'$	$G'$	$C'$	$h'$	$n'$	$G'$	$C'$
0	476	—	—	0	1060	—	—
20	470	1,013	12	10	1055	1,005	11
40	451	1,056	54	20	1029	1,03	64
60	403	1,180	189	30	918	1,15	349
80	331	1,439	513	40	789	1,34	859
100	263	1,810	1117	50	658	1,61	1685
(= $h$ )	(= $n$ )	(= $G$ )	(= $C$ )	60	563	1,88	2682
				66	521	2,03	3310
				(= $h$ )	(= $n$ )	(= $G$ )	(= $C$ )

Wie man sieht, wächst  $G'$ , also auch  $C'$ , mit  $h'$ ; aber diese Zunahme ist keineswegs eine gleichmässige; sie ist vielmehr anfangs eine ausserordentlich geringfügige und wird später eine ganz rapide. Man erkennt das noch deutlicher, wenn man nach der Formel:

$$G^g = G', \quad \text{also:} \quad g = \frac{\log G'}{\log G}$$

ausrechnet, welchen Bruchtheil der gesammten Tonerniedrigung die Wassersäule von der Höhe  $h'$  erzeugt. Diese Bruchtheile sind in der folgenden Tabelle 9 unter Beifügung der analogen Bruchtheile  $c = C/C$  angegeben.

Tabelle 9.

Gruppe II. Nr. 3				Kleines Becherglas				Grosses Glas			
$\frac{h'}{h}$	$g$	beob. $c$	$c$ ber.	$\frac{h'}{h}$	$g$	$c$ beob.	$c$ ber.	$\frac{h'}{h}$	$g$	$c$ beob.	$c$ ber.
0,20	0,02	0,01	0,01	0,15	0,01	0,003	0,003	0,11	0,01	0,002	0,001
0,40	0,09	0,05	0,06	0,30	0,04	0,02	0,03	0,22	0,03	0,02	0,01
0,60	0,28	0,17	0,21	0,46	0,20	0,10	0,09	0,33	0,08	0,05	0,04
0,80	0,61	0,47	0,51	0,61	0,41	0,26	0,22	0,44	0,16	0,10	0,09
1,00	1,00	1,00	1,00	0,76	0,73	0,51	0,43	0,56	0,24	0,14	0,17
				0,91	0,89	0,81	0,74	0,67	0,40	0,31	0,30
				1,00	1,00	1,00	1,00	0,78	0,64	0,55	0,47
								0,89	0,81	0,74	0,71
								1,00	1,00	1,00	1,00

Wie man sieht, ist  $g$  stets viel kleiner als  $h'/h$ , und erreicht erst am Schluss, bei vollständiger Anfüllung des Glases mit Wasser dessen Werth. Dasselbe gilt von den Werthen von  $c$  in noch stärkerem Maasse. Um die Hälfte der Tonerniedrigung bei völlig gefülltem Glase zu erhalten, muss man die Gläser bis zu  $\frac{2}{3}$  bis  $\frac{3}{4}$  der Höhe anfüllen; damit aber  $c$  die Hälfte seines Werthes bei vollem Glase annehme, muss es bis zu  $\frac{4}{5}$  der Höhe gefüllt sein. In einem halbvollen Glase andererseits beträgt die Tonerniedrigung nur etwa den fünften Theil derjenigen bei vollem Glase, und die Constante  $c$  ist in diesem Falle etwa achtmal so klein. Das gilt, wie die grosse Uebereinstimmung der drei obigen Tabellen lehrt, für cylindrische Gläser jeder Grösse und Gestalt. Es kann daher der Grund dieses Verhaltens nur in den wirklichen Bewegungsvorgängen gesucht werden. Zunächst ist von der Thatsache auszugehen, dass bei theilweise gefüllten Gläsern überhaupt ein Ton, ein einziger, reiner Ton zu Stande kommt. Es kann dieser Ton nur das Resultat eines Ausgleichs sein, welcher zwischen den unter ganz verschiedenen Bedingungen vor sich gehenden Schwingungen des trockenen und des benetzten Theiles des festen Körpers stattfindet. Wäre die lebendige Kraft dieser Schwin-

gungen dieselbe, so hätte man in der Gl. (2) statt  $m + \mu$  einfach zu schreiben  $(m + (h'/h)\mu)$ , d. h. es müsste sich  $C':C$  oder  $c:1$  verhalten wie  $h':h$ . Diese Voraussetzung ist aber nicht erfüllt. Die lebendige Kraft variirt vom Boden nach dem Rande des Glases in einer durch die Schwingungsform bestimmten Weise. Wenn es sich um einfache Töne, d. h. um Töne ohne Obertöne handelte, so wäre die Sinusfunction zu Grunde zu legen. Wie indess am Eingange bemerkt wurde, haben diese Töne viele hohe Obertöne, und man wird daher nicht erheblich fehlgehen, wenn man als Schwingungscurve, wie bei gestrichenen Saiten, eine gerade Linie annimmt. Die lebendigen Kräfte verhalten sich dann in den Höhen  $h'$  und  $h$  wie  $h'^2$  zu  $h^2$ , und es ist daher:

$$c = C':C = h'^3:h^3.$$

Nach dieser Proportion sind die den beobachteten Werthen von  $c$  in Tabelle 9 gegenüberstehenden berechnet worden. Die Uebereinstimmung ist keine exacte, aber den Umständen gemäss genügende. Berechnet man die  $c$  auch noch nach dem Sinusgesetz, so findet man viel abweichendere Zahlen, zwischen denen und den obigen die beobachteten Werthe liegen. Die Schwingungscurve hat also eine Gestalt zwischen der der geraden und der Sinuslinie, liegt der ersteren jedoch beträchtlich näher.

Alle bisher mitgetheilten Versuche beziehen sich auf destillirtes Wasser. Für einige andere Flüssigkeiten ist in Tabelle 10 eine Reihe ausgewählter Versuche mitgetheilt, welche sich der besseren Vergleichbarkeit halber alle auf dasselbe Glas beziehen. Nur für die Untersuchung des Quecksilbers musste, da in dem betreffenden Glase keine bestimm- baren Töne entstanden, zu anderen Gläsern gegriffen werden. Zwei derselben sind hier, um die Unterschiede zu zeigen, aufgeführt. Ausser dem spec. Gewichte  $S$  enthält die Tabelle noch die Werthe der geometrischen Tonerniedrigung  $G$ , sowie der specifischen Tonerniedrigung  $S$ , d. h. des Quotienten der Werthe von  $G$  für die betreffende Flüssigkeit und für Wasser. Letztere Grösse ist zweimal verzeichnet, einmal nach der Beobachtung, das andere mal auf Grund folgender Betrachtung berechnet. Die Grösse  $\mu$  in den Gl. (2)

und (3), also auch  $C$  in Gl. (8) hängt nunmehr, ausser von den geometrischen Verhältnissen des Glases und der Flüssigkeit, auch noch von der Natur der letzteren ab, und zwar wesentlich von ihrer Dichtigkeit  $s$  und Compressibilität  $p$ . Wird stets dasselbe Glas (ein Becherglas) benutzt und dieses stets vollständig mit Flüssigkeit angefüllt, so ist hiernach  $C$  nur eine Function von  $s$  und  $p$ , also  $C=f(s, p)$ . Es möge die Hypothese gemacht werden, dass das seinem Betrage nach wesentlichste Glied dieser Function das Glied  $C_0 s$  sei, wo  $C_0$  der Werth von  $C$  für Wasser; dass also zwischen  $C$  und  $s$  in erster Annäherung Proportionalität bestehe. Man findet dann aus Gl. (8):

$$(13) \quad S = \sqrt{\frac{n_0 + C_0 s}{n_0 + C_0}}.$$

Nach dieser Gleichung sind die Werthe von  $S$  in der Tabelle berechnet.

Tabelle 10.

Flüssigkeit	$s$	$G$	$S$ beob.	$S$ ber.	Abw. in Proc.
Aether . . . . .	0,729	1,653	0,889	0,897	-0,9
Alkohol, absolut . . . .	0,803	1,705	0,917	0,928	-1,2
„ verdünnt . . . . .	0,856	1,763	0,948	0,946	+0,2
Wasser . . . . .	1,000	1,860	1,000	1,000	—
Kochsalzlösung, verdünnt.	1,073	1,914	1,029	1,024	+0,5
Chlorcalciumlösung a) . .	1,118	1,936	1,041	1,039	+0,2
Kupfervitriol . . . . .	1,163	1,949	1,049	1,055	-0,6
Chlorcalciumlösung b) . .	1,195	1,984	1,066	1,066	0
Kochsalzlösung, concentr.	1,200	1,990	1,070	1,067	+0,3
Bittersalzlösung . . . . .	1,232	2,005	1,078	1,078	0
Chlorcalciumlösung c) . .	1,233	2,029	1,091	1,079	+1,1
Glycerin . . . . .	1,242	2,041	1,097	1,081	+1,5
Chlorcalciumlösung d) . .	1,309	2,049	1,102	1,100	+0,2
„ „ e) . . . . .	1,364	2,092	1,126	1,117	+0,9
Quecksilber, erstes Glas .	13,6	4,82	3,08	2,79	+8,6
„ zweites „ . . . . .	„	(Wasser 1,59) 5,97	3,14	3,04	+3,3
		(Wasser 1,00)			

Man darf sagen, dass durch diese Versuchsergebnisse die gemachte Hypothese gerechtfertigt wird, und man erhält den Satz:



7) Die specifische Tonerniedrigung einer Flüssigkeit ist in erster Annäherung nur von ihrer Dichtigkeit abhängig und desto grösser, je grösser diese ist, ohne jedoch so rasch wie sie zu wachsen.

Indessen zeigen einige der obigen Zahlen doch Differenzen, welche zweifellos über die möglichen Beobachtungsfehler hinausgehen. Namentlich gilt das von Aether und Alkohol einerseits und für Glycerin und Quecksilber andererseits; für jene ist die beobachtete Tonerniedrigung kleiner, für diese grösser als die berechnete. Es liegt nahe, als Ursache hiervon die verschiedene Compressibilität der Flüssigkeiten anzusehen. In der That ist dieselbe nach Grassi<sup>1)</sup> für Aether und Alkohol beträchtlich grösser, für Quecksilber beträchtlich kleiner als für Wasser. Glycerin ist, soweit mir bekannt, auf seine Compressibilität noch nicht untersucht; man darf aus diesen Versuchen, da die innere Reibung auf die Dauer der Schwingungen kaum von Einfluss sein dürfte, schliessen, dass die Compressibilität des Glycerins eine geringere ist. Jedenfalls erhält man den schon von Montigny angeführten, aber nicht hinreichend gestützten Satz:

8) Die specifische Tonerniedrigung der Flüssigkeiten ist in zweiter Annäherung auch von ihrer Compressibilität abhängig, und zwar ist sie desto grösser, je kleiner diese ist.

Die specifische Tonerniedrigung verhält sich hiernach, was bemerkenswerth ist, ganz analog wie eine andre Constante der Flüssigkeiten, nämlich wie ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit für den Schall. Für eine Reihe von Flüssigkeiten, welche Wertheim<sup>2)</sup> in dieser Richtung untersucht hat, und mit denen ich meine Flüssigkeiten grossentheils in Uebereinstimmung wählte, schwankt die Schallgeschwindigkeit  $F$  zwischen den Grenzen 1150 und 1980 m; der Quotient  $F:s$  dagegen nur zwischen den Grenzen 1310 und 1540, also erheblich weniger. So bilden denn auch die verschie-

1) Grassi, Ann. Chim. Phys. (3) 31. p. 437. 1850.

2) Wertheim, *ibid.* (3) 23. p. 434. 1848. Pogg. Ann. 77. p. 427. 544. 1849.

denen Flüssigkeiten dieselbe Reihenfolge, ob man sie nach der Dichte, oder nach der Schallgeschwindigkeit oder nach der Tonerniedrigung ordnet.

Die Analogie zwischen den beiden in Rede stehenden Grössen geht aber noch weiter. Sie erstreckt sich auch auf die Thatsache, dass es eine spezifische Schallgeschwindigkeit oder eine spezifische Tonerniedrigung der Flüssigkeiten ohne weiteres gar nicht gibt. Es kommt vielmehr ganz darauf an, welche Ausdehnung, und welche Begrenzung die Flüssigkeit hat. Nach Wertheim's bekannten Versuchen ist die Schallgeschwindigkeit in flüssigen Säulen viel kleiner als in ausgedehnter flüssiger Masse. In ähnlicher Weise ist die spezifische Tonerniedrigung der Flüssigkeiten nach Formel (13) desto weniger von eins (d. h. von der des Wassers) verschieden, je kleiner  $C_0$  und je grösser  $n_0$  ist, also je weiter das Glas, und je höher sein Ton ist. Gross sind indess die Differenzen, welche man so für  $S$ , aus verschiedenen Gläsern berechnet, erhält, für die meisten Flüssigkeiten nicht. Für Alkohol erhält man z. B.:

aus Gruppe	I	Nr. 1	$S = 0,934$
"	"	I " 4b	0,955
"	"	II " 1	0,926
"	"	II " 10	0,944

Wesentliche Unterschiede zwischen den in Vergleich gezogenen Fällen sind freilich erstens, dass die Fortpflanzung der Schwingungen hier quer gegen die Flüssigkeitssäule erfolgt, und zweitens, dass diese hier einerseits, nämlich oben, nicht von fester Wandung, sondern von Luft begrenzt ist. Indess kann hierauf nicht näher eingegangen werden. Nur ein Punkt verdient noch besprochen zu werden.

Auch in einem und demselben Glase muss die spezifische Tonerniedrigung eine verschiedene sein, je nachdem das Glas theilweise oder gänzlich mit Flüssigkeit erfüllt ist; und man kann sie für eine beliebige Höhe  $h$  der Flüssigkeitssäule nach Formel (13) berechnen, wenn man für  $C$  die entsprechenden Werthe von  $C'$  aus Tabelle 8 einsetzt. Für das in dieser Tabelle enthaltene kleine Becherglas wurden auf diese Weise die theoretisch erforderten Werthe von

$S$  für Quecksilber und für das Glas Gr. II Nr. 3 für Alkohol berechnet und mit den beobachteten Werthen zusammengestellt.

Tabelle 11.

Quecksilber.

$h'$	$n'$	$G'$	$S$ beob.	$S$ ber.	Abweich. in Proc.
0	1060	—	—	—	—
10	917	1,156	1,15	1,08	+ 8
20	685	1,547	1,50	1,31	+15
30	428	2,48	2,21	2,04	+ 8
40	311	3,41	2,54	2,59	— 2
50	233	4,55	2,89	2,95	— 2
60	184	5,76	3,06	3,16	— 3
66	161	6,58	3,24	3,25	— 0

Alkohol.

0	476	—	—	—	—
20	473	1,006	0,994	0,998	—0,4
40	460	1,035	0,981	0,990	—0,9
60	412	1,155	0,978	0,972	+0,6
80	350	1,360	0,946	0,946	0
100	284	1,678	0,926	0,929	—0,3

Für Alkohol ist die Uebereinstimmung eine sehr gute. Für Quecksilber betragen hingegen die Fehler bis zu 15 Proc. Sieht man hiervon zunächst ab, so findet man, dass beim Quecksilber schon sehr geringe Flüssigkeitssäulen eine beträchtliche Tonerniedrigung erzeugen. Berechnet man auch hier, wie in Tabelle 9 für Wasser geschehen, die Bruchtheile  $g$  der ganzen Tonerniedrigung, welche verschiedenen hohe Säulen erzeugen, so ergibt sich:

Tabelle 12.

$\frac{h'}{h}$	$g$ (Wasser)	$g$ (Quecksilber)	$\frac{h'}{h}$	$g$ (Wasser)	$g$ (Quecksilber)
0,15	0,01	0,08	0,76	0,73	0,81
0,30	0,04	0,23	0,91	0,89	0,92
0,46	0,20	0,48	1,00	1,00	1,00
0,61	0,41	0,66			

Während also die halbe Tonerniedrigung bei Wasser erst bei  $\frac{2}{3}$  Füllung eintritt, tritt sie bei Quecksilber schon ein, ehe das Glas noch halbgefüllt ist, und die stärkste Tonerniedrigung fällt demgemäss hier in eine viel frühere Periode

der Füllung als beim Wasser. Alles das folgt nothwendig aus der theoretischen Formel (13). Ueber die erwähnten Differenzen dagegen, welche in Tabelle 11 zwischen den beobachteten und berechneten Tonerniedrigungen bestehen — für kleine Flüssigkeitssäulen sind erstere zu gross, für grosse zu klein — kann man sich verschiedene Vorstellungen machen. Am wahrscheinlichsten ist es, dass auch hier der Einfluss der Höhen, d. h. der Breite der den Schall fortpflanzenden Flüssigkeitsschicht sich geltend macht; die Beobachtungen reichen indess nicht hin, um ein Eingehen auf diese Vermuthung angezeigt erscheinen zu lassen.

Breslau, 6. Sept. 1882.

### XIII. *Eine kleine Veränderung am Pyknometer; von Eilhard Wiedemann.*

Da in neuerer Zeit mehr und mehr spec. Gewichtsbestimmungen fester Körper, um Beziehungen zwischen denselben und der chemischen Constitution aufzufinden, ausgeführt werden, so dürfte die im Folgenden mitgetheilte Verbesserung des Pyknometers nicht ohne Interesse sein. Mittelst derselben gelingt es, bei Anwendung von Pulvern ebenso genaue Resultate zu erzielen, wie bei der von grösseren Körpern.

Bekanntlich wägt man bei der ersteren Methode zunächst ein Pyknometer leer, dann mit Wasser, dann mit der betreffenden Substanz und endlich mit Wasser und Substanz gefüllt. Sind die Gewichte in diesen Fällen  $P$ ,  $\Pi$ ,  $p$  und  $\pi$ , so ist das spec. Gewicht der Substanz:

$$s = \frac{p - P}{[\Pi + (p - P)] - \pi}.$$

Zwischen den einzelnen Körnchen ist nun aber stets Luft eingeschlossen, und erst durch starkes Auskochen gelingt es, dieselbe zu entfernen, und selbst dann nicht immer. Auf Körper, die beim Erwärmen sich zersetzen oder schmelzen etc., ist diese Methode daher in der bisherigen Form nicht anwendbar oder gibt doch höchst ungenaue Resultate. Auch bei Körpern, die leicht in Wasser schweben oder auf der

Oberfläche bleiben, wie fein vertheiltes Bariumsulfat, erhält man ungenaue Resultate, indem diese Körper nach dem Kochen nicht wieder zu Boden sinken und beim Einsetzen des Stöpsels zum Theil mit dem überschüssigen Wasser herausgedrängt werden.

Ich habe mich nun zum Füllen des Pyknometers einer von mir schon früher angegebenen Methode<sup>1)</sup> bedient, bei



welcher der störende Einfluss der Luft vollständig ausgeschlossen ist. *A* ist das Pyknometer, in das der eingeschliffene Stöpsel *a* passt; derselbe ist von einem Glasrohr durchsetzt, das bei *b* etwas umgebogen ist und bei *c* in den inneren Theil eines Schlifves endigt, dessen äusserer Theil sich an dem aus engen Glasröhren bestehenden Stück *dg* befindet. *f* und *e* sind Hähne, *h* ein kleiner Trichter und *g* der innere Theil eines Schlifves, dessen äusserer Theil mit

einer guten Quecksilberluftpumpe, wie sie sich jetzt wohl in jedem Laboratorium finden sollte, verbunden ist.

Man wägt nun zunächst das Pyknometer mit dem ganz schwach eingefetteten Stöpsel *a* für sich, letzteren hängt man dabei am besten an der Biegung *b* mittelst eines Drahtes auf; dann verbindet man es mit dem Theile *dg*, schliesst *e*, dessen Hohlraum vorher mit einem Tropfen Wasser gefüllt ist, öffnet *f* und evacuirt bis zur Luftleere; dann lässt man aus *h* das vorher gut ausgekochte Wasser einfließen, löst das Pyknometer bei *c* los, wischt das Fett daselbst ab und wägt. Dann trocknet man es aus, bringt das Pulver hinein und wiederholt dasselbe Verfahren. Die Röhre ist bei *b* umgebogen, um das Pulver beim Einlassen der Flüssigkeit nicht zu sehr aufzurühren. Wählt man das Pyknometer *A* klein, pumpt zunächst bis zum Hahne *f* alle mit der Pumpe communicirenden Räume vollkommen aus, so genügt schon ein drei-

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 17. p. 561. 1882.

bis viermaliges Spiel der Pumpe, um den Raum in *A* luftleer zu machen. Bei der dazu nöthigen Zeit verlieren aber selbst wasserhaltige Salze, deren Dämpfe eine nicht gar zu grosse Spannkraft haben, wie z. B. die Doppelsulfate von Zink und Magnesium mit Kalium und Ammonium nur eine so geringe Menge ihres Krystallwassers, dass sich auch für sie hinlänglich genaue Resultate ergeben.

Im Folgenden sind als Belege für die Genauigkeit der Methode zwei Reihen von Messungen an Glaspulver und gefälltem Bariumsulfat mitgetheilt. Dieselben sind von Hrn. Lehrer R. Schulze mit grosser Sorgfalt ausgeführt worden. Zu jeder einzelnen Messung war eine Zeit von etwa  $\frac{1}{2}$  bis  $\frac{3}{4}$  Stunden nöthig,

## I. Glaspulver.

<i>P</i>	<i>H</i>	<i>p</i>	$\pi$	Temp.	<i>s</i>
9,2554	19,4095	14,3788	22,4468	15,7°	2,4559
9,2554	19,4095	10,5368	20,1689	16,4°	2,4547
9,2554	19,4095	13,608	21,9894	15,1°	2,4553
9,2554	19,4095	13,271	21,7895	16,4°	2,4551

## II. Bariumsulfat.

<i>P</i>	<i>H</i>	<i>p</i>	$\pi$	Temp.	<i>s</i>
9,2554	19,4095	10,5962	20,445	14,9°	4,3958
9,2554	19,4095	11,7652	21,3484	14,9°	4,3962
9,2554	19,4095	14,333	23,3323	14,5°	4,3969
9,2554	19,4095	13,0445	22,3368	14,5°	4,3967

Die spec. Gewichte weichen um nicht ganz eine Einheit in der dritten Decimale voneinander ab, was als höchst befriedigendes Resultat angesehen werden kann.

Hat man eine grössere Anzahl von spec. Gewichtsbestimmungen auszuführen, so würde es sich empfehlen, mehrere Pyknometer anzuwenden, die an verschiedene mit der Luftpumpe verbundene Arme sich ansetzen und gleichzeitig ausgepumpt werden. Dadurch würde eine ziemlich beträchtliche Zeitersparniss eintreten.

Leipzig, im October 1882.

**XIV. Bemerkung zu der Abhandlung von Hrn. Glan  
über die Dichtigkeit des Lichtäthers;  
von Eilhard Wiedemann.**

Nach Hrn. W. Thomson<sup>1)</sup> ist die Masse  $M$  eines englischen Cubikfusses Lichtäther grösser als  $83g/V^3n^2$  Pfund englisch, wenn  $g$  die Gravitationsconstante,  $V$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und  $n$  das Verhältniss der grössten Geschwindigkeit eines schwingenden Aethertheilchens zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bedeutet. Nach Thomson kann  $n$  nur klein sein. Setzt man  $n = 1/50$ , so ist dies nach ihm sicher ein zu grosser Werth, und berechnet man damit  $M$ , so findet man nach W. Thomson  $1/(1560 \times 10^7)$  Pfund und hieraus ergibt sich eine untere Grenze für die Aetherdichtigkeit.

Hr. Glan entwickelt ferner, dass wenn  $\delta$  die grösste Dilatation ist, die der Lichtäther erfahren kann, ohne zu zerreißen, zwischen  $\delta$  und  $n$  folgende Relation besteht:

$$\delta = \sqrt{1 + n^2} - 1.$$

Statt des Lichtäthers betrachtet er beliebige feste oder flüssige Körper, für die er nachzuweisen sucht, dass sie erst bei grösseren Dilatationen zerreißen als der Lichtäther. Aus Bestimmungen an gewöhnlichen Körpern erhält man demnach einen zu grossen Werth von  $n$ . Nach F. Neumann ist  $\delta$  für Glas  $1/1443$ , also  $n = 1/27$ , d. h. doppelt so gross als W. Thomson angenommen hat. Das Gewicht eines Cubikfusses Aether ist dann ca. viermal so gross als Thomson angibt. Für Wasser sucht Hr. Glan<sup>2)</sup> aus Messungen von Buys-Ballot<sup>3)</sup> über das Gewicht, welches zum Abreißen einer Platte von einer sie benetzenden Flüssigkeit erforderlich ist, ein Maass für  $\delta$  zu finden, und setzt  $\delta = 1/(37 \times 10^6)$ . Bekanntlich tritt hierbei aber die Kraft, welche die einzelnen Theilchen zusammenhält, nur in höchst

1) W. Thomson, Phil. Mag. (4). 9. p. 36. 1854.

2) Glan, Wied. Ann. 7. p. 655. 1879.

3) Buys-Ballot, Pogg. Ann. 71. p. 177. 1847.



indirecter Weise ein, da man bei diesen Versuchen die Capillaritätsconstante  $\alpha$  misst. Der aus diesen letzteren Betrachtungen von Hrn. Glan berechnete Werth für die Aetherdichte hat daher auch nicht die ihm beigelegte Bedeutung.

Dagegen können eher Versuche von Berthelot<sup>1)</sup> zu einer solchen Betrachtung verwendet werden. Derselbe schloss in ein dickwandiges ziemlich enges Rohr soviel Flüssigkeit ein, dass es von letzterer fast vollständig erfüllt war, und erwärmte so lange, z. B. bis 28°, bis die Flüssigkeit den ganzen inneren Raum des Rohres füllte. Liess er dann die Flüssigkeit abkühlen, so zog sie sich nicht allmählich, sondern plötzlich bei 18° unter lebhaftem Geräusch zusammen, besonders wenn er die Röhre schwach erschütterte. Demnach vermag das Wasser bei 18 und 28° dasselbe Volumen einzunehmen, zwischen 20 und 30° ändert sich aber das Volumen des Wassers um etwa  $\frac{25}{10000}$ , die linearen Dimensionen desselben ungefähr um  $\frac{83}{100\ 000}$  oder rund um  $\frac{1}{1000}$ . Eine solche Verlängerung kann demnach nach den Versuchen von Berthelot der Abstand zweier Molecüle im Minimum erfahren, ohne dass die Continuität des Wassers unterbrochen wird. Für Wasser ist  $\delta$  demnach im Maximum  $\frac{1}{1000}$ , also weit grösser als der von Hrn. Glan abgeleitete Werth, und stimmt nahezu mit dem für feste Körper gefundenen überein. Für  $n$  folgt hieraus ebenfalls etwa  $\frac{1}{23}$ .

#### XV. Ueber die wahre Cohäsion der Flüssigkeiten; von Eilhard Wiedemann.

Bekanntlich ist es bisher nicht gelungen, die wahre Cohäsion der Flüssigkeiten zu bestimmen, d. h. die Kraft zu ermitteln, welche nöthig ist, um zwei in der Oberflächeneinheit aneinander grenzende Flüssigkeitsschichten voneinander zu trennen. Die Messungen der Capillaritätsconstante geben eine äusserst complicirte Function dieser Kraft, multiplicirt

1) Berthelot, Ann. d. chim. et phys. (3) 30. p. 232. 1850.

mit einer Länge, die von der Ordnung des Radius der Wirkungssphäre der Molecularkräfte ist. Man sollte daher auch den Namen Cohäsion für die Constanten, welche die Capillaritätsphänomene bestimmen, beseitigen und ihn durch den Namen Capillaritätsconstante ersetzen, indem dadurch vielfach vorgekommene Irrthümer vermieden werden würden.

Aus den in der vorhergehenden Notiz besprochenen Versuchen von Berthelot lässt sich wenigstens etwas über die wahre Cohäsion eruiren.

Nehmen wir an, dass die Dilatabilität des Wassers ebenso gross ist wie seine Compressibilität, und setzen wir den Compressibilitätscoefficienten = 0,000 045, so entspricht einer Volumenvergrösserung um 0,00250, wie sie Berthelot an Wasser, ohne ein Zerreißen der Flüssigkeit beobachtete, eine Spannung auf der Flächeneinheit von etwa 55 Atmosphären. Dieser Werth liefert eine untere Grenze für die Kraft, mit welcher die Flüssigkeitsschichten auf der Flächeneinheit aneinander oder an der benetzten Gefässwand festgehalten werden.

Genauere Messungen auf dem von Berthelot eingeschlagenen Wege, werden hierüber bestimmtere Auskunft geben.

### XVI. Ueber die Verdichtung von Flüssigkeiten an festen Körpern; von Eilhard Wiedemann.

Wilhelmy<sup>1)</sup> hatte aus Versuchen über die Capillarität gefolgert, dass auf Glasoberflächen, die in Wasser eintauchen, letzteres in grosser Menge condensirt sei. Spätere Versuche von Röntgen<sup>2)</sup>, Schleiermacher<sup>3)</sup> und Volkmann<sup>4)</sup>, die das specifische Gewicht desselben Körpers einmal in ganzen Stücken und dann in feinvertheiltem Zustande, wobei die Oberfläche eine weit grössere ist, ermittelten, ergaben aber, dass das Gewicht der verdichteten Schicht ein äusserst ge-

1) Wilhelmy, Pogg. Ann. 119. p. 117. 1863; 122. p. 1. 1864.

2) Röntgen, Wied. Ann. 3. p. 321. 1878.

3) Schleiermacher, Wied. Ann. 8. p. 52. 1879.

4) Volkmann, Wied. Ann. 11. p. 182. 1880.

ringes, nicht bestimmbares ist. Das letztere Resultat steht auch in vollkommener Uebereinstimmung mit dem, was uns die neueren Untersuchungen von Van der Waals<sup>1)</sup> über die Grösse der Molecularkräfte gelehrt haben, wie ich im Folgenden zu zeigen beabsichtige.

Die Verdichtung der Flüssigkeit auf der Wand rührt daher, dass die von der Wand ausgehenden und mit der Entfernung von derselben schnell abnehmenden Kräfte die Flüssigkeit innerhalb einer Schicht, deren Dicke  $a$  gleich der Wirkungssphäre der Molecularkräfte ist, comprimiren. Wir können uns die betreffende Schicht in einzelne dünnere von der Dicke  $dx$  zerlegt denken, innerhalb deren die Molecularkraft  $\kappa$  als constant angesehen werden kann. Nehmen wir ferner an, dass der Compressibilitätscoëfficient  $\alpha$  vom Druck unabhängig sei, ist  $s$  das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist auf der Flächeneinheit eine Menge:

$$d = \int_0^a \kappa \alpha s dx \quad \text{verdichtet.}$$

Setzen wir die von der Wand auf die Flüssigkeit ausgeübte Kraft  $\kappa$  gleich dem Zug  $K$ , den eine Flüssigkeit infolge der Molecularkräfte auf ihre oberflächlichen Theile ausübt, so nehmen wir jedenfalls eine Kraft von derselben Grössenordnung an, wie diejenige, die zwischen Flüssigkeit und Wand an der Berührungsfläche wirkt. Ersetzen wir aber in dem obigen Ausdruck  $\kappa$  durch  $K$ , so erhalten wir einen viel zu grossen Werth für die verdichtete Menge  $d$ , da ja  $\kappa$  sehr schnell mit der Entfernung von der Wand abnimmt. Es wird also:

$$d < K \alpha s a.$$

Für Wasser ist  $K = 10000$  Atmosphären,  $\alpha = \text{ca. } 5 \times 10^{-6}$  und nach Quincke<sup>2)</sup>  $\bar{a} = 0,000\,000\,5^{\circ}\text{cm}$ , sodass:

$$d < 10000 \times 0,00005 \cdot 0,000\,000\,5 \text{ g} = 25 \times 10^{-8} \text{ g}.$$

Es ist demnach schon  $K \alpha s a$ , also erst recht  $d$  eine vollkommen unmessbare Grösse.

Die Werthe Volkmann's<sup>3)</sup> für die Dicke der Grenz-

1) J. D. van der Waals, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, deutsch von F. Roth.

2) G. Quincke, Pogg. Ann. 137. p. 402. 1869.

3) Volkmann, Wied. Ann. 11. p. 117. 1880.

schicht, bei deren Annahme die Gesetze für die Steighöhen von Flüssigkeiten in Capillarröhren und an festen ebenen Wänden gültig sind, lassen sich zu diesen Betrachtungen deshalb nicht verwenden, weil nicht wirklich die reelle Existenz einer so dicken Grenzschicht von anderer Beschaffenheit als der der freien Flüssigkeit erwiesen ist.

## XVII. *Das Leukoskop und einige mit demselben gemachte Beobachtungen; von Arthur König.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 6 u. 7.)

Vor einigen Jahren ist von Hrn. Geheimrath Helmholtz ein Apparat construirt und von ihm mit dem Namen „Leukoskop“ belegt worden, der zur genaueren Erforschung des Farbenperceptionsvermögens bestimmt ist, und dessen Verwendbarkeit zu einer Vergleichung der Zusammensetzung des von verschiedenen Lichtquellen ausgesandten Lichtes keinem Zweifel unterliegt.

Da bisher ausser in einer wenig verbreiteten Promotionsschrift<sup>1)</sup> und in einer nur für einen engeren Kreis bestimmten und auf geringes Beobachtungsmaterial begründeten kurzen Publication<sup>2)</sup> keine Beschreibung jenes Apparates gegeben ist, so erlaube ich mir, nachstehend im Auftrage des Hrn. Helmholtz jenes Versäumniss nachzuholen und im Anschluss daran die Folgerungen, welche sich aus den bisherigen mit dem Leukoskop gemachten Beobachtungen ergeben, sowie die einer vollständigen Lösung der hierbei in Betracht kommenden physiologisch-optischen Fragen sich entgegenstellenden Schwierigkeiten darzulegen.

### § 1. Beschreibung des Leukoskopes.

In Fig. 6 ist ein von oben gesehener horizontaler Durchschnitt durch das Leukoskop in halber natürlicher Grösse gegeben.

1) Diro Kitao, Zur Farbenlehre. Inaug.-Diss. Göttingen 1878. Beibl. 4. p. 51.

2) A. König u. H. Helmholtz, Verhandl. der physikal. Ges. in Berlin. 1882. Nr. 2.

Der hintere, d. h. dem leuchtenden Objecte zugewendete Theil besteht aus einer in der Röhre  $B$  drehbaren Hülse  $A$ , in welcher sich an dem äussersten Ende eine Linse  $L_1$ , deren Brennpunkt in die weiter unten zu erwähnende rechteckige Oeffnung  $R$  fällt, und weiter nach Innen ein Foucault'sches Polarisationsprisma  $F$  befindet. Die Lage der Polarisationssebene dieses Prismas kann durch einen an der Hülse  $A$  angebrachten Index  $J_1$ , der sich auf einer mit der Röhre  $B$  fest verbundenen Kreisscheibe  $K_1$  dreht, abgelesen werden. Die Röhre  $B$  enthält zwei genau gleich grosse Kalkspathrhomboëder  $S_1$  und  $S_2$ , welche so gerichtet sind, dass die optischen Hauptschnitte von beiden horizontal, die Rhomboëder selbst aber zu der zwischen ihnen befindlichen rechteckigen Oeffnung  $R$  symmetrisch liegen.

Die rechteckige Oeffnung  $R$  hat in verticaler, also zur Ebene der Zeichnung senkrechter Richtung eine Seitenlänge von 4,5 mm, während sie sich in horizontaler Richtung von fast vollständigem Schluss bis auf 3 mm erweitern lässt.<sup>1)</sup> An die Röhre  $B$  ist eine Hülse  $C$  angesetzt, welche in die Röhre  $D$  eingeschoben werden kann. Die Hülse  $C$  enthält die Linse  $L_2$ , deren Brennpunkt ebenfalls in die Oeffnung  $R$  fällt. Es lassen sich an  $C$  die Fassungen mehrerer rechtsdrehenden Quarzplatten  $Q_1, Q_2$  u. s. w. anschrauben; die Dicken derselben sind in einer gewichtssatzähnlichen Abstufung gewählt, sodass durch Zusammenfügen jede beliebige, bis zu 30 mm gehende Quarzschicht hergestellt werden kann. Die Ausfüllung des kleinen, der dünnsten dieser Quarzplatten entsprechenden Intervalles geschieht dann durch den zwischen  $D$  und  $E$  eingeschalteten Compensator, der aus den beiden linksdrehenden Quarzkeilen  $P_1$  und  $P_2$  und der rechtsdrehenden planparallelen Quarzplatte  $P_3$  besteht. Der Quarzkeil  $P_1$  kann durch eine Schraube horizontal verschoben werden, und eine auf der oberen Seite des Leukoskopes angebrachte Theilung

1) Die genauere Beschreibung dieser Einrichtung wird demnächst in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde“ gegeben, wo auch noch andere, nur den ausführenden Mechaniker interessirende Einzelheiten Erwähnung finden werden.

zeigt dann den Nullpunkt an, wenn die gemeinsame Dicke von  $P_1$  und  $P_2$  gleich derjenigen von  $P_3$  ist. Bei jeder anderen Stellung gibt die Scala die positive oder negative Differenz an zwischen der Dicke von  $P_3$  einerseits und der zur Geltung kommenden gemeinsamen Dicke von  $P_1$  und  $P_2$  andererseits.

An ihrem vorderen Ende trägt die Röhre  $E$  die getheilte Kreisscheibe  $K_2$ , auf welcher ein Index  $J_2$  spielt, der an einer Hülse  $H$  befestigt ist, die in ihrem Inneren das Nicol'sche Prisma  $N$  enthält, dessen Richtung der Polarisations-ebene hiermit bestimmt werden kann. Endlich enthält die Hülse  $H$  noch ein aus den Linsen  $L_3$  und  $L_4$  bestehendes Fernrohr, dessen Ocular  $L_4$  so einzustellen ist, dass in der Sehweite des Beobachters ein Bild der Oeffnung  $R$  entsteht.

## § 2. Theorie des Leukoskopes.

Denken wir das Objectiv des Leukoskopes einem sehr weit entfernten Objecte zugewandt, so entstehen von diesem in der Ebene der rechteckigen Oeffnung  $R$  infolge der Doppelbrechung in dem Kalkspath  $S_1$  zwei reelle umgekehrte verkleinerte Bilder. Die Breite des Objectes, d. h. seine Ausdehnung in der Richtung, die in Figur 7, welche die beiden Kalkspathe und die Oeffnung darstellt, durch den grossen punktierten Pfeil angezeigt ist, nehmen wir so an, dass jedes dieser beiden Bilder doppelt so breit ist, als die durch den Kalkspath hervorgerufene Verschiebung der beiden Bilder gegen einander beträgt. Der Oeffnung  $R$  ist nun eine solche Breite zu geben, dass die aufeinander liegenden Theile beider Bilder gerade in sie hineinfallen, während alles übrige abgeblendet wird. Es ist dieses in Fig. 7 angedeutet, wo der kleine ausgezogene Pfeil das von den ordentlichen Strahlen erzeugte, und der kleine gestrichelte Pfeil das von den ausserordentlichen Strahlen herrührende Bild darstellt. Durch den Kalkspath  $S_2$  betrachtet, werden dann die beiden übereinander gelagerten Theile des Bildes zu einem einzigen Bilde zusammengefügt erscheinen, während die Breite der Oeffnung  $R$  sich anscheinend verdoppelt, sodass in ihr ein vollständiges verkleinertes umgekehrtes Bild des Objectes

erblickt wird, wie es bei  $VV$  gezeichnet ist. Es ist aber zu beachten, dass der der rechten Hälfte des Objectes entsprechende linke Theil des Bildes nur von ausserordentlichen, d. h. senkrecht polarisirten Strahlen erzeugt ist, während die andere Hälfte aus ordentlichen, d. h. horizontal polarisirten Strahlen entstanden.

Dieses virtuelle Bild  $VV$  wird durch die Linse  $L_2$  in ein anderes virtuelles Bild verwandelt, welches in derselben Entfernung wie das Object liegt und mit diesem gleiche Grösse hat. Die Richtung bleibt hierbei unverändert, sodass also von einem durch die Linse  $L_3$  nach dem Objecte hinsehenden Auge dieses in natürlicher Grösse und Entfernung, aber umgekehrt erblickt werden würde. Dieses zweite virtuelle Bild wird durch das astronomische Fernrohr  $L_3L_4$  betrachtet und dadurch seine Richtung mit der des Objectes in Uebereinstimmung gebracht, sodass nunmehr der Beobachter die rechte Hälfte des Bildes in vertical, die linke in horizontal polarisirtem Lichte sieht. Für ihn ist das Gesichtsfeld begrenzt durch die Aussenränder zweier mit der Längsseite aneinander stossender Bilder der rechteckigen Oeffnung, und in dieser Umrahmung erblickt er ein continuirlich verlaufendes Bild der entfernten Gegenstände. Es hat diese Anordnung bei der Farbenvergleichung, von welcher wir weiter unten reden werden, den Vortheil, dass bei einem nicht völlig gleichmässig gefärbten Objecte an der Trennungslinie der beiden Oeffnungsbilder doch gleichgefärbte Theile des Objectes unmittelbar nebeneinander liegen, was ohne die Anwesenheit des Kalkspathrhomboëders  $S_1$  nicht der Fall sein würde.

Um Missverständnisse in den folgenden Erörterungen zu verhüten, wollen wir festsetzen, dass die Bezeichnungen „rechts“ und „links“ von jetzt an sich immer auf die Lage des Objectes (was ja mit der Erscheinung für den Beobachter zusammenfällt) beziehen. Unter dem „rechten Strahlenbündel“ verstehen wir demnach die von der rechten Hälfte des Objectes ausgehenden (also vertical polarisirten) Strahlen, wenn sie auch streckenweise thatsächlich an der linken Seite in dem Leukoskop verlaufen.



Bisher haben wir weder der Quarzplatten und -keile  $Q_1, Q_2$  etc., noch der beiden Polarisationsprismen  $N$  und  $F$  Erwähnung gethan. Den Einfluss und die Benutzung von  $F$  wollen wir erst später berücksichtigen und zunächst die Wirkung der Quarzplatten und des Analysators  $N$  verfolgen.

Ist das Object eine weisse, vom Sonnenlicht beleuchtete Fläche, so zeigen die beiden Theile des Gesichtsfeldes infolge der Drehung der Polarisationssebene in den Quarzplatten und der theilweisen Auslöschung des Lichtes durch den Analysator  $N$  beständig Complementärfarben, ändern aber ihre Färbung mit der Dicke der Quarzschicht und der Drehung von  $N$ . Es ist nun Aufgabe, zwei gleiche, d. h. weisse Complementärfarben zu finden, was möglich ist, wenn es gelingt, in jedem Strahlenbündel complementär gefärbte Theile des Lichtes auszulöschen.

Beide Strahlenbündel erleiden in der Quarzschicht eine Rechtsdrehung, deren Grösse der Dicke  $D$  der Quarzplatten proportional und ausserdem eine Function der Wellenlänge ist. Wir setzen diese Drehung demnach gleich  $D \cdot \varrho_{(\lambda)}$ . Die Function  $\varrho_{(\lambda)}$  wurde zuerst von Biot<sup>1)</sup> experimentell bestimmt. Er fand:

$$\varrho_{(\lambda)} = \frac{B}{\lambda^2},$$

wo  $B$  eine Constante bezeichnet. Später haben genauere Messungen von Broch<sup>2)</sup> die Ungenauigkeit dieser Angabe dargethan, und es hat dann v. Lang nachgewiesen, dass die Broch'schen Werthe für die Drehung sich ausdrücken lassen durch die Function:

$$\varrho_{(\lambda)} = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Die von Stefan<sup>3)</sup> gefundenen Werthe liessen sich ebenfalls mit einer solchen Function vereinbaren; nur hatten nach seinen Messungen die Constanten  $A$  und  $B$  etwas andere Werthe.

Da es wahrscheinlich ist, dass die Drehung der Polari-

1) J. B. Biot, Mem. de l'Acad. 2. p. 91. 1819.

2) O. J. Broch, Dove's Rep. 7. p. 113. 1846.

3) J. Stefan, Wien. Ber. (2) 50. p. 88. 1864.

sationsebene ebenso wie die Dispersion des Lichtes nur davon herrührt, dass die Wellenlänge nicht mehr sehr gross ist im Vergleich zu den Dimensionen der Wirkungssphäre eines Molecüls, so ist zu vermuthen, dass sich  $\varrho_{(\lambda)}$  ausdrücken lässt durch eine Function, welche mit wachsendem  $\lambda$  verschwindet. In der That hat Boltzmann<sup>1)</sup> durch sehr ausführliche Rechnungen nachgewiesen, dass die von Broch experimentell gefundenen Werthe sich auch in Uebereinstimmung befinden mit einer Function von der Form:

$$\varrho_{(\lambda)} = \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}.$$

Neuerdings haben Soret und Sarasin<sup>2)</sup> abermals mit grösster Sorgfalt  $\varrho_{(\lambda)}$  für sehr viele Werthe von  $\lambda$  experimentell gemessen und ebenfalls durch eine Function von der letzterwähnten Form auszudrücken versucht. Die mit ihrer Formel berechneten Werthe weichen nur so unbedeutend von den beobachteten ab, dass die Anwendbarkeit einer Function dieser Art keinem Zweifel mehr unterliegen kann. Als Werth der Constanten finden sie, wenn  $\lambda$  in Tausendstel Millimeter ausgedrückt wird:

$$B = 7,111\,540 \quad \text{und:} \quad C = 0,148\,061.$$

Hat nun in dem Leukoskop das analysirende Nicol'sche Prisma  $N$  eine solche Lage, dass seine Polarisations-ebene mit dem Hauptschnitt der Kalkspathrhomboëder  $S_1$  und  $S_2$  zusammenfällt, so wird die Intensität eines Strahles von der Wellenlänge  $\lambda$  nach dem Durchgang durch  $N$  (wenn er mit der Intensität Eins die Kalkspathrhomboëder passirt) auf der rechten Seite:

$$\sin^2 \{D \cdot \varrho_{(\lambda)}\}$$

und auf der linken Seite:

$$\cos^2 \{D \cdot \varrho_{(\lambda)}\}$$

betragen. Ertheilt man jedoch dem Nicol'schen Prisma  $N$  eine Drehung nach rechts (d. h. im Sinne des Uhrzeigers) um den Winkel  $\beta$ , so verwandeln sich die obigen Werthe in:

1) L. Boltzmann, Pogg. Ann. Jubelb. p. 128. 1874.

2) J. L. Soret u. E. Sarasin, Compt. rend. 83. p. 818. 1876.

$$\sin^2 \{D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta\} \quad \text{und:} \quad \cos^2 \{D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta\}.$$

Nach der Young-Helmholtz'schen Farbentheorie<sup>1)</sup> gibt es in der Netzhaut drei verschiedene Arten von Nervenfasern, welche bei einer Reizung die Empfindungen Roth oder Grün oder Violett<sup>2)</sup> erzeugen, und zwar ist die Stärke der Empfindung ausser von der Stärke der Reizung, d. h. von der lebendigen Kraft der auffallenden Lichtschwingungen, bei jeder der drei Faserarten in verschiedener Weise von der Wellenlänge abhängig.

Für das Sonnenlicht wollen wir die Stärke der Erregung ausdrücken durch die drei Functionen  $R_{(\lambda)}$ ,  $G_{(\lambda)}$  und  $V_{(\lambda)}$ . Nach der genannten Hypothese entsteht die Empfindung „Weiss“, wenn alle drei Faserarten gleich stark erregt sind, was wir bei einfallendem Sonnenlicht durch die Doppelgleichung:

$$\int R_{(\lambda)} d\lambda = \int G_{(\lambda)} d\lambda = \int V_{(\lambda)} d\lambda$$

auszudrücken im Stande sind, wobei als Grenzen der drei Integrale die Wellenlängen der beiden äussersten Enden des sichtbaren Spectrums genommen werden müssen.

Lassen wir Sonnenlicht durch das Leukoskop gehen, so wird die Intensität der Strahlen je nach ihrer Wellenlänge in der bereits oben angegebenen Art verändert, und wir erhalten als Gesammtirregung der drei Nervenarten durch das Licht des rechten Feldes:

$$\begin{aligned} & \int R_{(\lambda)} \sin^2 \{D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta\} d\lambda \\ & \int G_{(\lambda)} \sin^2 \{D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta\} d\lambda \\ & \int V_{(\lambda)} \sin^2 \{D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta\} d\lambda \end{aligned}$$

und durch das Licht des linken Feldes:

1) Th. Young, A course of lectures an natural philosophy and the mechanical arts. London. 1. (Lect. 37). 1807. und H. Helmholtz, Handb. d. physiol. Optik; Leipzig. 1867. (§ 20).

2) Die folgenden Erörterungen werden in ihrem schliesslichen Resultat nicht beeinflusst von dem noch bestehenden Zweifel, ob als dritte Grundempfindung Violett oder Blau anzunehmen sei.

$$\int R_{(\lambda)} \cos^2 \{ D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta \} d\lambda$$

$$\int G_{(\lambda)} \cos^2 \{ D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta \} d\lambda$$

$$\int V_{(\lambda)} \cos^2 \{ D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta \} d\lambda.$$

Berücksichtigen wir jetzt den Einfluss des Polarisators  $F$  und nehmen an, dass seine Polarisationssebene mit dem Hauptschnitt der Kalkspathrhomboëder den Winkel  $\alpha$  einschliesst, so wird die Intensität der aus den Kalkspathrhomboëdern austretenden Strahlen auf der linken Seite im Verhältniss von  $1:\cos^2 \alpha$  und auf der rechten Seite im Verhältniss von  $1:\sin^2 \alpha$  verringert sein. Wir haben daher die oben abgeleiteten Werthe für die Gesamttempfindungen der drei Nervenfasern mit dem entsprechenden Factor zu multipliciren, sodass wir nunmehr erhalten:

für die rechte Seite:

$$\sin^2 \alpha \int R_{(\lambda)} \sin^2 (D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta) d\lambda = \mathfrak{R}_1$$

$$\sin^2 \alpha \int G_{(\lambda)} \sin^2 (D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta) d\lambda = \mathfrak{G}_1$$

$$\sin^2 \alpha \int V_{(\lambda)} \sin^2 (D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta) d\lambda = \mathfrak{V}_1;$$

für die linke Seite:

$$\cos^2 \alpha \int R_{(\lambda)} \cos^2 (D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta) d\lambda = \mathfrak{R}_2$$

$$\cos^2 \alpha \int G_{(\lambda)} \cos^2 (D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta) d\lambda = \mathfrak{G}_2$$

$$\cos^2 \alpha \int V_{(\lambda)} \cos^2 (D \cdot \varrho_{(\lambda)} - \beta) d\lambda = \mathfrak{V}_2.$$

Bei der Construction des Leukoskopos wurde darauf gerechnet, durch passende Wahl der drei Variablen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $D$  vollständige Gleichheit der Farbenmischung auf beiden Seiten zu erzielen, d. h.:

$$(a) \quad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2, \quad \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_2$$

machen zu können. Die aus diesen drei Gleichungen sich ergebende vierte Gleichung:

$$(b) \quad \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{V}_2$$

lässt sich leicht mit Hülfe der Aenderung des Winkels  $\alpha$  erfüllen; es bleiben dann noch zwei Gleichungen, die man

durch die beiden Variablen  $\beta$  und  $D$  befriedigen zu können hoffte. Aus den Gleichungen (a) ergibt sich unter Berücksichtigung der Doppelgleichung:

$$\int R_{(\lambda)} d\lambda = \int G_{(\lambda)} d\lambda = \int V_{(\lambda)} d\lambda$$

dass:  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{B}_1$  und:  $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{B}_2$  ist.

Dieses ist aber die Bedingung dafür, dass beide Farbmischungen die Empfindung „Weiss“ erzeugen, sodass also bei auffallendem weissen Lichte eine Farbengleichheit beider Felder sich nur in der Weise herstellen lässt, dass jedes Feld weiss erscheint.

Der Versuch hat nun gezeigt, 1) dass bei jeder Dicke der Quarzplatte, welche 9 mm übersteigt, durch geeignete Wahl des Winkels  $\beta$  Farbengleichheit annähernd zu erzielen ist, und zwar wächst die Aehnlichkeit in der Farbe beider Felder mit der Dicke der Quarzschicht; 2) dass aber völlige Farbengleichheit wahrscheinlich erst bei unendlich grosser Quarzdicke, dann aber jedenfalls bei jeder beliebigen Grösse von  $\beta$  eintritt. Der aus der ersten Beobachtung folgende Schluss, dass jede Aenderung in der Dicke des Quarzes sich durch eine passende Drehung des analysirenden Nicols ersetzen lässt, oder mit anderen Worten, dass Quarzdicke und Stellung des Analysators nicht zwei voneinander unabhängige Variable sind, spricht ein uns noch unbekanntes Gesetz in der Farbenempfindung aus, dessen Formulirung aber infolge der sehr complicirten theoretischen Werthe der Functionen  $\mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{R}_2$ ,  $\mathfrak{G}_1$ ,  $\mathfrak{G}_2$ ,  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  bisher noch nicht möglich gewesen ist.

Wie sich aus unseren mathematischen Darlegungen ergibt und durch die Erfahrung bestätigt wird, zeigt eine spectroscopische Zerlegung der beiden Strahlenbündel, dass ihr Spectrum von schwarzen Streifen durchzogen ist, und zwar liegen bei dem einen Bündel die Minima der Intensität da, wo bei dem anderen sich die Maxima befinden, sodass also, wenn wir uns beide Spectra aufeinander gelegt denken, ein völlig continuirliches Spectrum entsteht, welches in allen Theilen dieselbe Intensität besitzt, als wenn das Licht nicht durch die Quarzplatte und den analysirenden

Nicol hindurch gegangen wäre. Die Zahl der Streifen wächst mit der Dicke der Quarzplatten, und die Streifen selbst werden durch eine Rechtsdrehung des analysirenden Nicols nach dem violetten Ende hin verschoben. Es hat nun den Anschein, als ob es möglich wäre, eine solche Quarzdicke einzuschalten, und dem Analysator eine solche Drehung zu geben, dass in jedem der beiden Spectren die nicht ausgelöschten Farben zusammen Weiss erzeugten, dass also in dem einen Spectrum nur noch Gelb und Blau vorhanden, wodurch in dem anderem nur noch Roth, Grün und Violett unausgelöscht bleiben würden. Eine solche Vertheilung der Intensitätsmaxima ist, wie sich mit Benutzung der von Soret und Sarasin für die Constanten der Function  $q_{(\lambda)}$  gefundenen Werthe berechnen lässt, bei einer Quarzdicke von 12 bis 13 mm vorhanden, wobei der zugehörige Werth von  $\beta$  zwischen  $+98^\circ$  und  $+120^\circ$  liegt.

Die experimentelle Prüfung hat ergeben, dass bei diesen Werthen allerdings grosse Farbenähnlichkeit zwischen beiden Feldern besteht, und beide Felder grosse Annäherung an Weiss zeigen. Wie bereits oben erwähnt, ist aber eine derartige Gleichheit und Blässe bei jeder Quarzdicke durch passende Wahl von  $\beta$  zu erzeugen.

Zur genauen Einstellung auf grösstmögliche Aehnlichkeit lässt sich vortheilhaft der Umstand benutzen, dass man bei einem bestimmten Werthe von  $\beta$  nicht mehr zu unterscheiden vermag, welches der beiden Felder einen röthlichen Ton besitzt; dann hat das eine derselben eine gelbliche, das andere eine bläuliche Nuance.

Eine Berechnung der Lage der Absorptionsstreifen hat ergeben, dass bei allen verwendbaren Dicken der Quarzschicht im gelblich nuancirten Felde immer ein helles Band so lag, dass es den ganzen gelben Theil des Spectrums enthielt, während ein zweites helles Band im Blau wegen der grösseren Breite dieses Theiles des Spectrums denselben nicht völlig umfasste, sodass nicht alles Gelb dazu verwandt werden konnte, um durch seine Mischung mit Blau Weiss zu erzeugen. Als resultirende Mischfarbe musste daher ein gelbliches Weiss entstehen. In dem anderen Felde würden

die nicht ausgelöschten Theile des Spectrums, wenn wir den Streifen Blau, der hier noch stehen bleibt, entfernen könnten, bei ihrer Mischung wohl Weiss erzeugen. Da eine solche Entfernung aber nicht möglich, ohne die Lage und Breite aller anderen Absorptionsstreifen in so beträchtlicher Weise zu verändern, dass die Farbenähnlichkeit gänzlich zerstört wird, so entsteht die erwähnte bläuliche Nuance. Die Richtigkeit dieser Betrachtung wird dadurch noch viel wahrscheinlicher gemacht, dass bei Anwendung von Gas- und Kerzenlicht, bei denen ja die blauen Strahlen weniger intensiv als beim Sonnenlicht sind, thatsächlich eine weit grössere Aehnlichkeit in den Farben beider Felder zu erzielen ist.

Bei sehr grosser Quarzdicke liegen die Absorptionsstreifen so nahe zusammen, dass der übrige Theil des Spectrums bei jeder beliebigen Stellung des Analysators eine weissliche Mischfarbe erzeugt. Eine Drehung des Analysators ändert dann wohl die innere Zusammensetzung des Gemisches, nicht aber den subjectiven Eindruck auf unser Auge. Die hierzu erforderliche Quarzdicke liegt weit über der bei dem Leukoskop durch die Länge der Hülse  $D$  bedingten Maximalgrenze; ihre Benutzung ist aber sinnlos, weil es ja vor allem auf die Bestimmung des Winkels  $\beta$  ankommt.<sup>1)</sup>

Es ist die Vermuthung naheliegend, dass bei allen unseren Einstellungen, durch welche wir das Maximum der Farbenähnlichkeit erzielten, wenigstens für eine bestimmte Stelle des Spectrums das Verhältniss zwischen der Intensität in dem rechten Felde und der Intensität in dem linken Felde dasselbe bleibt, und besonders dass in dem erwähnten hellen gelben Band des linken Spectrums das Maximum der

1) In Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie, 8. Aufl., herausg. v. L. Pfaundler. Braunschw. 1879. 2. (1) p. 600, ist angegeben, dass eine solche Unabhängigkeit der Mischfarbe von der Stellung des Analysators schon bei einer Quarzdicke von 20 mm eintrete. Meine Beobachtungen zeigen, dass dieses nicht der Fall. Ein grosser Theil der im folgenden Paragraphen angegebenen Messungen ist bei einer solchen Quarzdicke gemacht, und es zeigte sich, dass der Winkel  $\beta$  noch genau zu bestimmen war.



Intensität immer ganz genau von Strahlen derselben Wellenlänge gebildet wird.

In der oben benutzten mathematischen Bezeichnung müsste dann  $\cos^2 (D \cdot e_{(\lambda)} - \beta) = \text{Const.}$  sein oder, weil  $D$  und  $\beta$  sich, wie die Erfahrung ergibt, zusammen stetig ändern:

$$D \cdot e_{(\lambda)} - \beta = \text{Const.}$$

Bezeichnen wir den zu der Quarzdicke  $D'$  gehörigen Neigungswinkel des Analysators mit  $\beta'$ , so müsste dann:

$$D' \cdot e_{(\lambda)} - \beta' = D \cdot e_{(\lambda)} - \beta$$

sein, woraus folgte, da  $e_{(\lambda)}$  hier constanten Werth hat, dass:

$$\frac{\beta - \beta'}{D - D'} = \text{Const.},$$

d. h. dass zwischen  $\beta$  und  $D$  eine lineare functionelle Verbindung bestände.

Zur Prüfung habe ich die Grösse von  $\beta$  für verschiedene Quarzdicken bestimmt und nachstehende Werthe für mein rechtes Auge gefunden:

$D$	$\beta$	$\frac{\beta - \beta'}{D - D'}$	$D$	$\beta$	$\frac{\beta - \beta'}{D - D'}$
9	+ 28,7°	22,0	16	+ 184,8°	20,6
10	+ 50,7	24,6	17	+ 205,4	22,7
11	+ 75,3	23,6	18	+ 228,1	21,4
12	+ 98,9	21,1	19	+ 249,5	21,3
13	+ 120,0	20,9	20	+ 270,8	19,6
14	+ 140,9	21,5	21	+ 290,4	18,4
15	+ 162,4	22,4	22	+ 308,8	21,0
16	+ 184,8		23	+ 329,8	

Die Werthe der letzten Spalte sind in der Weise berechnet, dass für  $D$  und  $D'$  immer zwei aufeinander folgende Werthe der Quarzdicken genommen sind, dass also beständig  $D - D' = 1$  mm. Die Unterschiede zwischen den Werthen von  $(\beta - \beta') / (D - D')$  sind so beträchtlich, dass sie nicht durch Beobachtungsfehler in den Werthen von  $\beta$ , welche die Mittel aus je sechs Ablesungen sind, erklärt werden können.

Da auch für das linke Auge sich eine ähnliche Ungleichheit in dem Werthe von  $(\beta - \beta') / (D - D')$  zeigt, so ergibt sich demnach: die zwischen der Quarzdicke und der zur Herstellung der grösstmöglichen Farbenähnlichkeit erforderlichen Richtung der Polarisationsebene des analysirenden Nicols

bei Sonnenlicht vorhandene Beziehung lässt sich nicht durch eine lineare Function ausdrücken.

Die drei Functionen  $R_{(\lambda)}$ ,  $G_{(\lambda)}$  und  $V_{(\lambda)}$  müssen durch andere ersetzt werden:

1. Wenn die Erregungsfähigkeit für die Strahlen verschiedener Wellenlänge in dem Auge eines Beobachters von der normalen abweicht, und

2. wenn die Intensitätsvertheilung für die verschiedenen Strahlenarten in dem einfallenden Lichte nicht gleich der des Sonnenlichtes ist.

Sowohl bei den Beobachtungen des Hrn. Kitao wie auch bei meinen zahlreichen Einstellungen hat sich ergeben, dass bei gleicher Lichtquelle und gleicher Quarzdicke für das rechte und linke Auge eine Differenz in dem zur Herstellung der grössten Farbenähnlichkeit erforderlichen Werthe von  $\beta$  sich zeigt.<sup>1)</sup>

Ist für zwei Beobachter (oder auch für die beiden Augen desselben Beobachters) eine solche Verschiedenheit hinsichtlich der Farbenperception vorhanden, dass bei den Curven, welche die Empfindlichkeit der Sehnervenfasern für die drei Grundfarben in der bekannten Weise graphisch darstellen, die Ordinaten mit einem Factor zu multipliciren sind (der aber für jede der drei Curven verschieden sein kann), um die Curven des einen in die Curven des anderen zu verwandeln, so wird nach unserer oben entwickelten Theorie für beide Beobachter dieselbe Einstellung zur Erzielung der grössten Farbenähnlichkeit erforderlich sein.

Ist für eine (oder zwei) der Curven dieser Factor gleich Null, d. h. entbehrt der Beobachter eine (oder zwei) der Grundempfindungen gänzlich, so wird zur Herstellung der Farbenähnlichkeit natürlich ebenfalls derselbe Werth von  $\beta$  erforderlich sein, wie für ein normales Auge.

Leider habe ich bisher keine Gelegenheit gehabt, Einstellungen des Leukoskopes von Farbenblinden vornehmen zu lassen.

1) In meiner früheren Publication über das Leukoskop habe ich diese Differenz als regelmässig zwischen  $\frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{2}^\circ$  liegend angegeben. Zahlreiche Messungen haben mich aber seitdem belehrt, dass eine solche Regelmässigkeit nicht vorhanden ist.

§ 3. Bisherige Beobachtungen mit dem Leukoskop.<sup>1)</sup>

Die nachfolgenden Angaben über die erforderlichen Werthe von  $\beta$  sind in der Weise gewonnen, dass ich aus zwölf Einstellungen des Leukoskopes, von denen sechs mit dem rechten und sechs mit dem linken Auge ausgeführt sind, das Mittel genommen habe. Wegen der Unregelmässigkeit, welche in den Differenzen zwischen den für die beiden Augen gesondert gewonnenen Mittelwerthen besteht, und welche es mir noch immer möglich erscheinen lässt, dass wir es hierbei mit blossen Beobachtungsfehlern zu thun haben, glaube ich davon absehen zu müssen, die Zahlen für beide Augen getrennt anzuführen.

Das von den Wolkenrändern reflectirte Sonnenlicht, ferner das Licht einer Leuchtgasflamme (Argand-Brenner) und das Licht einer Stearinkerze habe ich für verschiedene Dicken der Quarzschicht untersucht und folgende Werthe von  $\beta$  bei grösster Farbenähnlichkeit gefunden.<sup>2)</sup>

Dicke der Quarzschicht in Millim.	Grösse von $\beta$ in Graden		
	beim Sonnenlicht	beim Licht einer Leuchtgasflamme (Argand-Brenner)	beim Licht einer Stearinkerze
9	28,4 <sup>0</sup>	17,1 <sup>0</sup>	18,7 <sup>0</sup>
10	50,5	39,8	40,6
11	75,4	63,3	62,1
12	98,6	85,2	84,3
13	119,5	106,2	106,1
14	140,8	128,3	127,7
15	162,9	149,3	148,5
16	4,8	170,0	169,6
17	25,4	10,9	10,4
18	48,5	31,5	28,4
19	69,4	51,6	51,5
20	90,5	71,5	71,2
21	110,5	92,0	90,6
22	129,0	111,3	110,7
23	150,1	130,4	130,2

1) Während des Druckes dieser Abhandlung wurde über die folgenden Resultate bereits kurz berichtet in den Verhandl. der phys. Ges in Berlin. 1882. Nr. 12.

2) Da eine Aenderung des Winkels  $\beta$  um 180° ohne Einfluss auf die Färbung der beiden Hälften des Gesichtsfeldes ist (eine Aenderung um 90° vertauscht die beiden gelblich und bläulich nuancirten Felder untereinander), so habe ich immer, um kleinere Zahlen zu erhalten,  $\beta$  um 180° verringert, sobald sein Werth diese Grösse überstieg.

Es zeigt sich überall, dass der Winkel  $\beta$  beim Sonnenlicht grösser als beim Gaslicht und hier wieder (mit Ausnahme der beiden Quarzdicken von 9 und 10 mm, wo die Farbenähnlichkeit noch eine sehr geringe und daher die Einstellung schwierig ist) grösser als beim Kerzenlicht ist.

Da ein so geringer Unterschied in der Farbe, wie er zwischen dem Licht einer Leuchtgasflamme und dem einer Stearinkerze besteht, sich doch bei allen Dicken der Quarzplatten, welche 10 mm überstiegen, deutlich aussprach, so glaubte ich, bei den folgenden Messungen mich nur auf die Benutzung einer einzigen Dicke der Quarzschicht beschränken zu dürfen. Hierzu wählte ich eine Dicke von 20 mm, weil bei dieser einerseits die Farbenähnlichkeit schon sehr gross und andererseits doch noch nicht (wie bei dickeren Quarzplatten) die Bestimmung von  $\beta$  unsicher zu werden begann.

Mit dieser Quarzdicke lieferten andere von mir beobachtete Lichtquellen folgende Werthe von  $\beta$ , wobei ich die bereits erwähnten zur Vergleichung nochmals anführe:

Petroleumlampe (Flachbrenner) . . . .	71,1°
Stearinkerze . . . . .	71,2
Leuchtgas (Schnittbrenner) . . . . .	71,5
Leuchtgas (Argandbrenner) . . . . .	71,5
Im Sauerstoffstrom brennender Phosphor	75 bis 77
Drummond'sches Kalklicht . . . . .	76,7
Electrisches Kohlenbogenlicht <sup>1)</sup> . . . .	ca. 79
Magnesiumlicht . . . . .	86,3
Sonne . . . . .	90,5

Bei dem brennenden Phosphor war wegen der heftig flackernden Flamme die Einstellung nicht mit der sonst zu erreichenden Schärfe zu machen, weshalb ich die äussersten Grenzen der erhaltenen Werthe für  $\beta$  und nicht das Mittel angebe. Von einigen der hier angeführten Lichtquellen hat Pickering<sup>2)</sup> die Intensität der Lichtstrahlen bei den Linien *C*, *D*, *b'* und an einer Stelle zwischen *F* und *G* spectralphotometrisch gemessen und folgende Werthe erhalten, wobei er die Intensität bei der *D*-Linie immer gleich 100 setzt.

1) Näheres hierüber siehe p. 1008.

2) W. H. Pickering, Proc. Ann. of Arts and Sc. 11. Febr. 1880. p. 236. Vgl. Beibl. 4. p 728. 1880.

Lichtquelle	C	D	$\beta$	zwischen F u. G
Gaslampe . . . .	74	100	103	125
Kalklicht . . . .	59	100	113	285
Electrisches Licht .	61	100	121	735
Magnesiumlicht . .	50	100	223	1129
Sonnenlicht . . . .	45	100	250	2971

Die Lichtquellen habe ich hier in der Weise geordnet, dass jede folgende grössere relative Intensität der blauen Strahlen besitzt als die vorhergehenden. Da nun die so erhaltene Reihenfolge dieselbe ist, als wenn wir die Lichtquellen nach den oben angegebenen Grössen von  $\beta$  geordnet hätten, so können wir sagen:

Erfordert eine Lichtquelle  $A$  zur Herstellung der grössten Farbenähnlichkeit im Leukoskop einen grösseren Winkel  $\beta$  als eine andere Lichtquelle  $B$ , so sendet  $A$  im Verhältniss zur gesammten Intensität mehr blaue Strahlen aus als  $B$ . Das Intensitätsmaximum liegt also bei  $A$  näher dem blauen Ende des Spectrums als bei  $B$ .

Ausser den bisher genannten Versuchen habe ich zahlreiche Einstellungen des Leukoskopes beim Lichte electrischer Glühlampen vorgenommen. Ohne die freundliche Bereitwilligkeit, mit der Hr. Geheimrath Dr. Wern. Siemens die Vornahme dieser Messungen in dem mit so reichen Hilfsmitteln ausgestatteten Laboratorium seiner hiesigen Fabrik gestattete, wäre ich nicht in der Lage gewesen, die nachstehend angegebenen Resultate zu gewinnen. Ihm und Hrn. Dr. O. Frölich, der mich in liebenswürdigster Weise bei den Versuchen unterstützte, sage ich hiermit meinen aufrichtigsten Dank.

In den folgenden Tabellen enthält die erste Spalte die Intensität des die Lampe durchfliessenden Stromes in Ampère's, und zwar ist bei der Berechnung 1 Amp. =  $0,85 \frac{\text{Dan.}}{\text{S.-E.}}$  gesetzt worden. Die zweite Spalte gibt den Widerstand der Lampe bei der betreffenden Stromstärke in Ohm's (1 Ohm = 1,05 S.-E.) und die dritte Spalte die Lichtintensität in Normalkerzen. Die letzte Spalte endlich enthält die Grösse des Winkels  $\beta$ .

## Swan'sche Lampen.

## I.

Stromintensität	Widerstand	Lichtstärke	$\beta$
0,53 Ampère	31,8 Ohm	—	61,7°
0,62 "	31,9 "	0,2 N.-K.	63,2
0,80 "	30,9 "	0,9 "	66,3
0,95 "	30,6 "	2,6 "	69,6
1,10 "	30,2 "	6,8 "	71,4
1,24 "	30,3 "	15,3 "	72,7
1,40 "	29,7 "	26,5 "	74,8
1,54 "	29,6 "	39,8 "	76,0
1,67 "	30,1 "	66 "	77,3
1,78 "	29,6 "	90 "	77,7
1,86 "	29,8 "	98 "	77,9
1,91 "	30,3 "	111 "	77,8

Die Lampe brennt bei der letzten Stromintensität nach einiger Zeit durch.

## II.

Stromintensität	Widerstand	Lichtstärke	$\beta$
1,50 Ampère	31,3 Ohm	24 N.-K.	74,9°
1,65 "	30,8 "	37 "	75,7
1,79 "	30,8 "	57 "	76,9
1,95 "	30,2 "	83 "	77,8
2,08 "	30,3 "	111 "	78,0
2,18 "	30,1 "	166 "	77,8

Bei der letzten Stromintensität brennt die Lampe durch.

## III.

Stromintensität	Widerstand	Lichtstärke	$\beta$
0,73 Ampère	32 Ohm	0,2 N.-K.	64,4°
1,12 "	30,2 "	3,6 "	71,0
1,51 "	29,1 "	20,4 "	74,1
1,88 "	28,4 "	61 "	77,2
2,06 "	28,7 "	106 "	77,4

Bei weiterer Steigerung der Stromintensität brennt die Lampe durch, ehe es möglich ist, eine Messung vorzunehmen.

## IV.

Stromintensität	Widerstand	Lichtstärke	$\beta$
1,38 Ampère	25,9 Ohm	10 N.-K.	72,5°
1,61 "	26,4 "	25 "	74,5
1,87 "	26,3 "	50 "	76,8

Aus den drei ersten der angeführten Beobachtungsreihen geht deutlich hervor, dass mit steigender Lichtstärke zwar die Farbe sich stetig ändert, endlich sich aber asymptotisch einer bestimmten Farbe bis zum Durchbrennen nähert. (Die kleinen Abweichungen, welche einige der Werthe von  $\beta$  von einem solchen Verlaufe zeigen, sind ohne Zweifel als Beobachtungsfehler anzusehen). Die vierte Beobachtungsreihe ist nicht weit genug durchgeführt, als dass man aus ihr einen bestimmten Schluss zu ziehen berechtigt sein könnte. Ein ähnlicher asymptotischer Verlauf der Grösse von  $\beta$  zeigte sich auch bei allen Siemens'schen Glühlampen, deren Lichtfarbe ich untersuchte.

Ausserdem stellte ich noch Beobachtungen mit Edison'schen Lampen an. Leider reichte die zur Zeit verfügbare Anzahl galvanischer Elemente nicht aus, um die Leuchtkraft dieser Lampen soweit zu steigern, dass sie durchbrannten oder doch wenigstens dem Durchbrennen sehr nahe waren, sodass aus dem Verlauf der Werthe des Winkels  $\beta$  noch nicht auf eine asymptotische Annäherung an einen bestimmten Grenzwert geschlossen werden kann. In den folgenden Tabellen V und VI gebe ich die hier erhaltenen Werthe.

## Edison'sche Lampen.

## V.

Stromintensität	Widerstand	Lichtstärke	$\beta$
0,32 Ampère	161 Ohm	0,1 N.-K.	63,9°
0,47 „	143 „	1,2 „	67,7
0,63 „	130 „	6,6 „	71,2
0,78 „	124 „	19,1 „	73,7
0,94 „	117 „	47,5 „	76,0
0,99 „	115 „	59,0 „	77,0

## VI.

Stromintensität	Widerstand	Lichtstärke	$\beta$
0,71 Ampère	126 Ohm	10 N.-K.	74,5°
0,83 „	122 „	25 „	76,2
0,96 „	116 „	50 „	77,1

Es ist zu vermuthen, dass der Grenzwert, dem sich der Winkel  $\beta$  bei steigender Leuchtkraft nähert, mit dem Winkel



zusammenfällt, der dem Licht der Kohlenspitzen bei dem electrischen Bogenlicht entspricht, da wir es ja in beiden Fällen mit compacten Massen verbrennender Kohle zu thun haben. Zur Prüfung entwarf ich vermittelst eines achromatischen Linsensystems auf einem Schirme ein scharfes Bild der beiden Kohlenspitzen und des zwischen ihnen liegenden Bogens, sodass ich das Licht der ersteren getrennt von dem des letzteren in das Leukoskop einfallen lassen konnte, indem ich das Bild der Kohlenspitzen so zu richten suchte, dass es gerade auf ein in dem Schirm angebrachtes Loch fiel. Durch dieses richtete ich dann das Leukoskop nach der Lichtquelle hin. Leider verändern die Kohlenspitzen so schnell ihre Lage, was sich natürlich auf die Lage des Bildes (da man der grossen Intensität des Lichtes halber den Schirm sehr weit entfernt aufstellen muss) in stark vergrössertem Maasse überträgt, dass die Beobachtung nur sehr schwer und mangelhaft durchzuführen war. Als Werth für  $\beta$  erhielt ich ungefähr  $79^\circ$ , während der Grenzwert bei den Glühlampen ungefähr  $78^\circ$  betrug. Ich erachte aber die Beobachtung an dem Kohlenbogenlicht für so ungenau, dass ich in dem Bestehen der Differenz von  $1^\circ$  zwischen den beiden Werthen für  $\beta$  keinen Grund sehe, die oben erwähnte Vermuthung für die Gleichheit des von den glühenden Kohlen in beiden Fällen ausgesandten Lichts als experimentell widerlegt zu erklären.

Berlin, Physikal. Inst., Aug. 1882.

### XVIII. *Beitrag zur Theorie der Diffraction an Fernröhren; von Hermann Struve.*

In einer in den Memoiren der Petersburger Academie kürzlich veröffentlichten Abhandlung „Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben“<sup>1)</sup> habe ich unter anderem die Intensitätsvertheilung in der Focalebene

1) H. Struve, Mém. de l'Acad. 30. Nr. 8. 1882.

eines F  
das ge  
grenzt  
besitzt.  
Doppel  
von mi  
ich das  
durch d  
Entwic  
dieser  
in mat  
der, v  
vermei  
Wege  
ler<sup>1)</sup>  
welche  
zu Gel  
auf die  
D  
Licht  
der V  
darge  
den C  
Focal  
zogen  
Ausd

(1)

gegeb  
halbe  
„Lich  
in de  
fach

lung  
häng  
Fall

1  
Ann

eines Fernrohrs für den besonderen Fall untersucht, dass das geometrische Focalbild der Lichtscheibe geradlinig begrenzt ist und in allen Theilen dieselbe spezifische Intensität besitzt. Die Aufgabe führte auf die Bestimmung eines Doppelintegrals der Bessel'schen Function  $J_1(z)$  und wurde von mir am bezeichneten Orte in der Weise gelöst, dass ich das Integral in zwei Theile zerlegte, von denen der eine durch die convergente, der zweite durch die semiconvergente Entwicklung von  $J_1(z)$  sich ermitteln liess. So naheliegend dieser Weg auf den ersten Blick erscheint, so kann derselbe in mathematischer Beziehung doch nur als Umweg gelten, der, wie ich mich nachträglich überzeugt habe, leicht zu vermeiden ist. Die Aufgabe lässt sich nämlich auf directerem Wege und in eleganterer Form mittelst einer von Hrn. Mehler<sup>1)</sup> herrührenden Darstellung der Function  $J_0(z)$  lösen, welche mir leider bei der Abfassung jener Abhandlung nicht zu Gebote stand. Ich komme deshalb im Folgenden nochmals auf diese Untersuchung kurz zurück.

Die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung für einen Lichtpunkt und eine kreisförmige Oeffnung wird in folgender Weise durch die Bessel'sche Function ersten Ranges dargestellt. Bezeichnet man mit  $R$  den Radius der beugenden Objectivöffnung, so ist die Intensität eines Punktes der Focalebene im Abstand  $\zeta$  vom geometrischen Bildpunkt, bezogen auf die Intensität des letzteren als Einheit, durch den Ausdruck:

$$(1) \quad J = 4 \left( \frac{J_1(z)}{z} \right)^2,$$

gegeben, worin  $z = 2\pi/\lambda (R \cdot \zeta)$  zu setzen ist. Der Kürze halber mögen im Folgenden die Bezeichnungen „Lichtpunkt“, „Lichtlinie“, „Lichtscheibe“, auf deren geometrische Bilder in der Focalebene angewandt werden und die Grösse  $z$  einfach der Abstand heissen.

Durch Integration von (1) ergibt sich die Lichtvertheilung an Lichtlinien und Lichtscheiben, deren Punkte unabhängig voneinander leuchten. Fassen wir insbesondere den Fall einer geraden, homogenen, ins Unendliche sich er-

1) Mehler, Mathemat. Ann. 5. p. 141. 1872.

streckenden Lichtlinie ins Auge, so erhalten wir die Intensität im Abstand  $z$  von derselben, aus dem Integrale:

$$(2) \quad J = C \int_z^{\infty} \frac{(J_1(x))^2}{x \sqrt{x^2 - z^2}} dx,$$

in welchem  $C$  eine von  $z$  unabhängige Constante bedeutet, die von der Wahl der Intensitätseinheit abhängt. Beziehen wir die Intensitäten auf diejenige der Lichtlinie, so bestimmt sich  $C$  daraus, dass für  $z = 0$ ,  $J = 1$  werden muss.

Um das Integral (2) auf bekannte Functionen von  $z$  zurückzuführen, erinnere ich zunächst an einen von Hrn. C. Neumann gefundenen Satz, nach welchem das Quadrat einer Bessel'schen Function  $n$ . Ranges durch ein Integral einer Bessel'schen Function  $2n$ . Ranges dargestellt werden kann, nämlich:

$$(J_n(x))^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2n}(2x \sin \alpha) d\alpha.$$

Infolge dieses Satzes und anderer aus der Theorie der Bessel'schen Transcendenten bekannter Relationen lässt sich (2) successive in folgender Weise umformen:

$$\begin{aligned} \int_z^{\infty} \frac{(J_1(x))^2}{x \sqrt{x^2 - z^2}} dx &= \frac{2}{\pi} \int_z^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - z^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_2(2x \sin \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_z^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - z^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (J_1(2x \sin \alpha) + J_3(2x \sin \alpha)) \sin \alpha d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \beta + \sin 3\beta) d\beta \int_z^{\infty} \frac{\sin(2x \sin \alpha \sin \beta)}{\sqrt{x^2 - z^2}} dx. \end{aligned}$$

Die Aufgabe ist damit auf das Integral:

$$\int_z^{\infty} \frac{\sin ax}{\sqrt{x^2 - z^2}} dx$$

zurückgeführt. Wie nun Hr. Mehler a. a. O. bewiesen hat, kann die Function  $J_0(y)$  in die Form:

$$J_0(y) = \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

gebracht werden, welche für beliebige positive  $y$  mit Einschluss der 0 gültig bleibt. Demzufolge ist für Werthe von  $\alpha$  und  $\beta$  zwischen 0 und  $\frac{1}{2}\pi$  und für  $z \geq 0$ :

$$\frac{2}{\pi} \int \frac{\sin(2x \sin \alpha \sin \beta)}{\sqrt{x^2 - z^2}} dx = J_0(2z \sin \alpha \sin \beta)$$

und daher:

$$\int_z^{\infty} \frac{(J_1(x))^2}{x \sqrt{x^2 - z^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \beta + \sin 3\beta) d\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(2z \sin \alpha \sin \beta) \sin \alpha d\alpha.$$

Beachtet man ferner die leicht zu beweisende Relation:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(z \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha = \frac{\sin z}{z},$$

sowie, dass  $\sin \beta + \sin 3\beta = 4 \sin \beta \cos^2 \beta$  ist, so erhält man kürzer:

$$\int_z^{\infty} \frac{(J_1(x))^2}{x \sqrt{x^2 - z^2}} dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2z \sin \beta) \cos^2 \beta d\beta,$$

oder schliesslich, wenn man der Bessel'schen Function ersten Ranges entsprechend:

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin \beta) \cos^2 \beta d\beta,$$

setzt,

$$\int_z^{\infty} \frac{(J_1(x))^2}{x \sqrt{x^2 - z^2}} dx = \frac{H_1(2z)}{2z^2}.$$

Für  $z = 0$  wird:

$$\frac{H_1(2z)}{2z^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \beta \sin \beta d\beta = \frac{4}{3\pi}; \text{ mithin } C = \frac{3\pi}{4}$$

und folglich die Intensität im Abstände  $z$  von der Lichtlinie, bezogen auf die Intensität der letzteren:

$$(3) \quad J = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{H_1(2z)}{z^2}.$$

Die Function  $H_1(z)$  gehört zu einer Classe von Functionen, welche mit den Bessel'schen nahe verwandt sind und viele Analogien mit denselben besitzen. In meiner o. c. Abhandlung habe ich sie bei der Untersuchung der Diffraction an Heliometern in etwas anderer Weise eingeführt, nämlich in der Form:

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} \left( 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \beta) \sin \beta d\beta \right) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \left( \frac{z \sin \beta}{2} \right) \sin \beta d\beta.$$

Ausgehend von der letzteren gelangt man aber sofort zu der obigen, wenn man den Fourier'schen Lehrsatz:

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha z) d\alpha \int_0^{\infty} f(\lambda) \sin(\alpha \lambda) d\lambda$$

auf die Function  $f(z) = H_1(z)/z$  anwendet und dabei berücksichtigt, dass:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha \lambda) \cdot \sin^2 \left( \frac{\lambda \sin \beta}{2} \right)}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{für } \sin \beta > \alpha \\ 0 & \text{„ } \sin \beta < \alpha. \end{cases}$$

Aus den obigen Darstellungen folgert man die Reihenentwickelungen:

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \cdot \frac{z^{2n}}{(3 \cdot 5 \dots (2n-1))^2} \quad \text{und:}$$

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z^4} + \dots \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left( z - \frac{\pi}{4} \right) \left\{ 1 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 1}{2! (8z)^2} - \dots \right\} \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left( z - \frac{\pi}{4} \right) \left\{ \frac{3}{8z} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3}{3! (8z)^3} + \dots \right\},$$

welche denjenigen für  $J_1(z)$  analog sind. Erstere Reihe convergirt für jeden Werth von  $z$ , letztere ist semiconvergent. Setzt man ferner der Bessel'schen Function  $J_0(z)$  entsprechend:

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin \beta) d\beta$$

und berücksichtigt die Relation:

$$\frac{\partial H_1(z)}{\partial z} = H_0(z) - \frac{1}{z} H_1(z),$$

so findet man aus (3) die Lage der Intensitäts-Maxima und Minima durch die Wurzeln der Gleichung:

$$3H_1(2z) = 2zH_0(2z)$$

gegeben, welche mit wachsendem Abstand  $z$  sich mehr und mehr den Wurzeln der Gleichung:

$$\sin\left(2z - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi z}}$$

annähern. Da die Function  $H_1(z)$  wesentlich positiv ist, so können in diesem Fall keine absoluten Minima auftreten, was sich übrigens von selbst versteht.

Die Intensitätsvertheilung an einer geradlinig begrenzten homogenen Lichtscheibe, die sich nach einer Seite ins Unendliche erstreckt (Kreisscheibe von unendlich grossem Radius), ergibt sich nunmehr unmittelbar aus (3) durch Integration nach  $z$ . Offenbar hängt auch in diesem Fall die Intensität eines Punktes der Focalebene nur von dessen Abstand  $z$  von der geometrischen Begrenzung der Lichtscheibe ab. Je nachdem aber der Punkt innerhalb oder ausserhalb der Lichtscheibe liegt, haben wir hier zwei Fälle zu unterscheiden, die in einfacher Weise zusammenhängen. Bezeichnen wir nämlich mit  $I(+z)$  die Intensität im Abstände  $z$  ausserhalb der Lichtscheibe, mit  $I(-z)$  die Intensität im selben Abstand innerhalb der Lichtscheibe, und wählen die volle Intensität, welche die Scheibe in unendlicher Entfernung von der geometrischen Begrenzung besitzt, zur Einheit, so gilt die Beziehung:

$$I(+z) + I(-z) = 1,$$

welche ausspricht, dass die Summe der Intensitäten irgend zweier correspondirender Punkte, die in gleicher Entfernung, aber auf entgegengesetzten Seiten vom geometrischen Rande liegen, gleich ist der vollen Intensität. Insbesondere muss also die Randintensität genau die Hälfte der vollen Intensität betragen.

Wir brauchen deshalb nur die Intensität ausserhalb der

Scheibe in Betracht zu ziehen. Aus (3) geht aber für diesen Fall:

$$I(+z) = C \int_z^{\infty} \frac{H_1(2z)}{z^2} dz$$

hervor, und die Constante  $C$  bestimmt sich, gemäss der von uns getroffenen Wahl der Intensitätseinheit, daraus, dass für  $z = 0$ ,  $I(+z) = 1/2$  wird. Wegen:

$$\int_0^{\infty} \frac{H_1(2z)}{z^2} dz = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \beta d\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin(2z \sin \beta)}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

hat man nun  $C = 1/\pi$  und folglich:

$$(4) \quad I(+z) = \frac{1}{\pi} \int_z^{\infty} \frac{H_1(2z)}{z^2} dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{H_1(2z)}{z^2} dz$$

Einer weiteren Reduction scheint dies Integral nicht fähig zu sein; es muss also entweder durch die convergente oder semiconvergente Entwicklung von  $H_1(z)$  berechnet werden. Unter Zugrundelegung der ersteren findet man die rasch convergirende Reihe:

$$I(+z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{2^{2n}}{(3 \cdot 5 \dots (2n+1))^2} z^{2n-1}.$$

Für grössere Argumente ist es dagegen bequemer, die semiconvergente Reihe zu benutzen, deren Anfangsglieder unmittelbar zu dem genäherten Ausdruck:

$$I(+z) = \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{12z^3} \right) - \frac{1}{2\pi^{3/2}} \cdot \frac{\cos\left(2z + \frac{\pi}{4}\right)}{z^{3/2}}$$

führen; derselbe ist auf anderem Wege bereits a. a. O. abgeleitet. Beschränkt man sich auf das erste Glied, so hat man:

$$I(+z) = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\lambda}{R \cdot z}$$

und damit folgenden Satz:

„In grösseren Entfernungen vom geometrischen Rande ist die Intensität umgekehrt proportional der Entfernung  $z$



und dem Radius der Objectivöffnung. Die Intensitätscurve nähert sich daher einer Hyperbel, welche die Abscissenaxe (senkrecht zum Rande gedacht) zur Asymptote hat.“

Mit geringen Abänderungen lässt sich das obige Verfahren auch auf das allgemeinere Integral:

$$\int_z^{\infty} \frac{J_n(ax) \cdot J_n(bx)}{x \sqrt{x^2 - z^2}} dx$$

ausdehnen, wobei man von der allgemeineren Transformationsformel:

$$J_n(ax) \cdot J_n(bx) = \frac{x a^n b^n}{2^n \sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \frac{J_n(x \sqrt{a^2 - 2ab \cos \psi + b^2})}{\sqrt{a^2 - 2ab \cos \psi + b^2}} \sin^{2n} \psi d\psi$$

Gebrauch machen kann. Für  $n = 1$  folgt hieraus in der nämlichen Weise wie oben:

$$(5) \int_z^{\infty} \frac{J_1(ax) \cdot J_1(bx)}{x \sqrt{x^2 - z^2}} dx = \frac{ab}{\pi z} \int_0^{\pi} \frac{\sin(z \sqrt{a^2 - 2ab \cos \psi + b^2})}{a^2 - 2ab \cos \psi + b^2} \sin^2 \psi d\psi.$$

Die rechte Seite kann nunmehr wieder in eine convergente Reihe nach geraden Potenzen von  $z$  entwickelt werden, und die Entwicklungscoefficienten lassen sich durch die vollständigen elliptischen Integrale  $K$  und  $E$  darstellen.

Wie leicht einzusehen, wird man auf das Integral (5) geführt, wenn man die oben besprochene Aufgabe für eine ringförmige Objectivöffnung verallgemeinern will. Unter der Annahme einer solchen Oeffnung geht nämlich der Intensitätsausdruck (1) in den folgenden über:

$$J = \frac{4}{(1 - p^2)^2} \cdot \frac{(J_1(z) - p J_1(pz))^2}{z^2}$$

wo  $z = 2\pi/\lambda \cdot R\zeta$ ,  $R$  den Radius der äusseren und  $pR$  den Radius der inneren Begrenzung des Ringes bedeutet. Demnach erhält man in diesem Fall an Stelle von (2) ein Integral, welches sofort aus (5) bestimmt werden kann.

Zum Schluss mag hier noch die auf p. 35 meiner Abhandlung gegebene Intensitätstabelle Platz finden, die auf 1 bis 2 Einheiten der letzten Decimale sicher ist.

Intensitätstabelle für eine geradlinig begrenzte  
Lichtscheibe.

$$I(-z) = 1 - I(+z).$$

$$z = \left(\frac{2\pi}{\lambda} R \sin 1''\right) \cdot \xi''.$$

$z$	$I(+z)$	$z$	$I(+z)$	$z$	$I(+z)$	$z$	$I(+z)$
0,0	0,5000	2,0	0,1073	4,0	0,0528	9,0	0,0222
0,1	0,4730	2,1	0,0993	4,2	0,0506	9,4	0,0213
0,2	0,4461	2,2	0,0923	4,4	0,0484	9,8	0,0206
0,3	0,4195	2,3	0,0862	4,6	0,0459	10,2	0,0200
0,4	0,3934	2,4	0,0810	4,8	0,0434	10,6	0,0194
0,5	0,3678	2,5	0,0765	5,0	0,0410	11,0	0,0186
0,6	0,3424	2,6	0,0728	5,2	0,0389	11,4	0,0178
0,7	0,3187	2,7	0,0696	5,4	0,0369	11,8	0,0170
0,8	0,2955	2,8	0,0670	5,6	0,0353	12,2	0,0164
0,9	0,2732	2,9	0,0648	5,8	0,0339	12,6	0,0160
1,0	0,2521	3,0	0,0630	6,0	0,0328	13,0	0,0156
1,1	0,2321	3,1	0,0615	6,2	0,0319	13,4	0,0152
1,2	0,2132	3,2	0,0602	6,4	0,0311	13,8	0,0148
1,3	0,1956	3,3	0,0591	6,6	0,0305	14,2	0,0143
1,4	0,1793	3,4	0,0581	6,8	0,0299	14,6	0,0139
1,5	0,1642	3,5	0,0572	7,0	0,0293	15,0	0,0135
1,6	0,1504	3,6	0,0564	7,4	0,0280		
1,7	0,1379	3,7	0,0556	7,8	0,0264		
1,8	0,1265	3,8	0,0547	8,2	0,0248		
1,9	0,1163	3,9	0,0538	8,6	0,0233		

Pulkowa, August 1882.

XIX. Ueber die elliptische Polarisation  
des reflectirt gebeugten Lichtes;  
von Walter König.

Die Untersuchungen, die im Folgenden besprochen werden sollen, schliessen sich unmittelbar an diejenigen Arbeiten über Polarisation des gebeugten Lichtes an, welche die Herren Fröhlich und Réthy einst in diesen Annalen veröffentlicht haben. Die früheren Versuche über diesen Gegenstand — ich erinnere an die Arbeiten von Stokes<sup>1)</sup>, Holtz-

1) Stokes, Trans. of the Cambr. Phil. Soc. 9. p. 1. 1850.

mann<sup>1)</sup>, Lorenz<sup>2)</sup>, Quincke<sup>3)</sup> u. a. — waren zumeist in durchgehend gebeugtem Lichte angestellt worden und hatten zu keinem festen Ergebnisse geführt. Die Beobachtungen, die Hr. Fröhlich<sup>4)</sup> an Glasgittern im reflectirt gebeugten Lichte anstellte, liessen zum ersten mal mit voller Sicherheit eine sehr starke und sehr regelmässige Drehung der Polarisationsebene bei wechselnder Beugungsrichtung erkennen, nur dass der Zusammenhang zwischen Polarisationsrichtung und Beugungswinkel, der sich hier ergab, nicht mehr dem bekannten Stokes'schen Cosinusetze entsprach. Vielmehr befolgten diese Zahlen ein anderes, allgemeineres Gesetz, das von Hrn. Réthy<sup>5)</sup> aus der Theorie der Kugelwellen polarisirten Lichtes durch einfache Betrachtungen gewonnen wurde. Allein der Fall der geradlinigen Polarisation, der in diesen Arbeiten experimentell und theoretisch behandelt wurde, ist nur ein speciellerer Fall; im allgemeinen ist reflectirtes Licht elliptisch polarisirt, und wenn die Ellipticität bei Glasgittern noch so gering ist, dass sie vernachlässigt werden konnte, so tritt sie bei Gittern aus metallischem Material um so stärker hervor. Es entsteht daher die Frage, ob und wie diese elliptische Polarisation sich ändert mit dem Beugungswinkel, und ferner, wenn sich eine bestimmte Beziehung zwischen Beugungswinkel und Polarisationszustand ergeben sollte, ob für dieselbe aus der Theorie der Kugelwellen elliptisch polarisirten Lichtes eine Formel in ähnlicher Weise gewonnen werden kann, wie sie sich für die Fröhlich'schen Daten aus der Betrachtung geradlinig polarisirter Kugelwellen hat herleiten lassen. Auf die Lösung dieses Problems zielten die Arbeiten hin, die ich vornehmlich im Winter 1881/82 unter Leitung des Hrn. Geheimrath Helmholtz auf dem physikalischen Institute der hiesigen Universität unternommen habe.

Der Apparat, dessen ich mich zur Untersuchung des

1) Holtzmann, Pogg. Ann. 99. p. 446. 1856.

2) Lorenz, Pogg. Ann. 111. p. 315. 1860.

3) Quincke, Pogg. Ann. 149. p. 273. 1873.

4) Fröhlich, Wied. Ann. 1. p. 321. 1877.

5) Réthy, Wied. Ann. 11. p. 504. 1880.

reflectirt gebeugten Lichtes bediente, bestand aus einem grossen, horizontalen Theilkreise, der ein Collimatorrohr mit polarisirendem Nicol und ein Beobachtungsfernrohr mit Babinet'schen Compensator und analysirendem Nicol trug. Die Lage des Beobachtungsfernrohrs konnte am Horizontalkreis bis auf Secunden abgelesen werden; die Theilkreise der beiden Nicols liessen deren Stellungen bis auf Minuten bestimmen, und die Verschiebungen der Compensatorplatte konnten durch Schätzung bis auf den 1000. Theil einer Schraubenumdrehung gemessen werden. Als Lichtquelle musste in den meisten Fällen aus Mangel an Sonnenlicht Drummond'sches Kalklicht benutzt werden. Um bei gläsernen und photographirten Gittern die Reflexion an der hinteren Fläche der Glasplatte zu vermeiden, wurden derartige Gitter mit eben dieser Rückseite auf die Kathetenflächen rechtwinkliger Glasprismen mittelst Canadabalsams aufgekittet.

Die Justirung des Apparates, die Bestimmung der Nullpunkte der beiden Nicols und des Compensators und die Einstellung der Gitter auf dem Tischchen des Apparates erfolgte nach bekannten Methoden. Der Theilungswerth des Compensators aber, d. h. die Grösse derjenigen Verschiebung des beweglichen Prismas, welche einen Gangunterschied von einer ganzen Wellenlänge zwischen den beiden Componenten des hindurchgehenden Lichtstrahls hervorrief, musste für jede Stelle in den Beugungsspectren, deren Phasendifferenz gemessen werden sollte, besonders bestimmt werden, da er für verschiedene Farben zu sehr differirte, als dass man etwa einen gemeinsamen Mittelwerth hätte benutzen können. Dies geschah nun, entweder indem die einer Wellenlänge Verzögerung entsprechende Verschiebung in jedem einzelnen Falle einfach ausgemessen wurde; oder der Theilungswerth wurde nur für eine Lichtgattung — und zwar in diesem Falle für Natronlicht — durch vielfach wiederholte Einstellungen mit möglichster Genauigkeit bestimmt, und aus diesem einer Werthe alle übrigen durch Rechnung abgeleitet, nach folgenden Formeln, die ich Billet's<sup>1)</sup> *Traité d'optique* entlehne. Bedeutet  $\lambda$  die Wellen-

1) Billet, *Traité d'opt.* 2. p. 32. 1859.

länge,  $\alpha$  den Prismenwinkel,  $n_o$  und  $n_e$  die Brechungsquotienten des Quarzes, so ist der Theilungswerth, ausgedrückt in derjenigen Einheit, in der die Wellenlängen gegeben sind:

$$\gamma = \frac{\lambda}{(n_o - n_e) \operatorname{tg} \alpha}.$$

Wenn man den absoluten Werth der Theilung, welche die Verschiebungen misst, nicht kennt, so muss man  $\gamma = m \cdot g$  einführen, wo  $g$  die Verschiebung bedeutet, ausgedrückt in der Einheit der Theilung, und  $m$  den Reductionsfactor. Bezeichnet man endlich  $m \cdot \operatorname{tg} \alpha = c$  als die zu ermittelnde Constante des Compensators, so ist:

$$g = \frac{\lambda}{(n_o - n_e) c}.$$

Dabei sind  $n_o$  und  $n_e$  als Functionen von  $\lambda$  nach den Dispersionsformeln für den Quarz zu berechnen. Ich habe mich dabei stets derjenigen Formeln bedient, welche v. d. Willigen<sup>1)</sup> für den Quarz gefunden hat, wonach:

$$n_o - n_e = -0,008\,534 - 27145\,\lambda^{-2} + 356\,328\,(10)^6\,\lambda^{-4} \\ - 2931\,(10)^{18}\,\lambda^{-6},$$

wenn als Einheit für die Wellenlänge der zehnmillionste Theil eines Millimeters genommen wird. Hat man nun zunächst für eine bestimmte Wellenlänge  $\lambda'$  den Theilungswerth  $g'$  gemessen, so berechnet man  $n'_o - n'_e$  und daraus:

$$c = \frac{\lambda'}{g' (n'_o - n'_e)}.$$

Mit diesem Werthe von  $c$  lässt sich dann  $g$  für jede beliebige Wellenlänge berechnen, und andererseits findet man die Wellenlänge für eine beliebige zu untersuchende Stelle eines beliebigen Spectrums durch die bekannte Formel:

$$\lambda = \frac{\sin(i + \delta) - \sin i}{\pm \nu} b,$$

worin  $\nu$  die Ordnungszahl des Spectrums,  $b$  die Gitterbreite,  $i$  den Einfalls- und  $\delta$  den Beugungswinkel bedeutet.

Nach diesen einleitenden Schritten begannen die eigentlichen Messungen. Dabei wurde dem Collimator Nicol stets das Azimuth  $45^\circ$  ertheilt; das Gitter wurde unter einen

1) v. d. Willigen, aus den „Fortschr. d. Phys.“ 25. p. 285. 1869.

geeigneten Winkel zum einfallenden Strahle gestellt und darauf die Verschiebungen der Interferenzstreifen im Compensator und die Lagen des analysirenden Nicols für mehrere Stellen in jedem der reflectirten Beugungsspectra gemessen. Für das direct reflectirte Licht geschahen diese Bestimmungen in Natronlicht. Jede Einstellung wurde zehnmal hintereinander wiederholt und dann das arithmetische Mittel aus diesen zehn gleichwerthigen Daten genommen. Eine Prüfung der Genauigkeit, die diesen so gewonnenen Zahlen beizulegen wäre, ergab für die Azimuthsbestimmungen kein günstiges Resultat. Die Unsicherheit dieser Messungen war vielmehr gross zu nennen im Vergleich zu den an sich geringfügigen Aenderungen, welche die Azimuthe gerade innerhalb desjenigen Bereichs des Beugungsfeldes, in welchem Phasenunterschiede der Componenten bemerkbar sind, zu erfahren scheinen. Aus diesem Grunde wurde das Hauptaugenmerk auf die Ermittlung der Phasenunterschiede gerichtet, die zu weit brauchbareren Resultaten führte. Hier betrug der mittlere Fehler bei der Messung der Verschiebung des Interferenzstreifens noch nicht 0,005 einer Wellenlänge, und von dem anderen, bedeutend grösseren Fehler, der dem bei der Berechnung des Phasenunterschiedes angewandten Theilungswerthe  $g$  anhaften konnte, ging immer nur ein Bruchtheil, und zwar höchstens die Hälfte, in die Rechnung ein, sodass der ganze mögliche Fehler in der Bestimmung der Phasendifferenz zwischen 0,005 und 0,016 einer Wellenlänge angenommen werden konnte. Zur richtigen Beurtheilung der Differenzen, die sich später zwischen Beobachtung und Berechnung ergeben werden, ist es nöthig, die Phasendifferenzen bis auf Tausendstel anzugeben, wenn auch nach dem eben Gesagten streng genommen nur die beiden ersten Stellen der Berücksichtigung werth sind.

Die Ergebnisse der Messungen sind nun, nach der Natur der reflectirenden Mittel geordnet, folgende:

#### I. Reflexion an Glas.

Die Versuche mit einem in Glas geritzten Gitter von Wanschaff, dessen Gitterbreite zu 0,01 mm angegeben war,

führten zu den gleichen Resultaten, wie sie Hr. Ditscheiner<sup>1)</sup> bei Behandlung desselben Gegenstandes an Glasgittern erhalten hatte. Besaßen die Componenten des direct reflectirten Strahles einen Phasenunterschied von ungefähr einer Viertelwellenlänge, so zeigten die positiven Beugungsbilder gar keinen, die negativen einen Phasenunterschied gleich einer halben Wellenlänge. Betrug andererseits die Phasendifferenz im ungebeugten Strahle 0, resp.  $\frac{1}{2}\lambda$ , so fand in einem Spectrum negativer, resp. positiver Ordnung scheinbar ein Sprung der Phasendifferenz von 0 auf  $\frac{1}{2}\lambda$  statt. Ich sage „scheinbar“, weil das gebeugte Licht in der Nähe dieser Stelle von dem analysirenden Nicol so stark ausgelöscht wurde, dass es unmöglich war, zu entscheiden, ob thatsächlich der Uebergang von 0 auf  $\frac{1}{2}\lambda$  sprungweise oder innerhalb einer sehr kleinen Strecke stetig erfolgte. Auch über den Verlauf der Intensitätsverhältnisse wurde dasjenige bestätigt gefunden, was Hr. Ditscheiner in dem citirten Aufsatze darüber festgestellt hat, ohne dass es möglich gewesen wäre, speciellere Resultate zu gewinnen.

Ausserdem wurden Untersuchungen an bestäubten Glasflächen angestellt. Um die Erscheinungen möglichst rein zu erhalten, wurde die Fläche eines Prismas als reflectirende Fläche benutzt und mit Lycopodiumsamen bestäubt. In dem weisslichen Lichtschein, der sich um das direct reflectirte Licht bildet, wurden folgende Messungen gemacht:

1) $i = 58^{\circ} 34' 34''$ .				2) $i = 56^{\circ} 27' 4''$			
$\delta = +0^{\circ} 59' 20''$	$q = 4^{\circ} 13'$	$\Delta = 0,175$		$\delta = +0^{\circ} 56' 27''$	$\Delta = 0,300$		
0 0 0	2 58	0,228		0 0 0	0,369		
-1 0 0	6 54	0,287		-1 0 0	0,387		

Die Phasendifferenzen  $\Delta$  nehmen stetig zu, wenn man durch das direct reflectirte Licht hindurch von positiven zu negativen Beugungsrichtungen übergang, und wie bei der directen Reflexion an Glas in der Nähe des Polarisationswinkels sehr geringen Aenderungen des Einfallswinkels grosse Aenderungen der Phasendifferenzen entsprechen, so wuchs auch hier bei geringer Drehung der Beobachtungsrichtung der

1) Ditscheiner, Wien. Ber. 60. (2) p. 567. 1869.



Werth von  $\Delta$  um Bedeutesendes. Nähme man an, dass er in gleichem Maasse weiter wüchse, so würde er für Beugungswinkel von 5 und 6°, wie sie bei dem Glasgitter vorkamen, auf der einen Seite gleich Null, auf der anderen schon nahe gleich  $\frac{1}{2}\lambda$  sein, und es wäre erklärlich, warum bei dem Glasgitter von der elliptischen Polarisation des ungebeugten Strahles in den Beugungsspectren nichts zu spüren war — wenn anders für diese beiden, äusserlich so verschiedenartigen Erscheinungen das gleiche Princip als gültig angenommen werden darf.

## II. Reflexion an einer Silber-Collodium-Fläche.

Die erfolgreichsten und darum auch die zahlreichsten Messungen wurden an einem photographirten Gitter angestellt (Copie eines Nobert'schen Gitters, gefertigt von Lord Rayleigh), welches 3001 Striche auf einem Pariser Zoll enthalten sollte; genauer wurde seine Gitterbreite zu 0,009 036 mm bestimmt. Die charakteristischsten und zuverlässigsten dieser Beobachtungsreihen werden weiter unten im Zusammenhange mit der Berechnung ausführlich mitgetheilt werden. Hier will ich über die an diesem Gitter gewonnenen Ergebnisse nur Folgendes im allgemeinen bemerken.

Die elliptische Polarisation machte sich in einem bestimmten, bei mittleren Einfallswinkeln etwa 50° umfassenden Theile des Beugungsfeldes bemerkbar. Innerhalb dieses Bereiches zeigten die Intensitätsverhältnisse keine sehr bedeutenden Unterschiede; die Zahlen gingen zum Theil unregelmässig durch einander, und nur soviel war im ganzen ersichtlich, dass die Azimuthe sanken bis in die Nähe derjenigen Richtung, für welche  $\Delta = \frac{1}{2}\lambda$  war, und jenseits derselben wieder zunahmen. Ausserhalb des Bereichs der elliptischen Polarisation waren die Aenderungen der Azimuthe stärker, und hier führten die Messungen direct zu dem gleichen Resultate, welches Hr. Fröhlich an Glasgittern erhalten hat, dass nämlich die Azimuthe des gebeugten Lichtes annähernd so gross sind, als ob das Licht nach der betreffenden Richtung direct reflectirt worden wäre.

Dieser für die Aenderungen des Intensitätsverhältnisses

geltende Satz erfährt nun durch die genaue Ausmessung der Phasenunterschiede eine bemerkenswerthe Erweiterung. Denn es zeigt sich — wie eine Vergleichung der Tabellen<sup>1)</sup>, besonders eine in graphischer Form deutlich erkennen lässt —, dass auch die Werthe der  $\Delta$  annähernd so gross sind, wie sie in demjenigen direct reflectirten Strahle sein würden, der mit der Verlängerung des einfallenden Strahles denselben Winkel  $k = \pi - (2i + \delta)$  bildet, wie der gebeugte Strahl.

Zur Vervollständigung der Tabellen muss ich noch hinzufügen, dass wenn man über die Grenzen, innerhalb deren sich die  $\delta$  in den mitgetheilten Beobachtungen bewegen, hinausging, die Phasendifferenzen annähernd constant blieben, und zwar gleich 0 für grössere positive, gleich  $\frac{1}{2}\lambda$  für grössere negative Beugungswinkel, und ferner, dass für ungefähr die gleichen Werthe von  $k$  die elliptische Polarisirung sich stets auch unter anderen Einfallswinkeln zeigte, ganz unabhängig davon, ob das direct reflectirte Licht geradlinig oder elliptisch polarisirt war. Die  $\Delta$  waren nur unter anderen Einfallswinkeln wegen der Uebereinanderlagerung verschiedener Farben nicht gut zu messen. Dies in Rechnung gesetzt, kann man also allgemein sagen: In der durch Reflexion vom Gitter ausgesandten Lichtbewegung findet unter jedem Einfallswinkel ein allmähliches Wachsen des Phasenunterschiedes von 0 auf  $\frac{1}{2}\lambda$  statt, je mehr man sich von der Richtung der Verlängerung des einfallenden Strahles entfernt. Der Verlauf der Phasendifferenzen ist allerdings kein durchweg regelmässiger; es wird sogar das beständige Wachsen der  $\Delta$  zuweilen durch ein locales Sinken unterbrochen. Allein derartige Unregelmässigkeiten werden offenbar zu erwarten sein, sobald die Messungen nicht in homogenem Lichte, sondern, wie die vorliegenden, an Strahlen der verschiedensten Wellenlängen angestellt worden sind. Denn die Phasendifferenzen des gebeugten Lichtes stehen, wie die Beobachtungen unzweideutig erweisen, mit den polarisirenden Eigenschaften der reflectirenden Fläche in engstem Zusammenhange; diese aber

1) vgl. p. 1033—1035.

sind verschieden für Licht von verschiedener Wellenlänge. Dieser Umstand wäre in Verbindung mit den möglichen Beobachtungsfehlern ausreichend, um die in dem Verlauf der  $\Delta$  auftretenden Unregelmässigkeiten zu erklären. Im ganzen sind die Abweichungen doch nur geringfügig, und das Wachsen der Phasendifferenzen von 0 bis  $\frac{1}{2}$  ist zum mindesten für jede einzelne Farbe klar und deutlich in den unten mitgetheilten Resultaten ausgesprochen.

### III. Reflexion an einer Metallfläche.

Ausser dem gläsernen und dem photographirten Gitter stand mir noch ein in Spiegelmetall geritztes Gitter zu Gebote (getheilt von Chapman mittelst der Theilmaschine von Rutherford), welches 17296 Intervalle auf 1 Zoll enthalten sollte; doch ergab eine genauere Messung eine etwas geringere Gitterbreite, als sie hieraus folgen würde, nämlich  $b = 0,001\,470$  mm. Diese Kleinheit der Oeffnung machte das Gitter für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung wenig geeignet. Denn es beugte das Licht zu stark, und infolgedessen konnte eine Farbe immer nur an wenigen, weit voneinander entfernten Stellen des Beugungsfeldes ausgemessen werden. Sobald man aber weisses Licht anwandte und die Untersuchung auf verschiedene Theile der Beugungsspectra ausdehnte, so trat jene oben besprochene Abhängigkeit der Reflexionsconstanten der Gitterfläche von der Wellenlänge hier bei der reinen Metallfläche noch weit stärker und störender hervor, als oben bei dem photographirten Gitter. Dies werden folgende Messungen beweisen:

$\delta$			$k = \pi - (2i + \delta)$	$\lambda$	$\varphi$	$\Delta$
			1) $i = 30^\circ$			
-43°	17'	26"	76° 42' 34"	672,9	50° 56'	0,306
41	17	26	78 42 34	657,3	49 25	0,311
39	0	0	81 0 0	637,4	47 53	0,315
37	—	—	83 — —	618,1	44 17	0,317
35	—	—	85 — —	597,3	41 5	0,322
33	—	—	87 — —	574,8	36 54	0,333
31	—	—	89 — —	550,7	32 44	0,363
29	—	—	91 — —	525,0	29 55	0,396
0	—	—	120 — —	589,7	48 17	0,500

$\delta$			$k = \pi - (2i + \delta)$			$\lambda$	$\varphi$	$\Delta$
2) $i = 80$								
0	0	0''	20°	0'	0''	589,7	36° 50'	0,126
-36	18	46	56	18	46	480,8	41 36	0,324
39	10	2	59	10	2	486,5	46 14	0,322
40	48	6	60	48	6	518,6	53 21	0,315
44	17	2	64	17	2	589,5	55 48	0,304
46	3	44	66	3	44	627,0	58 42	0,310
61	9	36	81	9	36	486,5	46 28	0,370
63	46	56	83	46	56	518,6	49 1	0,365
69	28	14	89	28	14	589,5	56 24	0,357
72	25	49	92	25	49	627,0	56 59	0,359

Die erste dieser Tabellen zeigt ein stetiges Zunehmen der Phasendifferenz, je grösser der Winkel  $k$  wird, d. h. je mehr man sich von der Richtung der Verlängerung des einfallenden Strahles entfernt; in der zweiten dagegen sinken die Phasendifferenzen mit wachsendem  $k$  innerhalb jedes Spectrums, wachsen aber für jede einzelne Farbe vom ersten Spectrum zum zweiten. Zur Erklärung dieser Erscheinung genügte die Annahme, dass die Aenderung der Phasendifferenzen mit wachsendem  $k$  um so schneller vor sich gehe, je kleiner die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist. Dann ist leicht einzusehen, dass die Werthe der  $\Delta$  innerhalb eines Spectrums sinken können, wenn man, wie bei den negativen Spectren unter 2), mit wachsendem  $k$  von dem violetten Ende zum rothen wandert, während bei umgekehrter Farbenfolge, wie sie bei dem positiven Spectrum unter 1) statt hat, eine regelmässige Zunahme der  $\Delta$  zu erwarten wäre.

Um nun aber den Verlauf der Phasendifferenzen im allgemeinen noch genauer festzustellen, abgesehen von den feineren Modificationen, welche durch die Verschiedenheit der Wellenlängen bedingt sind, wurden noch einige Versuche mit Natronlicht ausgeführt, das bei weiter Oeffnung des Spaltes hinreichend starke Beugungsbilder gab, um die Interferenzstreifen im Compensator deutlich hervortreten zu lassen.

$\delta$			$k$			$\varphi$	$\Delta$
$i = 20^{\circ}$							
+28°	0'	15''	111°	59'	45''	33° 11'	0,444
0	0	0	140	0	0	53 32	0,500

$\delta$	$k$		$q$	$\Delta$
$i = 35^{\circ}$				
+42° 5' 40''	67°	54' 20''	44° 18'	0,280
0 0 0	110	0 0	46 8	0,478
-25 4 18	135	4 18	45 14	0,480
$i = 55^{\circ}$				
0° 0' 0''	70°	0' 0'	32° 33'	0,397
-30 17 33	100	17 33	44 53	0,393
54 2 11	124	2 11	46 8	0,436
77 36 13	147	36 13	46 47	0,454
$i = 70^{\circ}$				
0° 0' 0''	40°	0' 0'	29° 8'	0,226
-37 25 0	77	25 0	51 25	0,343
62 6 20	102	6 20	53 10	0,400
85 17 47	125	17 47	54 51	0,427
$i = 85^{\circ}$				
0° 0' 0''	10°	0' 0'	41° 47'	0,062
-48 29 11	58	29 11	57 25	0,282

Mit Ausnahme einer einzigen kleinen Abweichung zeigen diese Zahlen für steigende Werthe von  $k$  ein beständiges Wachsen der  $\Delta$  zwischen 0 und  $\frac{1}{2}\lambda$ , und wie sich im direct reflectirten Lichte die Phasendifferenzen nur wenig mit dem Einfallswinkel ändern, so geschieht auch hier die Zunahme des Phasenunterschiedes mit ausserordentlicher Langsamkeit. Aber für dieses Gitter bei so grossen Beugungswinkeln gilt jener Satz nicht mehr, welcher am photographirten Gitter die Werthe der  $\Delta$  angenähert ausgedrückt hatte; die Phasendifferenzen des gebeugten Lichtes sind hier nicht mehr eben so gross, sondern durchweg kleiner, als sie sein würden, wenn das Licht nach der betreffenden Richtung direct reflectirt worden wäre. Auch die Azimuthe  $q$  wachsen mit  $k$ ; doch lässt sich aus den wenigen zerstreuten Messungen nicht ersehen, ob ihr Verlauf ein ähnlicher ist, wie bei dem photographirten Gitter, ob sie z. B. in der Nähe der Richtung, für die  $\Delta = \lambda/4$  ist, auf ein Minimum herabsinken. Aber ein anderes muss ich noch hierbei bemerken: Die Azimuthe zeigen zum grossen Theil eben jene Eigenschaft, welche schon Hr. Fröhlich<sup>1)</sup> an einem Gitter von gleicher Beschaffenheit im direct reflectirten Lichte beobachtet hat; bei

1) Fröhlich, Wied. Ann. 13. p. 193. 1881.

kleinen Einfallswinkeln hat er nämlich die Azimuthe des reflectirten Lichtes grösser gefunden als die des einfallenden Lichtes. Die obigen Tabellen zeigen, dass diese Erscheinungen auch im gebeugten Lichte wiederkehren, ja, dass es unter jedem Einfallswinkel Beugungsrichtungen gibt, für welche die  $\varphi$  solche ungewöhnlichen Werthe besitzen, selbst dann, wenn im direct reflectirten Lichte, wie für  $i = 70^\circ$ , das Intensitätsverhältniss weit geringere Werthe hat. Auch hierin spricht sich also wieder aus, wie verwandt die Polarisationerscheinungen, die man für einen beliebigen, constanten Einfallswinkel im reflectirt gebeugten Lichte beobachtet, denjenigen sind, die für veränderliche Einfallswinkel im direct reflectirten Lichte bereits bekannt sind.

In diesem Zusammenhange wäre endlich noch einiger Versuche mit einer bestäubten Metallfläche zu gedenken. Die Resultate, die ich an der mit Lycopodiumsamen fein bestreuten Oberfläche eines Silberspiegels erhielt, unterschieden sich von denen an der bestäubten Glasfläche nur nach Maassgabe der verschiedenen Polarisationsfähigkeit der reflectirenden Flächen:

$i = 70^\circ$				$i = 73^\circ 11' 34''$			
$\delta = +3^\circ 24' 4''$	$\varphi = 43^\circ 51'$	$A = 0,238$		$\delta = +2^\circ 37' 49''$	$\varphi = 43^\circ 13'$	$A = 0,218$	
0 0 0	43 46	0,284		0 0 0	43 45	0,257	
-4 5 30	44 28	0,295		-2 57 50	45 39	0,261	

Dies die Beobachtungen. Die gemeinsamen Resultate, zu denen sie führen, lassen sich nun folgendermassen zusammenfassen:

1) Unter jedem Einfallswinkel findet im reflectirt gebeugten Lichte eine Zunahme der Phasendifferenz von 0 auf  $\frac{1}{2}\lambda$  statt, wenn man in der Richtung von den positiven zu den negativen Beugungsspectren in der Beugungsebene entlang wandert.

2) Zwischen direct reflectirtem und reflectirt gebeugtem Lichte ist dabei kein Unterschied; die Phasendifferenz des ersteren fügt sich einfach als Durchgangswerth in die stetig von 0 bis  $\frac{1}{2}\lambda$  aufsteigende Reihe der  $A$  ein.

3) Die Schnelligkeit der Aenderung der Phasenunterschiede, d. h. die Grösse des Bogens, den man durchlaufen

muss, um von Werthen der  $\Delta$  nahe gleich 0 zu den Werthen nahe gleich  $\frac{1}{2}\lambda$  zu gelangen, ist von der Natur der reflectirenden Fläche abhängig und annähernd ebenso gross, wie die Schnelligkeit, mit der für die betreffende Fläche die Phasenunterschiede im direct reflectirten Lichte bei variablem Einfallswinkel von 0 auf  $\frac{1}{2}\lambda$  wachsen, z. B. fast sprunghaft für Glas-, sehr langsam für Metallreflexion.

4) Aehnliches gilt von dem Intensitätsverhältniss der Componenten; auch dieses steht in engstem Zusammenhange mit den Eigenschaften der reflectirenden Fläche und zeigt unter jedem Einfallswinkel einen ähnlichen Verlauf, wie bei variablem Einfallswinkel im direct reflectirten Lichte.

Es entsteht nun die Frage, ob die soeben beschriebenen Thatsachen sich mit Hülfe der Theorie der Kugelwellen elliptisch polarisirten Lichtes in gleicher Weise erklären lassen, wie die Fröhlich'schen Daten aus den Gesetzen geradlinig polarisirter Kugelwellen erklärt worden sind. In Kürze will ich die Ableitung der Formeln, um die es sich hier handelt, andeuten.

Versteht man unter  $u, v, w$  die Componenten der Verdrückung eines Aethertheilchens zur Zeit  $t$ , so lauten die Differenzialgleichungen der Lichtbewegung in homogenen, isotropen Mitteln:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u; & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v; & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w. \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen lässt sich in der Form ansetzen:

$$(2) \quad u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}; \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}; \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

wo  $U, V, W$  Functionen sind, die den Gleichungen zu genügen haben:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \Delta W,$$

und speciell für Kugelwellen nach dem Typus  $1/r \cdot f(r - at)$  zu bilden sind. Hr. R  thy stellt nun in dem öfters citirten Aufsatz zwei Lösungen dieses Gleichungssystems auf, welche



beide Kugelwellen geradlinig polarisirten Lichtes darstellen. In ihrer allgemeinsten Form lauten diese Lösungen:

$$(4) \quad U = \frac{A}{r} \cos \vartheta; \quad V = \frac{B}{r} \cos \vartheta; \quad W = \frac{C}{r} \cos \vartheta;$$

und die zweite:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{\partial W'}{\partial y} - \frac{\partial V'}{\partial z}; \quad V = \frac{\partial U'}{\partial z} - \frac{\partial W'}{\partial x}; \quad W = \frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{\partial U'}{\partial y} \\ U' = \frac{A}{r} \sin \vartheta; \quad V' = \frac{B}{r} \sin \vartheta; \quad W' = \frac{C}{r} \sin \vartheta, \end{array} \right.$$

wobei  $\vartheta$  in beiden Fällen für  $2\pi(r/\lambda - t/T + \delta)$  gesetzt ist. Bei der ersten Form stehen die Schwingungen selbst, bei der zweiten die Normalen der Schwingungsebenen senkrecht auf einer bestimmten Richtung, die Hr. Réthy die „Polaraxe“ nennt. Von beiden Formen aus gelangt man zu Kugelwellen elliptisch polarisirten Lichtes, indem man die Argumente  $\vartheta$  in den verschiedenen Functionen der obigen Gleichungssysteme sich um gewisse constante Grössen voneinander unterscheiden lässt. Man erhält so als erste Form:

$$(6) \quad U = \frac{A}{r} \cos(\vartheta + \alpha); \quad V = \frac{B}{r} \cos(\vartheta + \beta); \quad W = \frac{C}{r} \cos(\vartheta + \gamma).$$

Jedes Aethertheilchen beschreibt hier eine Ellipse in der Tangentialebene der Kugelwelle. Um nun zu finden, wie sich die Schwingungen ändern innerhalb der Beugungsebene, d. h. innerhalb einer durch den Mittelpunkt der Kugelwellenfläche gelegten Ebene, denke ich mir für jeden Strahl, der in dieser Ebene liegt, die Schwingung in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine ( $u'$ ) in der Beugungsebene schwingt, die andere ( $v'$ ) senkrecht zur Beugungsebene. Diese Componenten lassen sich darstellen in der Form:

$$(7) \quad u' = R \cos \omega \sin(\vartheta + A'); \quad v' = R \sin \omega \sin(\vartheta + A''),$$

und daraus ergeben sich dann die üblichen Bestimmungsstücke der Bahnellipse, nämlich das Intensitätsverhältniss  $\tan^2 \omega$  und die Phasendifferenz  $A = A'' - A'$ . Berechnet man nun diese Stücke, indem man das Gleichungssystem (6) in die Gleichungen (2) einführt, so ergeben sich folgende Werthe für dieselben:

1) Für das Intensitätsverhältniss:

$$\operatorname{tg}^2 \omega = \mathfrak{L}^2 \cos^2 \delta + \mathfrak{M}^2 \sin^2 \delta - 2 \mathfrak{N} \sin \delta \cos \delta,$$

wo:

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}^2 = \frac{A^2}{B^2} \cos^2 i + \frac{C^2}{B^2} \sin^2 i - 2 \frac{A}{B} \cos i \frac{C}{B} \sin i \cos (\gamma - \alpha) \\ \mathfrak{M}^2 = \frac{A^2}{B^2} \sin^2 i + \frac{C^2}{B^2} \cos^2 i + 2 \frac{A}{B} \sin i \frac{C}{B} \cos i \cos (\gamma - \alpha) \\ \mathfrak{N} = \frac{A^2 - C^2}{2 B^2} \sin 2i + \frac{A C}{B^2} \cos (\gamma - \alpha) \cos 2i; \end{cases}$$

bedeutet  $\varphi$  das durch Ausgleich der Phasendifferenz erhaltene Polarisationsazimuth, so ist, je nachdem das Licht in der Polarisationsebene schwingt oder senkrecht zu ihr,

$$\begin{aligned} (I) \quad \operatorname{tg}^2 \varphi \text{ oder } \\ (II) \quad \operatorname{ctg}^2 \varphi \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (I) \quad \operatorname{tg}^2 \varphi \text{ oder } \\ (II) \quad \operatorname{ctg}^2 \varphi \end{aligned}} \right\} = \mathfrak{L}^2 \cos^2 \delta + \mathfrak{M}^2 \sin^2 \delta - 2 \mathfrak{N} \sin \delta \cos \delta.$$

2) Für die Phasendifferenz:

$$(III) \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{a - b \operatorname{tg} \delta}{c - d \operatorname{tg} \delta},$$

wo:

$$(9) \quad \begin{cases} a = A \sin (\alpha - \beta) \cos i + C \sin (\beta - \gamma) \sin i \\ b = -A \sin (\alpha - \beta) \sin i + C \sin (\beta - \gamma) \cos i \\ c = A \cos (\alpha - \beta) \cos i - C \cos (\beta - \gamma) \sin i \\ d = -A \cos (\alpha - \beta) \sin i - C \cos (\beta - \gamma) \cos i. \end{cases}$$

Zu entsprechenden Gleichungen führt die zweite Form der elliptisch polarisirten Kugelwellen:

$$(10) \quad \begin{cases} U = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}; & V = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}; & W = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \\ U' = \frac{A}{r} \sin (\vartheta + \alpha); & V' = \frac{B}{r} \sin (\vartheta + \beta); & W' = \frac{C}{r} \sin (\vartheta + \gamma). \end{cases}$$

Hier ist:

$$\operatorname{tg}^2 \omega = \mathfrak{L}^2 \cos^2 \delta + \mathfrak{M}^2 \sin^2 \delta - 2 \mathfrak{N} \sin \delta \cos \delta \quad \text{und:}$$

$$\operatorname{tg} \Delta = - \frac{a - b \operatorname{tg} \delta}{c - d \operatorname{tg} \delta}.$$

Also ist in diesem Falle das Gesetz der Aenderung des Intensitätsverhältnisses durch die Gleichung (I) ausgedrückt für die Annahme, dass das Licht senkrecht zur Polarisations-ebene schwinde, durch die Gleichung (II) für den entgegengesetzten Fall. Der Ausdruck für  $\operatorname{tg} \Delta$  ist bis auf das Vorzeichen mit dem für die erste Form gefundenen identisch; die Aenderungen der Phasendifferenzen erfolgen hier also in

entgegengesetztem Sinne, sonst aber nach dem gleichen Gesetze wie bei der ersten Art von Kugelwellen. Da der Unterschied zwischen plus und minus rein conventioneller Natur ist, so kann man das Ergebniss dieser theoretischen Betrachtungen dahin zusammenfassen, dass die Formeln (I) und (III), resp. (II) und (III), eine Lichtbewegung als die einer elliptisch polarisirten Kugelwelle charakterisiren, und es bliebe nun zu erörtern, ob durch eines dieser Gleichungspaare die oben ausführlich beschriebenen Erscheinungen thatsächlich dargestellt werden. Von einer Prüfung der Intensitätsformeln (I) oder (II) kann freilich bei dem wenig charakteristischen Verhalten der Azimuthe und der Unsicherheit ihrer Bestimmung nicht die Rede sein, wenn auch nach dem, was Hr. Réthy für geradlinig polarisirtes Licht bewiesen hat, ein Schluss zu Gunsten der Formel (I) sehr nahe läge, Aber hinsichtlich der Phasendifferenzen ist eine genauere Vergleichung zwischen Theorie und Erfahrung möglich.

Zunächst will ich die Gleichung (III) auf eine andere Form bringen, welche den Verlauf der Phasendifferenzen leichter überblicken lässt. Ich führe ein:

$$\begin{aligned} a &= S' \sin \epsilon'; & b &= S' \cos \epsilon'; & S' &= S. \\ c &= S'' \sin \epsilon''; & d &= S'' \cos \epsilon''; & S'' &= S. \end{aligned}$$

Dann ist: 
$$\operatorname{tg} A = S \frac{\sin(\delta - \epsilon')}{\sin(\delta - \epsilon'')}.$$

Für eine gewisse Strahlenrichtung  $\delta = \epsilon''$  ist die Phasendifferenz  $A$  gleich  $\pm \frac{1}{2}\pi$  oder  $\pm \frac{1}{2}\lambda$ , und nimmt man z. B.  $\epsilon'' > \epsilon'$ , so kann man sagen, die Phasendifferenzen steigen von 0 über  $\pm \frac{1}{2}\lambda$  auf  $\pm \frac{3}{2}\lambda$ , wenn  $\delta$  von  $\epsilon'$  über  $\epsilon''$  bis  $\epsilon' + \pi$  wächst. Dieses Verhalten zeigt nun aber gerade das reflectirt gebeugte Licht; auch hier gibt es eine Richtung, für die  $A = \frac{1}{2}\lambda$  ist — man könnte sie die Hauptbeugungsrichtung nennen —, und während die  $A$  von der einen Seite her bis zu diesem Werthe allmählich aufsteigen, gehen sie nach der anderen Richtung hin über ihn hinaus und wachsen bis  $\frac{3}{2}\lambda$ . Auch die Thatsache, dass die Aenderung der Phasenunterschiede bei verschiedenen Mitteln mit sehr verschiedener Schnelligkeit erfolgt, lässt sich mit der Theorie ohne Schwierigkeit vereinen. Denn die Constanten  $S$ ,  $\epsilon'$  und  $\epsilon''$

hängen von den Constanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  ab, diese aber offenbar wiederum von der Art der elementaren Lichtbewegung in der Gitterfläche, also einerseits von dem Einfallswinkel und dem Azimuth des einfallenden Strahles, andererseits von der Natur des reflectirenden Mittels. Sind die Verhältnisse z. B. dergestalt, dass  $S$  unter allen Einfallswinkeln sehr kleine Werthe hat, so wird sich die Phasendifferenz fast sprunghaft von 0 auf  $\frac{1}{2}\lambda$  ändern, indem diejenigen Strahlenrichtungen, die einen merklichen Phasenunterschied besitzen, an den Werth  $\delta = \epsilon''$  von beiden Seiten sehr nahe heranrücken werden; dieser Fall entspräche dem, was sich bei der Beugung durch Reflexion an Glasflächen ergeben hat. Für das photographirte Gitter würde man grössere Werthe von  $S$  und noch grössere für die Reflexion an reinen Metallgittern annehmen müssen. So weit im allgemeinen; aber die angestellten Untersuchungen ermöglichen auch eine ganz specielle Prüfung der Formel (III). Zwar muss man dabei von den Beobachtungen am Glas- und am Metallgitter absehen; aber die an dem photographirten Gitter gewonnenen Zahlenreihen sind gerade lang und umfassend genug, um den Versuch zu gestatten, ob für jede Reihe die Constanten  $S$ ,  $\epsilon'$  und  $\epsilon''$  so bestimmt werden können, dass die Formel zu jedem  $\delta$  das entsprechende  $\Delta$  angenähert ergibt.

Die Berechnung der Constanten wurde auf mehreren, sehr verschiedenen Wegen versucht, von denen schliesslich folgender die besten Resultate ergab. Es wurde zuerst die Hauptbeugungsrichtung, d. h. der Werth  $\delta = \epsilon''$ , durch Interpolation aus den Beobachtungen bestimmt, was stets mit ziemlicher Genauigkeit ausführbar war. Dann wurden zwei Werthepaare  $\Delta$ ,  $\delta$  ausgesucht, die, soweit man es aus einer graphischen Darstellung der Resultate ersehen konnte, in die zu erwartende Curve möglichst hineinpassten,  $S$  eliminiert und  $\epsilon'$  unter Benutzung des bereits gefundenen Werthes von  $\epsilon''$  berechnet. Mit Hülfe der so erhaltenen Werthe von  $\epsilon'$  und  $\epsilon''$  wurden dann die Werthe von  $S$  für sämtliche Daten der betreffenden Reihe ermittelt und der geeignetste von ihnen durch Vergleichung herausgesucht. Dasselbe Verfahren konnte auf mehrere Werthepaare  $\Delta$ ,  $\delta$  der-

selben  
Neben-  
meist  
wähl-  
unge-

der  
Diffe-

+2  
2  
1  
1  
1

Be-  
tig-  
er-  
W-  
m-  
vo-  
ni-  
m-  
st-  
b-  
F-  
v-  
so-  
e-  
e-  
V-  
i-

selben Reihe angewandt werden, und durch vergleichende Nebeneinanderstellung aller so erhaltenen Curven gelang es meistens, ein Urtheil darüber zu gewinnen, wie  $S$  und  $\varepsilon'$  gewählt werden müssten, um eine an die gegebenen Punkte ungefähr sich anschliessende Curve zu ergeben.

Die so gewonnenen Zahlen sind in der vorletzten Spalte der nun folgenden Tabellen enthalten; die letzte gibt die Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung an.

$$1) \quad i = 50^\circ.$$

$$S = +0,18540; \quad \varepsilon' = -95^\circ 36' 58''; \quad \varepsilon'' = +13^\circ 12' 27''.$$

$\delta$	$k$	$\lambda$	Beob. $\Delta$	Berech. $\Delta$	Differenz
+26° 43' 9"	53° 16' 51"	624	0,094	0,094	0,000
21 24 58	58 35 2	548	0,127	0,137	+0,010
14 56 57	65 3 3	632	0,219	0,222	+0,003
13 26 58	66 33 2	580	0,247	0,246	-0,001
11 50 22	68 9 38	522	0,267	0,271	+0,004
6 15 51	73 44 9	592	0,337	0,344	+0,007
5 5 2	74 54 58	488	0,355	0,355	0,000
0 0 0	80 0 0	590	0,433	0,392	-0,041
- 5 4 54	85 4 54	542	0,389	0,415	+0,026
11 3 33	91 3 33	621	0,433	0,433	0,000

Zu einer richtigen Würdigung des Vergleiches zwischen Beobachtung und Berechnung muss man sich vergegenwärtigen, welchen Grad von Uebereinstimmung man überhaupt erwarten darf. Der mögliche Fehler in den beobachteten Werthen der Phasendifferenzen kann, wie schon oben bemerkt wurde, zwischen 0,005 und 0,016 je nach der Grösse von  $\Delta$  angenommen werden. Ausserdem begeht man eine nicht gering anzuschlagende Vernachlässigung dadurch, dass man Beobachtungen, die sich auf Strahlen der verschiedensten Wellenlängen beziehen, auf eine gemeinsame Formel bringt, während doch die Constanten dieser Formel offenbar Functionen der Wellenlänge sind und für verschiedene Farben verschiedene Werthe haben müssen, ein Punkt, der auch schon oben erörtert worden ist. Dazu kommt endlich noch ein Drittes: Die entwickelte Formel ist aus der Betrachtung eines durchaus idealen Falles gewonnen, von dem der reale Vorgang, auf welchen die Formel hier angewandt worden ist, in mancher Beziehung erheblich abweicht. Während die

2)  $i = 54^\circ$ .

$$S = +0,14988; \quad \varepsilon' = -88^\circ 30' 0''; \quad \varepsilon'' = +6^\circ 58' 42''$$

$\delta$	$k$	$\lambda$	Beob. $\Delta$	Berech. $\Delta$	Differenz
+26° 5' 56"	45° 54' 4"	530	0,057	0,063	+0,006
20 42 49	51 17 11	469	0,063	0,085	+0,022
17 9 32	54 50 28	621	0,120	0,109	-0,011
15 45 54	56 14 6	584	0,123	0,121	-0,002
14 15 54	57 44 6	542	0,130	0,136	+0,006
12 45 54	59 14 6	496	0,135	0,154	+0,019
7 29 51	64 30 9	630	0,251	0,240	-0,011
6 49 51	65 10 9	580	0,267	0,253	-0,014
6 9 51	65 50 9	528	0,254	0,265	+0,011
5 29 51	66 30 9	475	0,263	0,277	+0,014
0 0 0	72 0 0	590	0,377	0,358	-0,019
- 4 52 9	76 52 9	477	0,371	0,397	+0,026
5 32 9	77 32 9	547	0,351	0,404	+0,053
6 12 9	78 12 9	617	0,362	0,408	+0,046
9 57 2	81 57 2	514	0,407	0,426	+0,019
10 37 2	82 37 2	552	0,400	0,428	+0,028
11 17 2	83 17 2	590	0,404	0,431	+0,027
15 8 13	87 8 13	547	0,442	0,442	0,000
16 46 56	88 46 56	601	0,456	0,446	-0,010
19 11 21	91 11 21	538	0,458	0,451	-0,007

3)  $i = 58^\circ$ .

$$S = +0,20029; \quad \varepsilon' = -63^\circ 56' 32''; \quad \varepsilon'' = -2^\circ 48' 40''.$$

$\delta$	$k$	$\lambda$	Beob. $\Delta$	Berech. $\Delta$	Differenz
+20° 12' 27"	43° 47' 33"	591	0,065	0,075	+0,010
16 39 31	47 20 29	525	0,071	0,085	+0,014
13 54 51	50 5 9	463	0,082	0,095	+0,013
8 38 9	55 21 51	632	0,133	0,122	-0,011
7 34 8	56 25 52	564	0,156	0,129	-0,027
6 12 14	57 47 46	472	0,158	0,140	-0,018
0 0 0	64 0 0	590	0,223	0,208	-0,015
- 5 36 8	69 36 8	504	0,284	0,294	+0,010
6 6 51	70 6 51	553	0,304	0,302	-0,002
6 47 59	70 47 59	621	0,305	0,312	+0,007
11 14 0	75 14 0	582	0,313	0,368	+0,055
12 42 34	76 42 34	621	0,351	0,333	+0,032
14 42 43	78 42 43	459	0,416	0,399	-0,017
16 49 43	80 49 43	571	0,431	0,413	-0,018
19 45 54	83 45 54	518	0,455	0,429	-0,026
22 20 50	86 20 50	599	0,450	0,440	-0,010

Theorie von der Annahme ausgeht, dass die elementare Lichtbewegung in einem homogenen Mittel stattfindet, geschieht sie in Wirklichkeit an der Grenze zweier verschiedenen Medien: und nicht ein Vibrationscentrum einer Kugelwelle

4)  $i = 62^\circ$ .

$S = +0,22049; \quad e' = -50^\circ 40' 23''; \quad e'' = -11^\circ 20' 3''.$

$\delta$	$k$	$\lambda$	Beob. $A$	Berech. $A$	Differenz
+10° 14' 15"	45° 45' 45"	627	0,080	0,077	-0,003
8 50 24	47 9 36	557	0,094	0,080	-0,014
7 31 48	48 28 12	487	0,081	0,084	+0,003
0 0 0	56 0 0	590	0,104	0,114	+0,010
- 5 59 53	61 59 53	487	0,164	0,166	+0,002
6 47 7	62 47 7	557	0,184	0,174	-0,010
7 33 20	63 33 20	627	0,226	0,184	-0,042
11 10 49	67 10 49	487	0,248	0,247	-0,001
12 33 55	68 33 55	557	0,266	0,275	+0,009
13 54 44	69 54 44	627	0,290	0,302	+0,012
15 50 25	71 50 25	487	0,338	0,339	+0,001
17 43 51	73 43 51	557	0,366	0,369	+0,003
19 33 47	75 33 47	627	0,393	0,393	0,000
22 28 41	78 28 41	557	0,417	0,421	+0,004
24 44 38	80 44 38	627	0,435	0,437	+0,002

hat man, sondern das wahrgenommene Licht wird von unendlich vielen Elementartheilchen ausgesandt, die in ihrer Gesamtheit den beleuchteten Theil der reflectirenden Fläche ausmachen. Diese Fläche ist aber nicht in allen Theilen von gleicher Beschaffenheit; sie setzt sich abwechselnd aus je zwei Streifen von verschiedenen, reflectirenden Eigenschaften zusammen, entsprechend den bei der Herstellung des Gitters vom Lichte getroffenen und den nicht getroffenen Stellen; ja sie ist vielleicht nicht einmal eine Ebene, sondern ist durch die Einwirkung des Lichtes und das nachherige Waschen bei der Fixirung zu einem Relief von abwechselnden Erhöhungen und Vertiefungen geworden. Kurz die Bedingungen des theoretischen Falles sind durchaus nicht erfüllt, und wenn man auch über den Einfluss dieser Umstände nicht einmal Vermuthungen anstellen kann, so dürfen doch diese unbekannten Factoren bei Beurtheilung der vorstehenden Zahlen nicht ausser Acht gelassen werden. Ueberblickt man nach diesen Erwägungen die Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung, die in der letzten Spalte der obigen Tabellen enthalten sind, so kann es nicht befremden, Abweichungen darunter zu finden, welche die Grenze der Beobachtungsfehler überschreiten. Diese wären auch durch



feinere Berechnungsmethoden nicht zu vermeiden gewesen; denn die einzelnen Beobachtungsreihen haben nun einmal an manchen Stellen nicht auszugleichende Unregelmässigkeiten. Aber man sieht auch, dass die Mehrzahl der Differenzen den möglichen Beobachtungsfehler nur um weniges überschreitet, und man wird nicht verkennen können, dass soviel die Uebereinstimmung vielleicht in einzelnen Punkten zu wünschen übrig lässt, doch der allgemeine Charakter des Verlaufs der Phasendifferenzen in dem der Berechnung zu Grunde liegenden Gesetz einen angenäherten Ausdruck findet. Zweierlei aber wäre gewonnen, wenn man, von Einzelheiten absehend, die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung im allgemeinen als vollwerthig anerkennen wollte:

1) Es wäre bewiesen, dass die Gesetze, welche die theoretische Optik als Gesetze elliptisch polarisirter Kugelwellen aufstellt, wenigstens soweit sie die Aenderung der Phasendifferenzen betreffen, einer Anwendung auf wirkliche Vorgänge fähig sind, d. h. dass es Lichterscheinungen gibt, welche als elliptisch polarisirte Kugelwellen aufgefasst werden können.

2) Es wäre bewiesen, dass Beugung durch Reflexion an solchen Flächen, welche dem reflectirten Lichte elliptische Polarisation mitzuthellen im Stande sind, ein Vorgang der unter 1) bezeichneten Art ist, auf den sich die Gesetze elliptisch polarisirter Kugelwellen anwenden lassen.

Dadurch wäre ein weiterer Anhalt für jene Theorie gewonnen, welche den Polarisationszustand des gebeugten Lichtes nach den Gesetzen polarisirter Kugelwellen erklären will. Das gestellte Problem ist damit gelöst, soweit es wenigstens den Umständen nach möglich war.

Zum Schluss will ich nicht versäumen, Hrn. Geheimrath Helmholtz, sowie den Herren Assistenten am physikalischen Institute, Dr. Hagen und Dr. Kayser, meinen Dank für freundlich gewährten Rath und Beistand bei Abfassung dieser Arbeit auszusprechen.

Berlin, October 1882.

XX

Es

dorff  
nannte  
später  
schicht  
E. Wi  
der so  
Erach  
sollte,  
von R  
Zeit m  
man c  
bedau  
legen  
natur  
scher  
Sept.  
der I  
gleich  
zu la  
auch  
die  
appa

sch  
über  
P

bei  
Hr.  
emp

**XX. Zur Poggendorff'schen Fallmaschine;  
von K. L. Bauer in Karlsruhe.**

Es sind jetzt nahe 30 Jahre verflossen, seit Poggendorff den Zweck und die Einrichtung der nach ihm benannten Fallmaschine zuerst veröffentlichte.<sup>1)</sup> Achtzehn Jahre später brachte er dieselbe in Erinnerung durch eine geschichtliche Notiz<sup>2)</sup>, welche vier Jahre nachher von Hrn. E. Wiedemann berichtet wurde.<sup>3)</sup> Unerklärlicherweise hat der so interessante und wichtige Apparat, welcher meines Erachtens in keinem besseren Lehrbuch der Physik fehlen sollte, bis jetzt, wie es scheint, nur in einem einzigen, dem von Reis<sup>4)</sup>, Eingang gefunden, und es gibt wohl auch zur Zeit nur verhältnismässig wenig physikalische Cabinette, wo man denselben mit Erfolg suchen würde. Angesichts dieser bedauerlichen Thatsache war es mir eine willkommene Gelegenheit, in der etwa 40 Mitglieder zählenden mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der 36. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner, welche vom 27. bis 30. Sept. 1882 in Karlsruhe tagte, ein warmes Wort zu Gunsten der Poggendorff'schen Fallmaschine zu sprechen und zugleich durch das Experiment den Apparat für sich selbst reden zu lassen. Vielleicht ist die Wiedergabe meiner Darstellung auch an dieser Stelle vorzüglich geeignet, demselben recht bald die wohlverdiente, allgemeine Aufnahme als Fundamentalapparat zu erwirken.

1) Einleitende Aufgabe. — Wie bei der Atwood'schen Fallmaschine hänge an jedem Ende eines über eine feste Rolle gelegten Fadens ein Gewicht  $P$  von der Masse  $M$ ; welche Spannungszunahme

1) Poggendorff, Pogg. Ann. 92. p. 179—182. 1854.

2) Poggendorff, Pogg. Ann. 145. p. 336. 1872.

3) E. Wiedemann, Pogg. Ann. 159. p. 657. 1876.

4) Reis, Lehrb. d. Phys., 4. Aufl. 1878, 5. Aufl. 1882, Leipzig bei Quandt u. Handel; auch in der Vorrede zur 4. Aufl. erwirbt sich Hr. Reis das Verdienst, den Apparat der besonderen Beachtung zu empfehlen.

wird der Faden erleiden, wenn man einem der Gewichte  $P$  ein Uebergewicht  $p$  von der Masse  $m$  beifügt?

Bezeichnet  $a$  die durch das Uebergewicht bewirkte Acceleration, und lässt man die Bewegungshindernisse, sowie die Drehung der Rolle ausser Acht, so ist das Uebergewicht:

$$p = (2M + m)a,$$

d. h. gleich der in einer Secunde erzeugten Bewegungsmenge. Die aufwärtsgezogene Masse  $M$  verursacht zufolge des dritten Newton'schen Bewegungsgesetzes, des Principis von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, durch Reaction einen Zug abwärts, welcher dem jene Masse beschleunigenden Zuge  $Ma$  gleich ist. Man erhält daher sofort das Resultat:

Das Uebergewicht bewirkt an jedem Schnurende den Zug  $Ma$ . Nun ist aber mit Rücksicht auf die oben angegebene Gleichung:

$$\begin{aligned} Ma &= M \cdot \frac{p}{2M + m} = \frac{P}{2 + \frac{p}{P}} < \frac{P}{2} \\ &= \frac{P}{1 + 2 \cdot \frac{p}{P}} < P. \end{aligned}$$

Wir können daher dem obigen Satz genauer die folgende Fassung geben:

Die durch das Uebergewicht  $p$  an jedem Fadenende bewirkte Zugvermehrung ist stets kleiner als die Hälfte des Uebergewichtes und als eines der zwei gleichen Gewichte  $P$ ; sie nähert sich um so mehr der Hälfte des Uebergewichtes, je kleiner dieses im Verhältniss zu einem der gleichen Gewichte wird; und sie kommt einem der zwei gleichen Gewichte um so näher, je grösser im Verhältniss zu einem derselben das Uebergewicht wird.

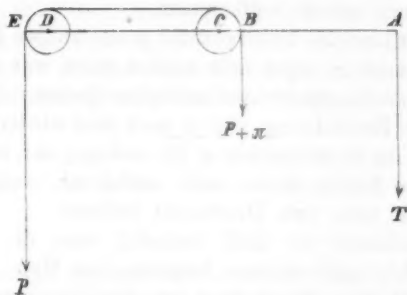
Wenn:  $\frac{p}{P} = 0$ , so wird  $Ma = \frac{P}{2}$ .

Wenn:  $\frac{P}{p} = 0$ , so wird  $Ma = P$ .

Damit die Bewegungshindernisse und die Drehung der Rolle ohne wesentlichen Einfluss bleiben, wird man die gleichen

Gewichte mässig schwer und von geringem Querschnitt wählen, sich auf verhältnismässig kleine Uebergewichte beschränken, sowie die Rolle leicht und leicht drehbar machen. Anderenfalls würde  $a$ , und folglich auch  $Ma$  merklich kleiner ausfallen als nach der obigen Formel.

2) Die Poggendorff'sche Fallmaschine. — In der Figur bedeute  $C$  den Drehpunkt des Hebels (Wagebalkens)  $AE$ , und es sei  $AC = CD$ , sowie Rollenradius  $BC = DE$ . Eine Schnur werde über beide Rollen gelegt und an jedes Schnurende ein Gewicht  $P$  gehängt. Zu dem rechts von der Dreh-



axe, unter  $B$ , befindlichen Gewicht füge man ein kleines Gewicht  $\pi$  zur Ausgleichung der Widerstände, wie solches auch die Versuche an der Atwood'schen Fallmaschine erheischen; das Gewicht  $\pi$  ist richtig gewählt, wenn ein gegen das Gewicht  $P + \pi$  vertical abwärts geführter schwacher Stoss eine gleichförmige Bewegung hervorruft. In  $A$  hänge ein als Tara und Wagschale dienendes Gewicht  $T$  von geringem Querschnitt, wodurch der Balken horizontal gerichtet werde; die feine Einstellung lässt sich bequem mittelst eines am Arm  $AC$  anzubringenden Laufgewichtes bewerkstelligen.

Legt man jetzt auf das hoch gestellte Gewicht  $P + \pi$  ein Uebergewicht  $p$ , so beginnt der Fall; aber obschon das Uebergewicht rechts vom Drehpunkt angebracht wurde, senkt sich der linke Arm des Wagebalkens, welche für den Uneingeweihten höchst überraschende Erscheinung sich auf Grund der eingangs gelösten Aufgabe sofort erklärt. Da

nämlich das Uebergewicht an beiden Schnurenden die gleiche Zugvermehrung  $Ma$  bewirkt, und da die Differenz der Drehungsmomente:

$$Ma \cdot EC - Ma \cdot CB = Ma \cdot DC,$$

so muss das Gleichgewicht in der Weise gestört werden, als ob man im Punkte  $D$  ein Gewicht  $Ma$  angehängt hätte. Weil nun  $AC = CD$ , so muss es zur Horizontalhaltung des Wagebalkens genügen, auf die in  $A$  hängende Schale ein Gewicht  $Ma$  zu legen, welches nach dem Resultate der anfangs gelösten Aufgabe, bei verhältnissmässig kleinem Uebergewicht, sehr nahe die Hälfte des letzteren beträgt. Auch dieser Versuch gelingt vollkommen.

Versetzt man das Uebergewicht  $p$  ans andere Fadenende, wo alsdann auch  $\pi$  angebracht werden muss, was eine kleine Verstellung des Laufgewichtes bedingt, so ändert sich durchaus nichts an der Erscheinung, weil ja auch jetzt wieder an jedem Schnurende die Zugvermehrung  $Ma$  erfolgt; nur ist jetzt die Senkung des linken Arms nicht auffallend, weil sich das Uebergewicht links vom Drehpunkt befindet.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die Maschine nebst Zubehör nach meinen Angaben von Hrn. Hofmechaniker und Optiker Karl Sickler dahier vortrefflich und höchst preiswürdig hergestellt wird.

---

**XXI. Nachtrag zu der Abhandlung:  
„Ueber electrische Schwingungen mit besonderer  
Berücksichtigung ihrer Phasen“<sup>1)</sup>:  
von A. Oberbeck.**

---

Bei der in dem ersten Abschnitt der genannten Abhandlung entwickelten Theorie der electrodynamischen Wechselwirkung electrischer Schwingungen wird vorausgesetzt, dass diese Schwingungen constante Amplituden haben.

<sup>1)</sup> Oberbeck, Wied. Ann. 17. p. 816—841. 1882.

Nachdem für das hiesige, physikalische Institut ein Sinusinductor<sup>1)</sup> angeschafft worden ist, welcher derartige Schwingungen liefert, habe ich zunächst die Formel (13) p. 825 benutzt, um das electrodynamische Potential einer Drahtrolle auf sich selbst nach absolutem Maass zu bestimmen. Die für diesen Fall getroffene Versuchsanordnung (vgl. p. 831) blieb ungeändert. Es wurde nur als Stromquelle statt des mit einem Condensator verbundenen Inductoriums der Sinusinductor angewandt.

Während der Beobachtungen wurden die Umdrehungen des Magnets gezählt und daraus die Schwingungszahl des electrischen Stromes festgestellt. Dieselbe hängt bekanntlich von der Grösse des das Räderwerk treibenden Gewichtes ab. Es wurden für jede besondere Anordnung der Wheatstone'schen Brücke die Gewichte: 15 kg, 21 kg und 27 kg benutzt.

Bezeichnet man mit  $n$  die Anzahl der Stromwechsel in der Secunde, so ist in der oben angeführten Gleichung:

$$\beta = \frac{\pi}{T} = n\pi,$$

zu setzen. Das Inductionspotential der Rolle ist also aus der Formel:

$$n^2 \pi^2 p_1^2 = \left( w_2 \frac{w_4}{w_3} - w_1 \right) (w_1 + w_2 + w')$$

zu berechnen. Setzt man wie früher:

$$g = w_2 \frac{w_4}{w_3} - w_1, \quad h = w_1 + w_2 + w',$$

so ist:

$$\pi p_1 = \frac{\sqrt{g \cdot h}}{n}.$$

Als Inductionsrolle diente die auch früher benutzte Galvanometerrolle von 8000 Windungen, deren Widerstand ( $w_1$ ) von neuem mit Hülfe eines constanten Stromes zu 2434 S.-E. bestimmt worden war.

Die bei den Versuchen erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 290—303. 1874.  
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVII.

$w_4/w_3$	$w_2$	$g$	$h$	$g \cdot h$	$n$	$\pi p_1$
0,7819	3330	170	5896	1 002 820	85,1	11,76
"	3430	248	5996	1 487 008	106,4	11,47
"	3600	381	6166	2 349 246	136,0	11,26
1,4288	1868	235	4431	1 041 235	90,1	11,33
"	1962	369	4525	1 669 725	111,4	11,60
"	2040	539	4603	2 481 017	133,7	11,75
1,8274	1460	234	4025	941 850	84,7	11,46
"	1550	398	4115	1 637 770	114,2	11,20
"	1605	499	4170	2 080 830	129,0	11,18

Der Mittelwerth von  $\pi p_1 = 11,44$ . Daher ist:

$$p_1 = 3,6415, \text{ S.-E. Sec.,}$$

oder wenn man in runder Summe 1. S.-E. =  $0,95 \cdot 10^{10}$  setzt, so ist:

$$p_1 = 3,46 \cdot 10^{10} \frac{\text{mm}}{\text{sec}}.$$

Halle a./S., November 1882.

## XXII. Erklärung; von E. Ketteler.

Im diesjährigen Octoberheft der Annalen befindet sich eine Kritik der Arbeiten Lommel's von Hrn. Voigt, mit der auch ich in allem Wesentlichen einverstanden bin. Dieselbe ist einer Arbeit von mir zuvorgekommen, welche ich unter dem Titel: „Optische Controversen“ demnächst veröffentlichen werde. In derselben werde ich insbesondere das System der Uebergangsbedingungen, sowie es bisher in möglichst correctem Anschluss an die Annahme Fresnel's, dass in anisotropen Medien die Schwingungen senkrecht stehen zur Normalen, formulirt worden, zu Gunsten der strengen Forderungen der Elasticitätslehre abändern, dann aber gleichzeitig den Nachweis liefern, dass die erwähnten Schwingungen senkrecht stehen zum Strahle. Für isotrope Mittel bleibt diese Aenderung durchweg ohne Einfluss.



**XXIII. Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften bei den Arabern, VIII. u. IX.;  
von Eilhard Wiedemann.**

In der Kosmographie von Kazwini findet sich folgende nicht uninteressante Vorstellung über den Bau der Quecksilbertropfen. Es heisst dort:

Das Quecksilber besteht aus wässerigen Theilen, die mit feinen, schwefeligen Theilen innig gemischt sind, sodass man nicht die einen von den anderen zu unterscheiden vermag. Um dasselbe befindet sich eine Haut von Staubtheilchen; wird ein Tropfen mit einem anderen in Berührung gebracht, so öffnet sich die Haut und die beiden Tropfen werden ein einziger. Die Haut, umhüllt ihn in derselben Weise, wie wenn ein Wassertropfen auf Staub fällt. Er bleibt dann eine Kugel, und diese ist von erdigen Theilen umhüllt. Oft trifft ein solcher Tropfen einen anderen. Dann vereinigen sich ihre Hüllen, beide Tropfen werden ein einziger, und beide umgibt eine Schale aus Staubtheilchen.

Unser deutsches Wort Zinnober entspricht im arabischen nicht allein dem rothen Schwefelquecksilber, sondern auch dem Quecksilberoxyd. So sagt unter anderem Kazwini: „Es sagt Aristoteles<sup>1)</sup>, dass, wenn man Quecksilber in Glasgefässen über dem Feuer erhitzt und das Gefäss fest verschliesst, so verflüchtigt sich das Quecksilber, und man erhält Zinnober, dabei verwandelt sich die weisse Farbe in eine rothe“. Zugleich wird auf die Giftigkeit des Quecksilberdampfes aufmerksam gemacht. Ein anderer sagt nach Kazwini, dass es zweierlei Arten von Zinnober gebe, ein in Bergwerken gefundenes und ein künstlich dargestelltes, das erstere soll dadurch entstehen, dass Schwefel in die Quecksilberminen eindringt.

Diese letztere Stelle erhält eine ganz interessante Ergänzung durch folgende Stelle des Ibn al Beitär: „Ibn G'alg'al

1) Es ist hier ein Pseudoaristoteles gemeint.

sagt, der Zinnober ist zweierlei Art, der natürliche und künstliche. Man macht letzteren aus Quecksilber und Schwefel, die man zusammen reibt und in einen Kessel bringt, dessen Oeffnung man verschliesst, damit kein Quecksilber entweicht. Zum Kitten dient der Thon der Alchemisten. Den Kessel setzt man auf Feuer und erhitzt Tag und Nacht“.

## Berichtigungen.

- Bd. XVI. (Voigt) p. 280 Z. 2 v. u. lies  $Y_y$  statt  $Y_x$ .  
 p. 281 Z. 8 v. o. lies  $Y'' + Y'_x$  statt  $X'' + X'_x$ .  
 Z. 17 v. o. lies  $M' - \int Z'_x x dq = 0$   
 $N' - \int (Y'_x x - X'_x y) dq = 0$ .  
 Z. 11 v. u. streiche  $x$ .  
 p. 287 Z. 2 v. u. lies  $a_1$  statt  $a_2$ .  
 p. 318 Z. 8 v. u. „  $\frac{l-z}{2}$  „  $\frac{e-z}{2}$ .  
 p. 321 Z. 8 v. u. „ 320 „ 304.  
 p. 405 Z. 3 v. o. „ 320 „ 328.  
 p. 408 Z. 14 v. o. „  $\mp \beta_3$  „  $\pm \beta_3$ .  
 p. 409 Z. 12 v. o. „  $-2$  „  $2-$ .  
 p. 410 Z. 8 v. u. „  $(\alpha_3^4 + \beta_3^4)$ .  
 Bd. XVI. (Goossens) p. 552 Z. 1 v. u. lies „Magnesium-Quecksilber-Platin“ statt „Magnesium-Quecksilber-Eisen“.  
 Bd. XVII. (Wroblewski) p. 116 Z. 8 v. o. lies 31,524 statt 31,542.  
 p. 119 Z. 1 v. o. „ undurchsichtigen statt undurchtigen.  
 p. 121 Z. 1 v. u. „ 94 statt 114.  
 p. 127 Z. 1 v. u. „ 94 „ 44.

## Namenregister zum Jahrgang 1882.

### A.

- Albert, E., Aenderung des Farbentones von Spectralfarben und Pigmenten bei abnehmender Lichtstärke 16, 129.  
 Ångström, K., Ausdehnung des Wassers durch Absorption von Gasen 15, 297.  
 Antolik, K., Electricische Figuren und Gleiten electricischer Funken 15, 475.  
 Auerbach, F., Das Waltenhofen'sche Phänomen und die Entmagnetisirung von Eisenkörpern 16, 554. — Tonschwingungen fester Körper in Flüssigkeiten 17, 964.

### B.

- v. Babo, L., s. Warburg.  
 Bauer, K. L., Lichtenberg'sche Figuren 16, 368. — Poggendorff's Fallmaschine 17, 1037.  
 Boas, F., Talbot'scher Satz 16, 359.  
 Bohn, C., Differentialflaschenzug 15, 112.  
 Boltzmann, L., Stoss von Cylindern 17, 343.  
 Braun, F., Electricitätsentwicklung als Aequivalent chemischer Prozesse 16, 561. — Galvanische Elemente aus Grundstoffen und electromotorischer Nutzeffect chemischer Prozesse 17, 593.  
 Brongersma, H., Doppelbrechung bei Glas und Schwefelkohlenstoff durch electriche Influenz 16, 222.  
 Budde, E., Mechanische Grundlagen der Gesetze von Ohm und Joule 15, 558.

### C.

- Cheesman, M. L., Einfluss der mechanischen Härte auf die magnetischen Eigenschaften des Stahles und des Eisens 15, 204.  
 Clausius, R., Maasssysteme zur Messung electricischer und magnetischer Grössen 16, 529. — Zusammenhang zwischen den Einheiten des Magnetismus und der Electricität 17, 713.  
 Colley, R., Electricische Polarisation in Electrolyten 15, 94. — Arbeit äusserer Kräfte in einem geschlossenen Stromkreise 16, 39. — Maxwell'sche electromotorische Kraft  $Y_{me}$  17, 55.

### D.

- Dieterici, C., Messung kleiner electriccher Widerstände 16, 234.  
 Dorn, E., Multiplications- und Zurückwerfungsmethode 17, 654. — Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass 17, 773.

### E.

- Eaton, H. W., Maximum der Magnetisirung der diamagnetischen und schwach paramagnetischen Körper 15, 225.  
 Edlund, E., Electriccher Widerstand der Gase 15, 165. — Electriccher Widerstand des Vacuums 15, 514.  
 Elster, J., u. H. Geitel, Electricität der Flamme 16, 193, 711.

v. Ettingshausen, A., Diamagnetisirungszahl des metallischen Wis-  
muths 17, 272.

Exner, F., Galvanische Elemente  
aus Grundstoffen und Leitungs-  
vermögen von Brom und Jod 15,  
412. — Newton'sche Staubringe  
17, 149. — Funkeln der Sterne  
17, 305.

## F.

Fröhlich, J., Intensität des ge-  
beugten Lichtes II. 15, 576.

## G.

Geitel, s. Elster.

Giese, W., Electrisches Leitungs-  
vermögen der Flammengase 17, 1,  
236, 519.

Goldstein, E., Reflexion electri-  
scher Strahlen 15, 246. — Einfluss  
der Kathodenform auf das Phos-  
phoreszenzlicht Geissler'scher Röh-  
ren 15, 254. — Gasdichte und  
Schichtintervall in Geissler'schen  
Röhren 15, 277. — Bandenspec-  
trum der Luft 15, 280.

Goossens, B. J., Metallische gal-  
vanische Ketten von Perry und  
Ayrton 16, 551.

Grossmann, L., Bestimmung der  
inneren Reibungsconstanten von  
Gasen und Flüssigkeiten mittelst  
schwingender Scheiben 16, 619.

## H.

Haga, H., Temperaturänderungen  
beim Ausdehnen und Zusammen-  
ziehen von Metalldrähten 15, 1.

— Amalgamationsströme 17, 897.

Hagen, E. B., Spannungen des ge-  
sättigten Quecksilberdampfes bei  
niederen Temperaturen 16, 610.

Hallock, W., Galvanische Pola-  
risation und Smee'sches Element  
16, 56.

Hankel, W. G., Actino- und piezo-  
electriche Eigenschaften des Berg-  
krystalles 17, 163.

Hasselberg, B., Die Spectra des  
Wasserstoffs und des Acetylens  
15, 45.

Heine, H., Absorption der Wärme  
durch Gase und Kohlensäuregehalt  
der atmosphärischen Luft 16, 441.

Helmholtz, H., Absolute Maass-  
systeme für electrische und mag-  
netische Grössen 17, 42.

Hergesell, W., Fourier-Poisson's-  
che Wärmeleitungstheorie 15, 19.

Hertz, H., Verdunstung der Flüssig-  
keiten, insbesondere des Queck-  
silbers, im luftleeren Raume 17,  
177. — Druck des gesättigten  
Quecksilberdampfes 17, 193.

Himstedt, F., Zug und Torsion  
bei Metalldrähten 17, 701.

Holtz, W., Singende Condensato-  
ren 16, 366. — Gefärbte Funken  
16, 367.

Hüfner, G., Diffusion von Gasen  
durch Hydrophan von Czerno-  
witz 16, 253.

## K.

Kayser, H., Verdichtung der Gase  
an Oberflächen 15, 624.

Kerber, A., Refractionstheorie auf  
geometrischer Grundlage 15, 140,  
308.

Kessler, F., Minimum der Rota-  
tion des Lichtstrahles bei combi-  
nirter Brechung und Spiegelung  
an einer Kugel 15, 330. — Mini-  
mum der Ablenkung eines Licht-  
strahls durch ein Prisma 15, 333.  
— Minimum der Zeit bei der  
Brechung des Lichts 15, 334. —  
Ersatz eines centrirten Systems  
brechender Kugelflächen durch  
eine einzige 16, 362.

Ketteler, E., Bemerkungen zu den  
Arbeiten der Herren Lommel,  
Glazebrook und Mathieu 15, 613.  
— Circular und elliptisch polari-  
sirende Mittel 16, 86. — Erklä-  
rung 17, 1042.

Ketteler, E., u. C. Pulfrich, Pho-  
tometrische Untersuchungen 15,  
337.

Kittler, E., Spannungsdifferenzen  
zwischen einem Metall und Flüs-  
sigkeiten verschiedener Concen-  
tration 15, 391. — Electromotori-  
sche Kraft des Daniell'schen Ele-  
ments 17, 365.

König, A., Galvanische Polaris-  
ation und Oberflächenspannung des  
Quecksilbers 16, 1. — Galvanische  
Elemente mit Wasserstoffsuper-  
oxyd 17, 347. — Leukoskop 17, 990.

König, W., Elliptische Polarisation des reflectirt gebogenen Lichtes 17, 1916.

Kohlrausch, F., Instrumente zur Messung der erdmagnetischen Intensitätsvariationen 15, 533. — Tangentenbussole für absolute Messungen, Spiegelgalvanometer, Electrodynamometer und metallfreies Magnetometer 15, 550. — Prismenbeobachtungen mit streifend einfallendem Licht und Abänderung der Wollaston'schen Bestimmungsmethode für Lichtbrechungsverhältnisse 16, 603. — Einstellung eines Objectes am Totalreflectometer 16, 609. — Absolute Messungen mittelst bifilarer Aufhängung, zwei Methoden zur Bestimmung der erdmagnetischen Horizontalintensität ohne Zeitmessung 17, 737. — Berichtigung 17, 352.

Kohlrausch, W., Electrisches Leitungsvermögen der Schwefelsäure und Pyroschwefelsäure; Dichtigkeit der concentrirten Schwefelsäure 17, 69. — Electrisches Leitungsvermögen von Chlorsilber, Bromsilber und Jodsilber 17, 642.

Kolářek, E., Beziehung des Gefrierpunktes von Salzlösungen zu deren Spannkraftsgesetze 15, 38.

# L.

Lecher, E., Ausstrahlung und Absorption 17, 477.

Less, E., Telephon zur Bestimmung des Widerstandes galvanischer Ketten und Säulen 15, 80.

Lindstedt, A., Fresnel'sche Integrale 17, 720.

Lommel, E., Elliptische Doppelbrechung 15, 378. — Theorie des Lichts 16, 427.

# M.

Mach, E., Erklärung 15, 336. — Aequipotentialcurven 17, 858.

Meyer, L., Transpiration von Dämpfen (IV. Abhandl.) 16, 394.

Michaëlis, G. J., Elastische Nachwirkung 17, 726.

# N.

Narr, F., Electricität in Gasen 16, 558.

# O.

Oberbeck, A., Bewegungen der Luft an der Erdoberfläche 17, 128. — Electricische Schwingungen 17, 816, 1040.

Oppenheim, S., Stationäre Bewegungen 15, 495.

# P.

Pfaundler, L., Explosion einer mit flüssiger Kohlensäure gefüllten Glasröhre 17, 175. — Explosion eines Sauerstoffgasometers aus Zinkblech 17, 176.

Planck, M., Verdampfen, Schmelzen und Sublimiren 15, 446.

Pulfrich, C., Brechungsquotienten einer concentrirten Cyaninlösung 16, 335. s. Ketteler.

# R.

Rammelsberg, C., Phosphate des Thalliums und Lithiums 16, 694. — Kaliumdithalliumchlorid 16, 709.

Riess, P., Electricische Schatten 15, 335. — Electricische Schatten in freier Luft 17, 901.

Ritter, A., Höhe der Atmosphäre und Constitution gasförmiger Weltkörper 16, 166. 17, 322.

# S.

Schenck, E., Elliptische Polarisation des Lichts bei Reflexion an Krystalloberflächen 15, 177.

Schelske, R., Farbenmischungen 16, 349.

Schmidt, Th. S., Reibung von Flüssigkeiten 16, 633.

Schröder, H., Molecularrefraction flüssiger Verbindungen und chemische Zusammensetzung 15, 636. 16, 660.

Schuller, A., Bildung von Wasserstoffhyperoxyd während der Verbrennung 15, 289. — Bildungswärme des Wassers 15, 292.

Schulze-Berge, F., Volta'scher Fundamentalversuch 15, 440.

Silow, P., Schwach magnetische und diamagnetische Körper 16, 247.

- Slotté, K. F., Wheatstone'sche Brücke 15, 176.
- Sohncke, L., Grundgesetze der Krystallographie aus der Theorie der Krystalstructure 16, 489.
- Stefan, J., Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken 17, 550. — Magnetische Schirmwirkung des Eisens 17, 928. — Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes 17, 956.
- Stephan, C., Beziehungen zwischen Fluidität und galvanischem Leitungsvermögen 17, 673.
- Steudel, V., Transpiration von Dämpfen (III. Abh.) 16, 369.
- Strecker, K., Specifische Wärmen der gasförmigen zweiatomigen Verbindungen von Chlor, Brom und Jod unter sich und mit Wasserstoff 17, 85.
- Streintz, F., Galvanische Polarisation 17, 841.
- Struve, H., Fresnel's Interferenzerscheinungen 15, 49. — Diffraction an Fernröhren 17, 1008.
- V.**
- Voigt, W., Verhältniss der Quervertraction zur Längsdilatation bei Stäben von isotropem Glas 15, 497. — Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Krystallen durch Biegung und Drillung von Prismen 16, 273, 398. — Volumen- und Winkeländerung krystallinischer Körper bei all- oder einseitigem Druck 16, 416. — Electrochemische Experimente des Hrn. Guébbard 17, 257. — Lommel's Theorie der Doppelbrechung, der Drehung der Polarisationsebene und der elliptischen Doppelbrechung 17, 468.
- Volkmann, P., Molecularanziehung von Flüssigkeiten aufeinander 16, 321. — Absolutes Maasssystem 16, 481. — Cohäsion von Salzlösungen 17, 353.
- W.**
- Wächter, Fr., Materielle Theile im electrischen Funken 17, 903.
- Waltz, K., Diffusion der Gase 17, 201, 351.
- v. Waltenhofen, A., Magnetische Nachwirkung 15, 171.
- Walter, A., Molecular-kinetische Gesetze der Verdampfungswärme und der specifischen Wärme der Körper in verschiedenen Aggregatformen 16, 500.
- Warburg, E., u. L. v. Babo, Zusammenhang zwischen Viscosität und Dichtigkeit bei gasförmig flüssigen Körpern 17, 390.
- Weber, R., Longitudinale und transversale Wellen durch Projection 15, 491.
- Weinstein, B., Bewegungsgleichungen von Lagrange 15, 675.
- Wesendonck, K., Spectra der Kohlenverbindungen 17, 427.
- Wiedemann, E., Absorptionscoefficient 17, 349. — Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften bei den Arabern VII. 17, 350. VIII. IX. 17, 1043. — Volumenänderungen wasserhaltiger Salze beim Erwärmen und die dabei erfolgenden chemischen Umlagerungen 17, 561. — Molecularrefraction der geschwefelten Kohlenäureäther 17, 577. — Veränderung am Pyknometer 17, 983. — Dichtigkeit des Lichtäthers 17, 986. — Wahre Cohäsion der Flüssigkeiten 17, 987. — Verdichtungen von Flüssigkeiten an festen Körpern 17, 988.
- Wiedemann, G., Apparat zur Darstellung der Erscheinungen des Geysirs 15, 173.
- Wietlisbach, V., Mikrotelephon 16, 594.
- Witkowski, A., Einfluss der Deformation auf die electriche Leitungsfähigkeit 16, 161.
- v. Wroblewski, S., Absorption der Gase durch die Flüssigkeiten unter hohen Drucken 17, 103.
- Wüllner, A., Dispersion farblos durchsichtiger Medien 17, 580. — Bemerkungen zu den Mittheilungen von Hasselberg und Goldstein 17, 587.

17,

sche

ische

ärme

der

ggre-

Zu-

psität

ermig

und

Pro-

sglei-

675.

der

7.

coöff-

e zur

schaf-

, 350.

unmen-

Salze

dabei

anlage-

larre-

Koh-

erän-

, 983.

äthers

on der

rdich-

festen

r Dar-

n des

ephon

er De-

e Lei-

orption

keiten



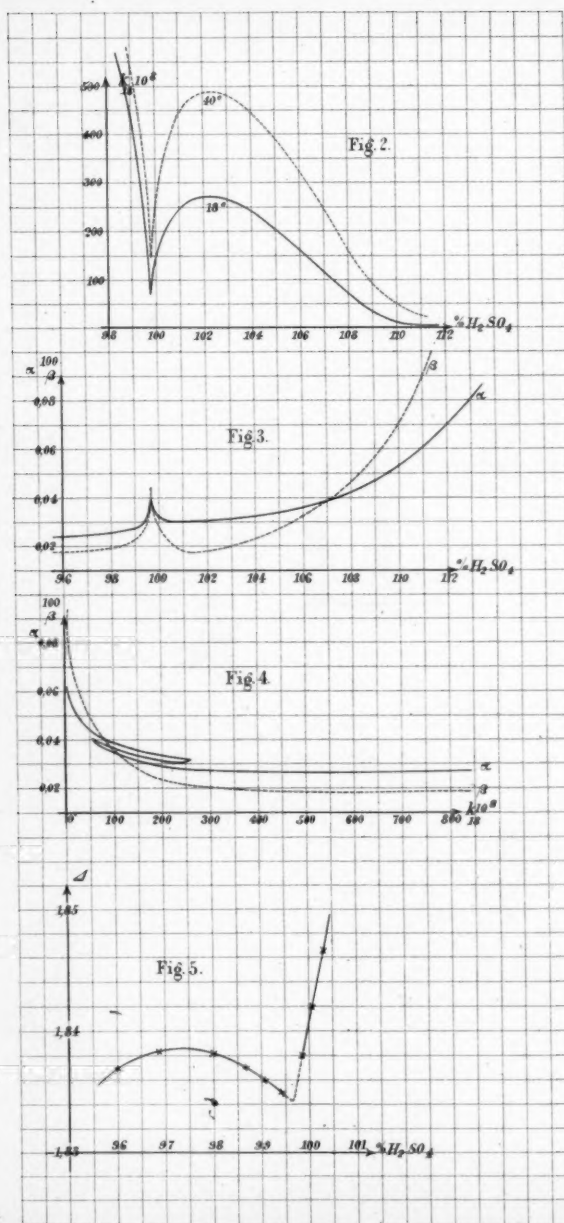


Fig. 1.

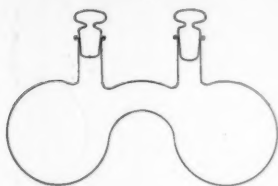


Fig. 6.

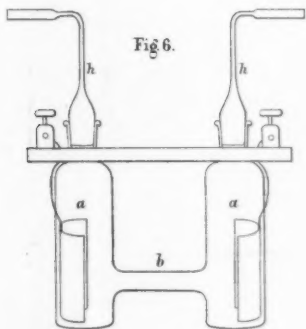


Fig. 9.

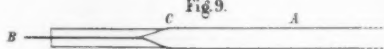


Fig. 7.

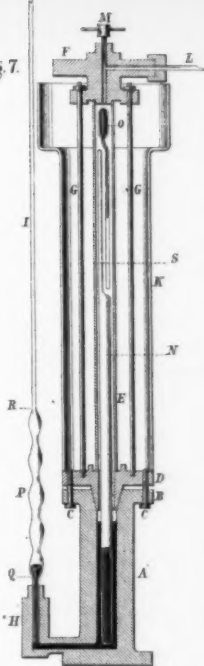


Fig. 8.



Fig. 10.

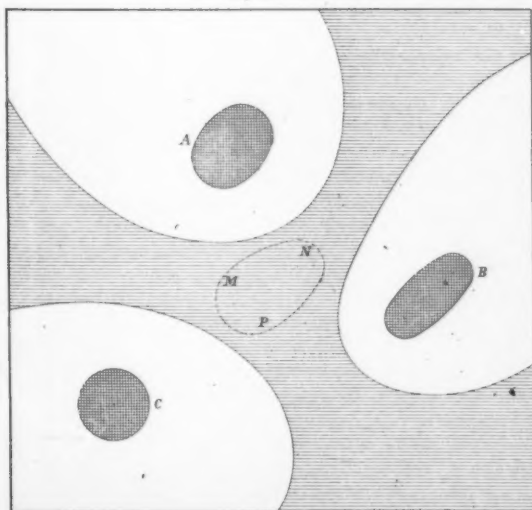


Fig. 2.

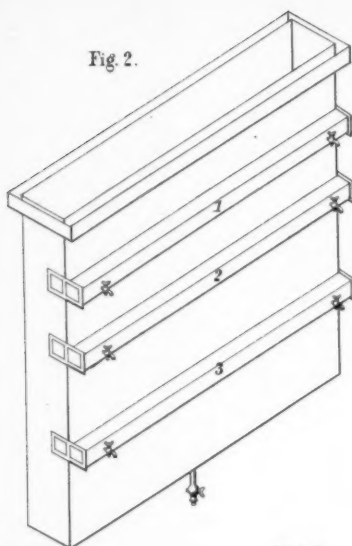
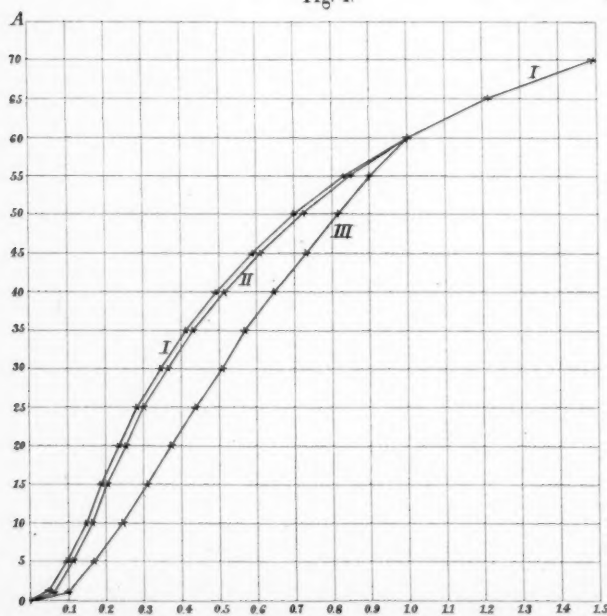


Fig. 1.



Fig. 4.



A- Anzahl der verschobenen Interferenzstreifen.

T- Zeit, die zur Verschiebung von 60 Streifen erforderlich ist.

Curven I, II, III bezeichnen sich auf die Querschnitte 10, 0, 20, 1, 3, 3, 2.

Fig. 1.

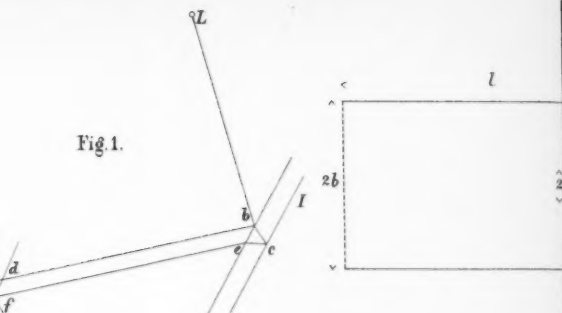
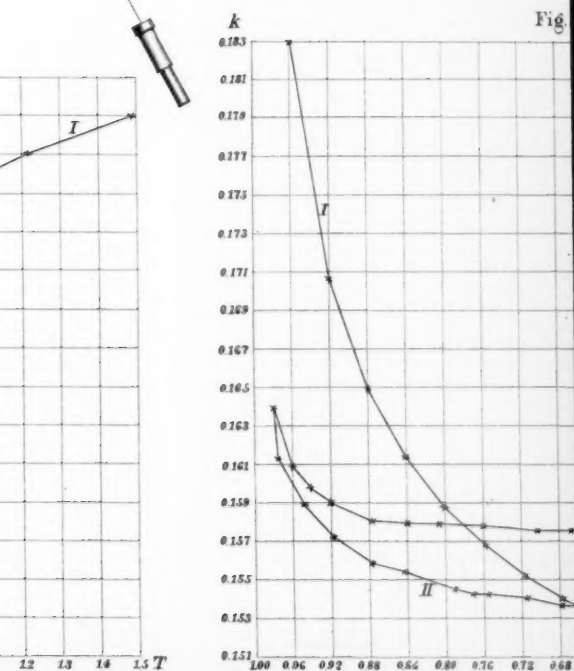


Fig. 3.



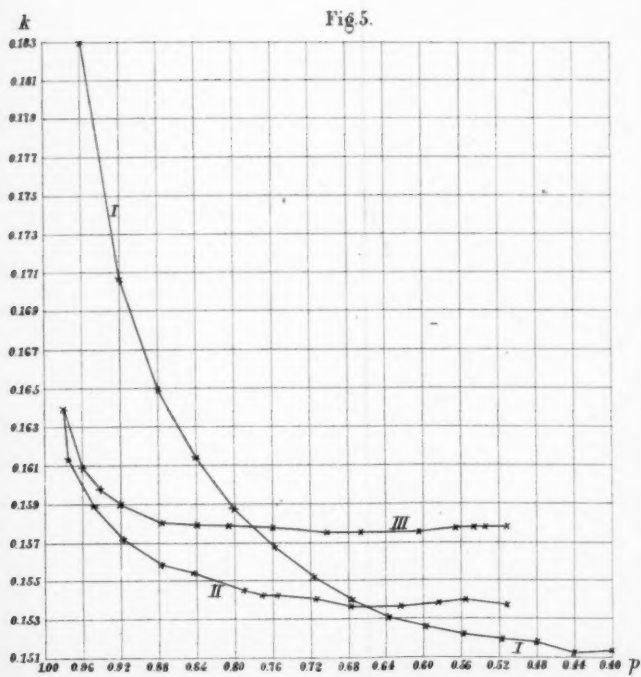
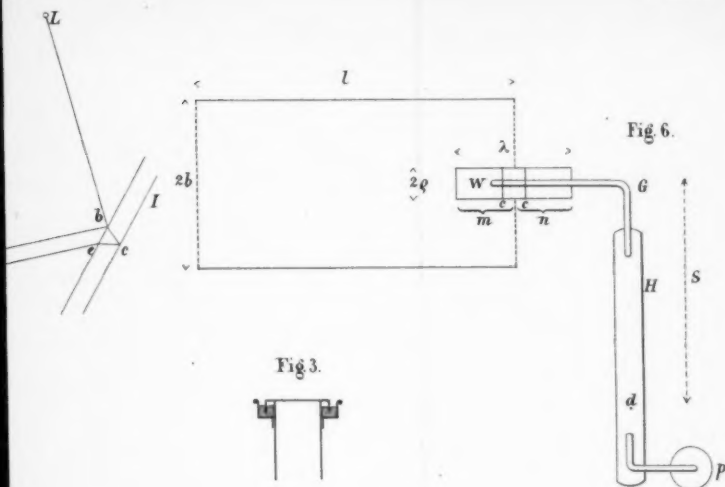
Fig.



Mich ist  
20,1, 3,5 %

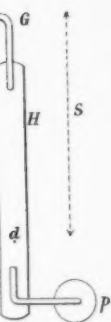
$k$  - Diffusionscoefficient von Kohlensäure -  $L_v$   
 $p$  - Partialdruck der Kohlensäure in Bruchth  
 Curven I, II, III beziehen sich auf die Querschnitte

Waitz Fig. 1-5. v. Ettingshausen Fig. 6.



$k$  - Diffusionscoefficient von Kohlensäure - Luft bei 751.6 mm. Druck u. 19.0 °C.  
 $p$  - Partialdruck der Kohlensäure in Bruchtheilen des Gesamtdruckes.  
 Curven I, II, III beziehen sich auf die Querschnitte 10.0, 20.7, 35.2  $\frac{\text{cm.}}{\text{mm.}}$ .

Fig 6.



°C.

Fig. 1.

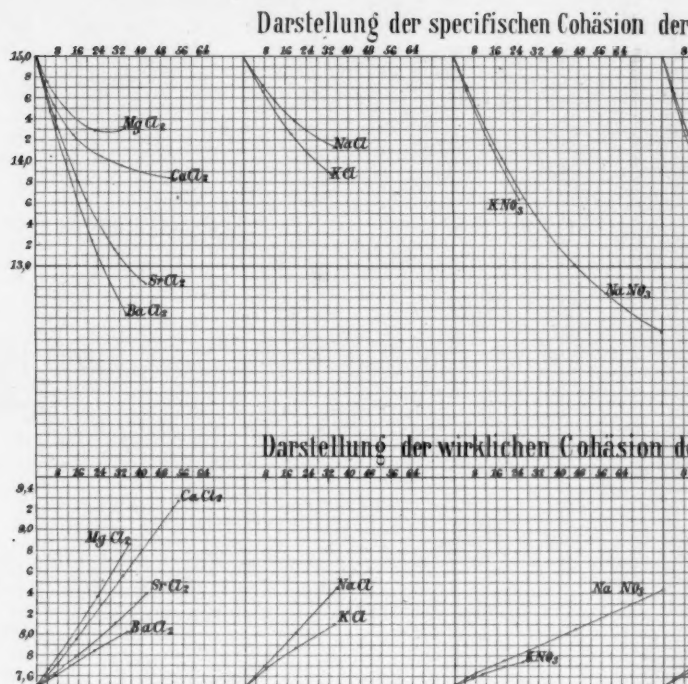


Fig. 7.

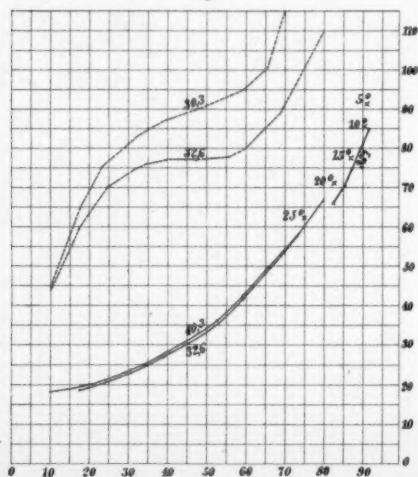


Fig. 6.

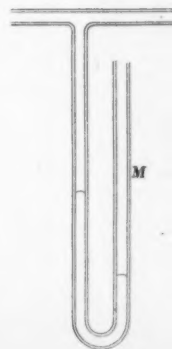
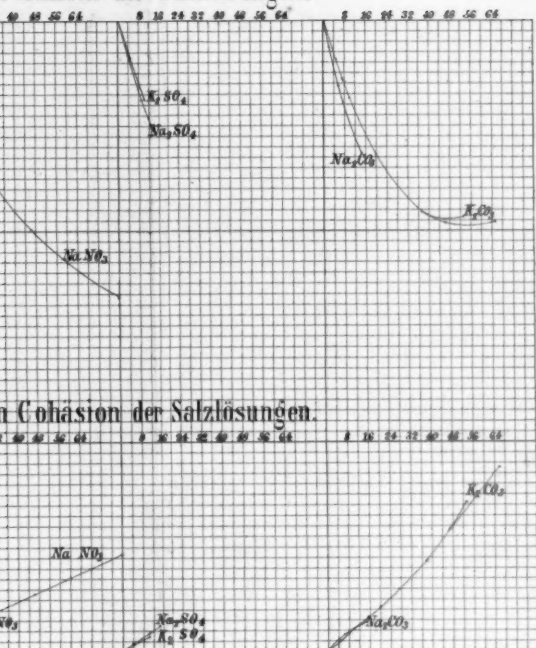




Fig 1.

n Cohäsion der Salzlösungen.



n Cohäsion der Salzlösungen.

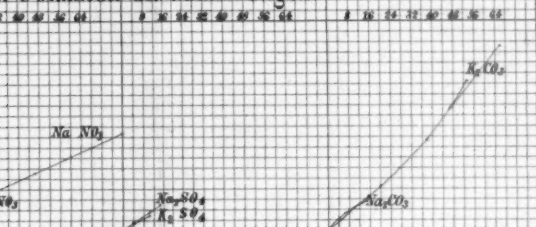


Fig 6.

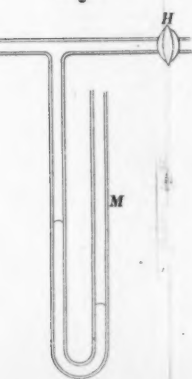


Fig 4.

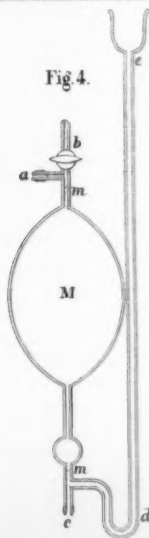
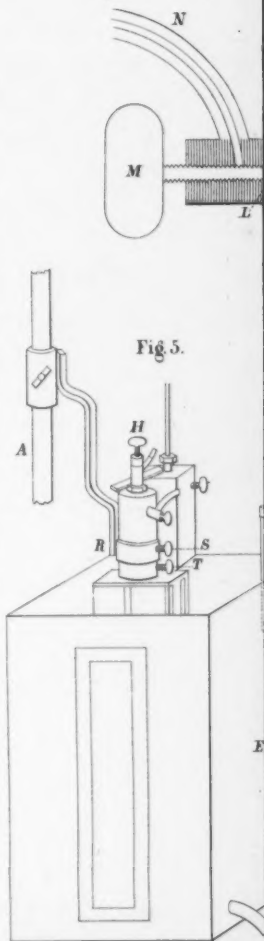


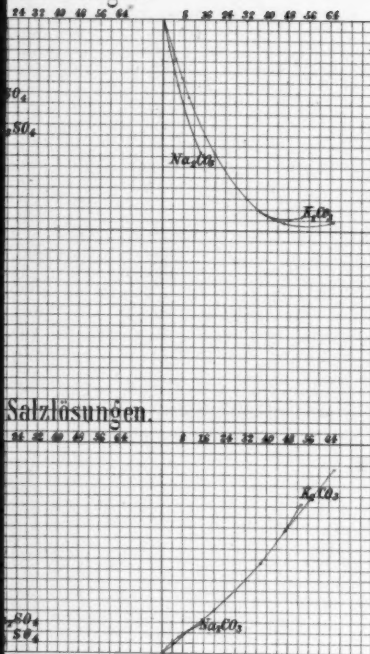
Fig 2 A.



Fig 5.



Salzlösungen.



Salzlösungen.

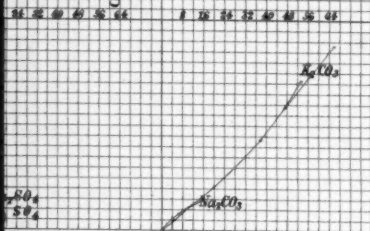


Fig. 4.

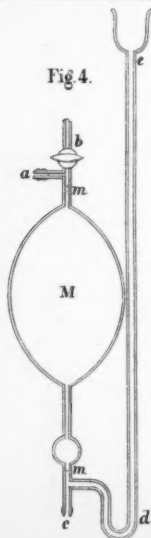
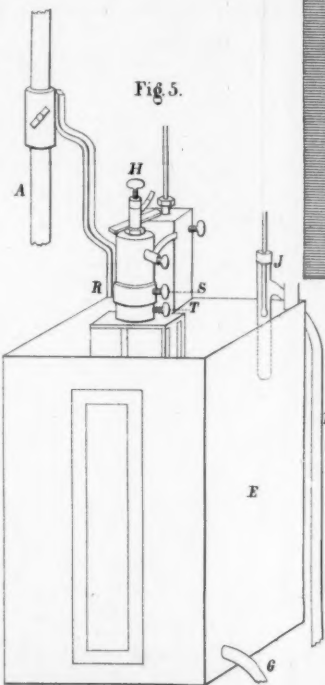


Fig. 2 A.



Fig. 5.



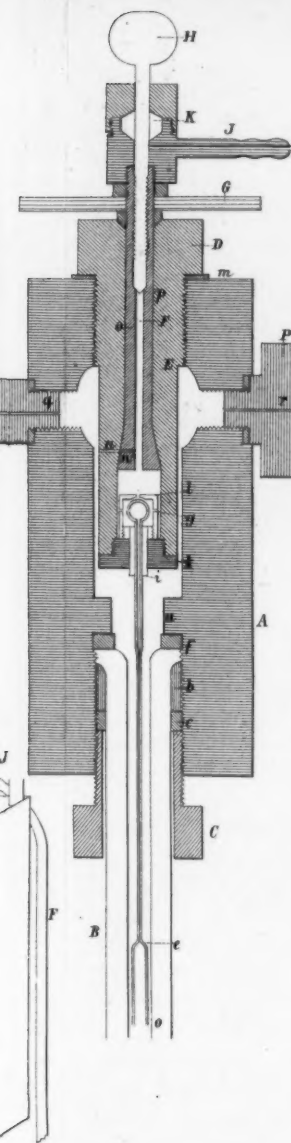


Fig. 2.

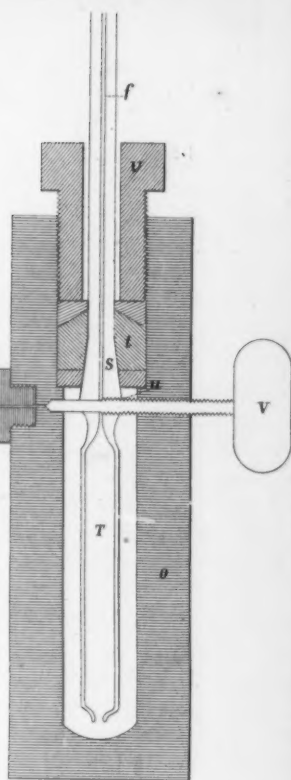
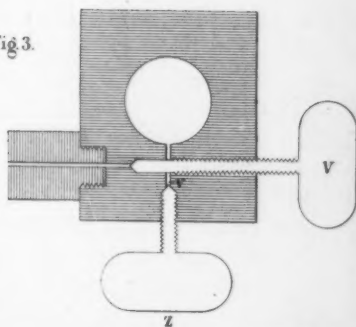


Fig. 3.



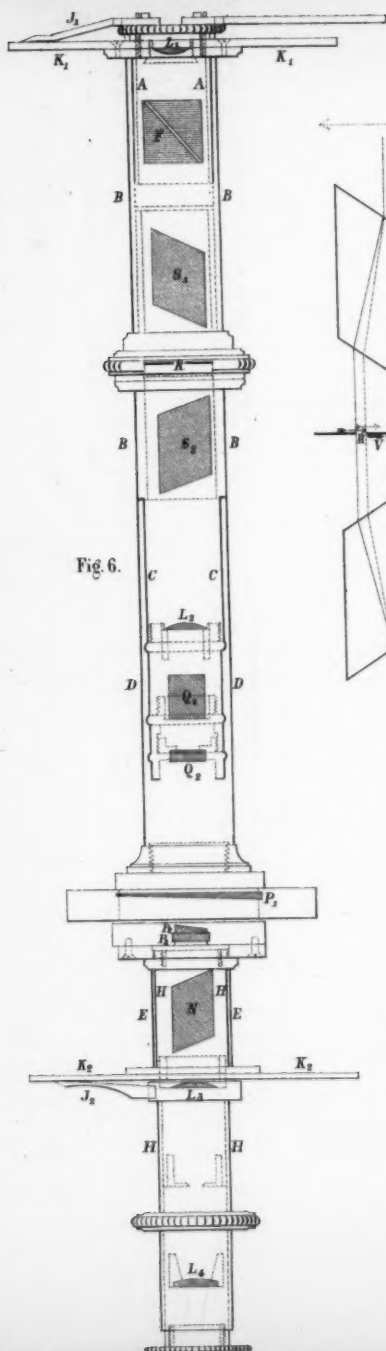


Fig. 6.

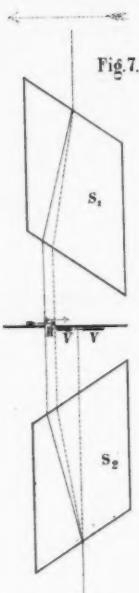


Fig. 7.

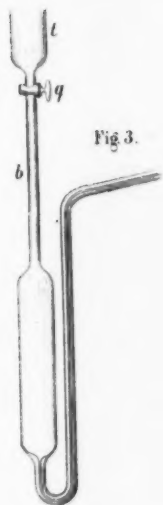
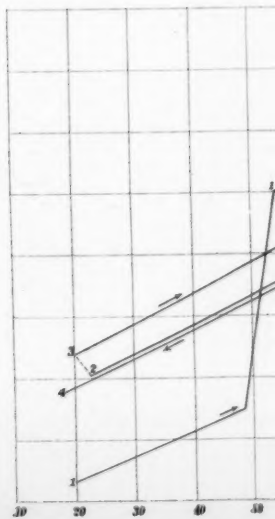


Fig. 3.



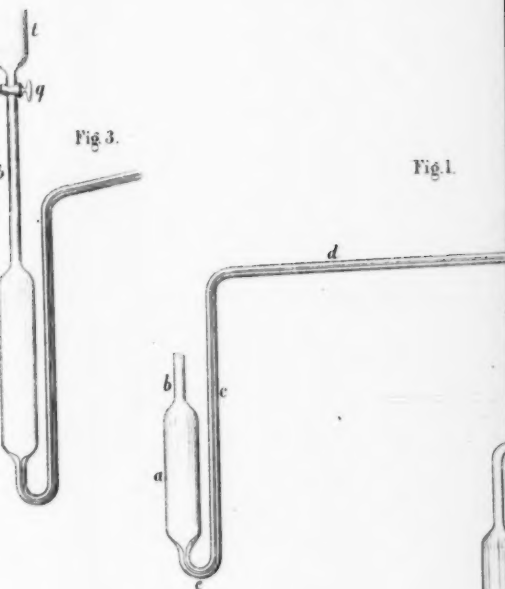


Fig. 5.

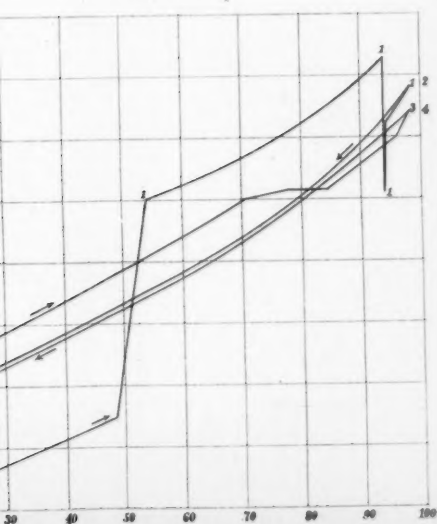


Fig. 3.

Fig. 1.

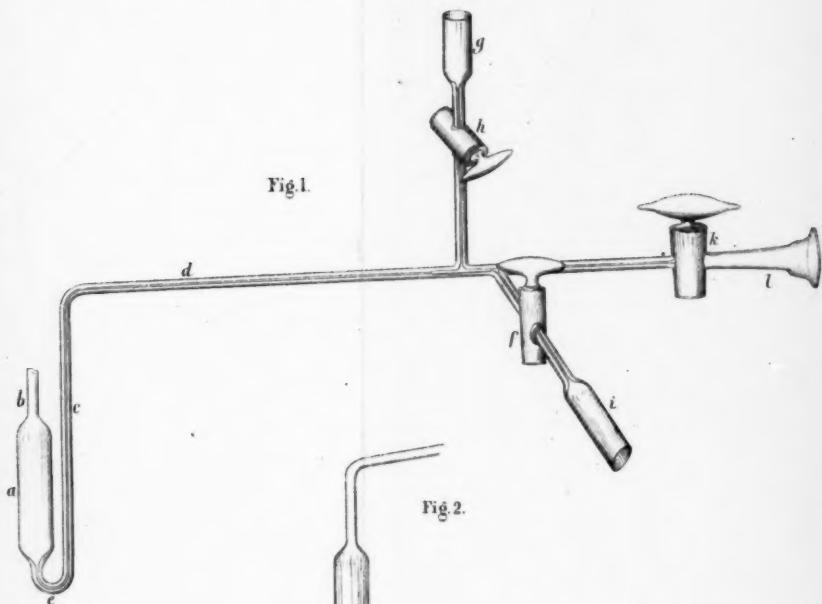


Fig. 2.



Fig. 5.

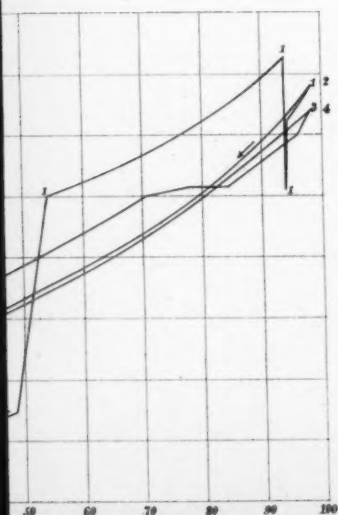
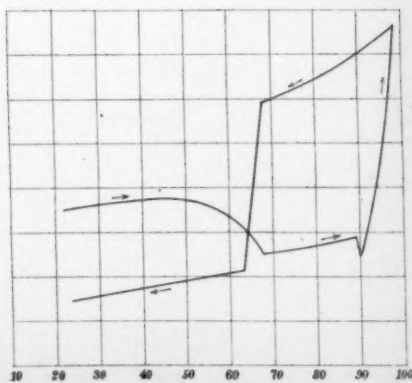


Fig. 4.







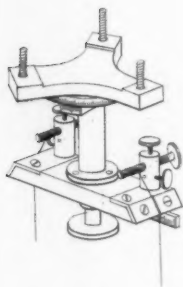


Fig. 1.  
 $\frac{1}{4}$

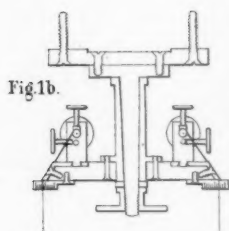


Fig. 1b.

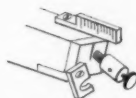


Fig. 1a.  
 $\frac{1}{2}$

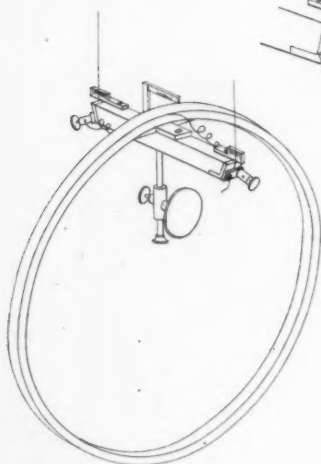


Fig. 2.

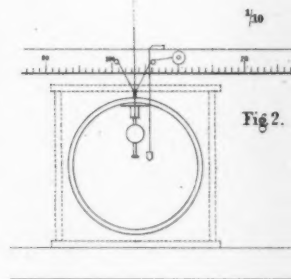


Fig. 2.

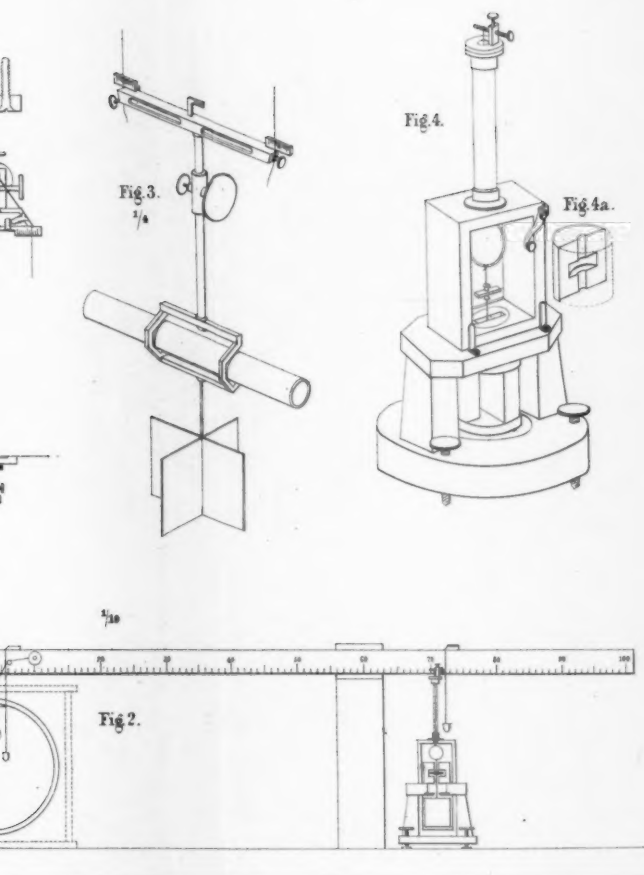


Fig 5.

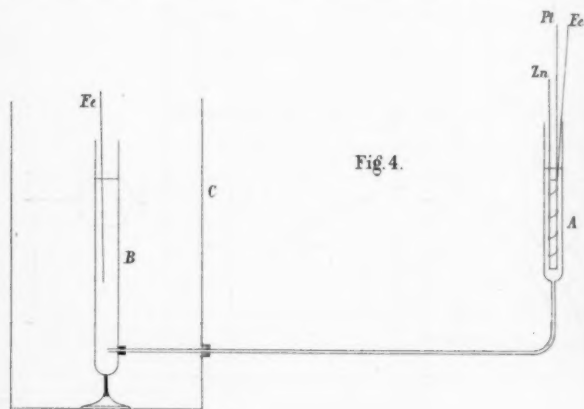
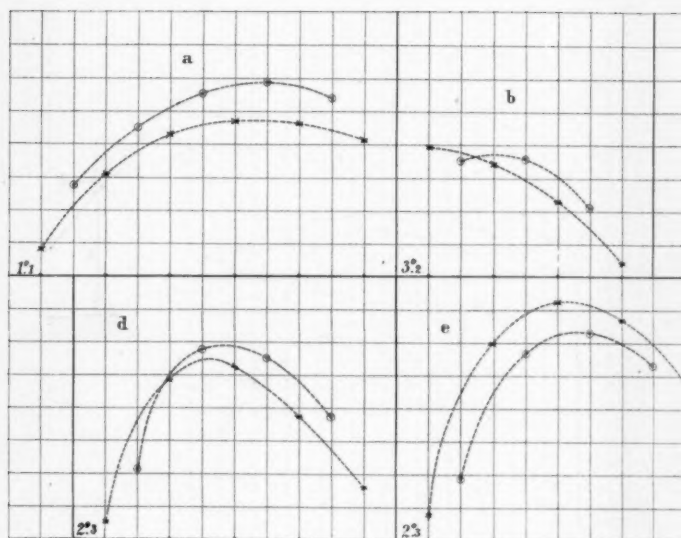
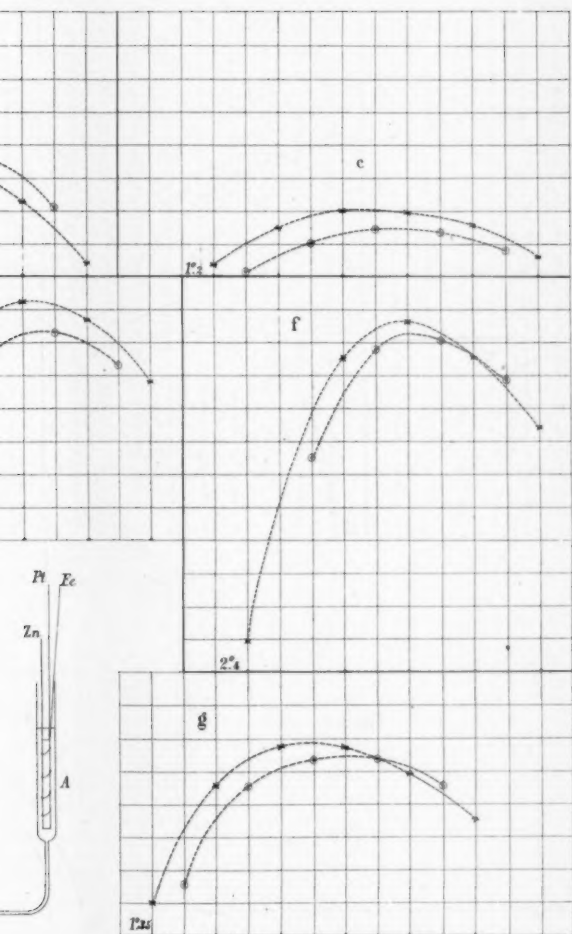


Fig. 5.



F. Streintz Fig 1. Mach Fig 2-3. Haaga Fig. 4-5.

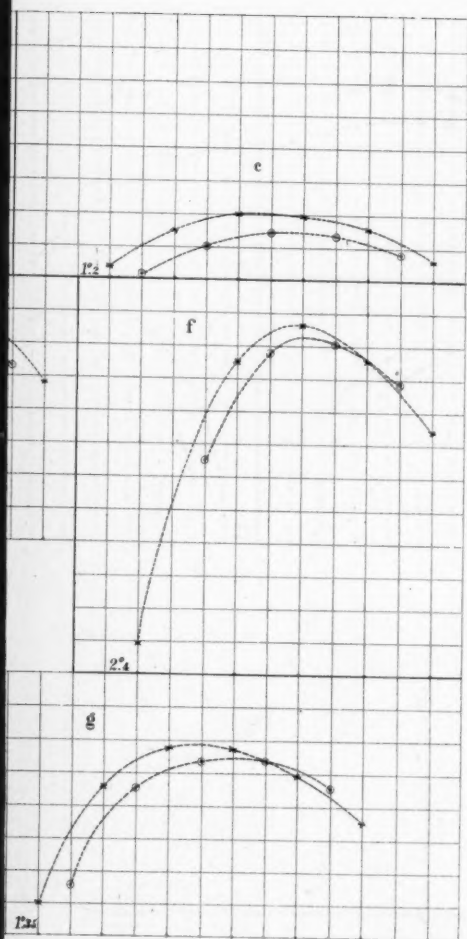


Fig 1.

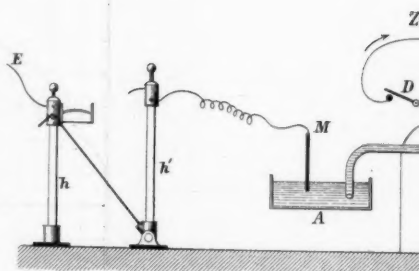
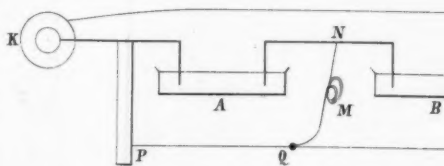


Fig 2.



Fig. 3.



F. Streintz Fig 1. Mach Fig 2-3. Haga Fig. 4-5.

Fig 1.

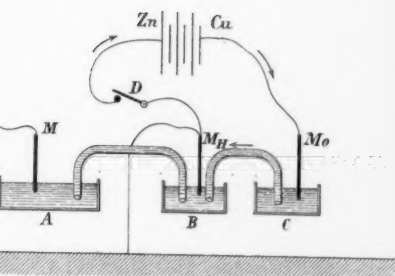


Fig 2.



Fig 3.

